गणित

कक्षा ७

परीक्षणका लागि

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

२०७८

गणित

कक्षा ७

परीक्षणका लागि

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

प्रकाशक :
नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

© सर्वाधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

यस पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी सम्पूर्ण अधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र सानोठिमी, भक्तपुरमा निहित रहेको छ । पाठ्यक्रम विकास केन्द्रको लिखित स्वीकृतिबिना व्यापारिक प्रयोजनका लागि यसको पुरै वा आंशिक भाग हुबहु प्रकाशन गर्न, परिवर्तन गरेर प्रकाशन गर्न, कुनै विद्युतीय साधन वा अन्य प्रविधिबाट रेकर्ड गर्न र प्रतिलिपि निकाल्न पाइने छैन ।

परीक्षण संस्करण : वि.स. २०७८

मूल्य रु.

पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी पाठकहरूका कुनै पनि प्रकारका सुझावहरू भएमा पाठ्यक्रम विकास केन्द्र, समन्वय तथा प्रकाशन शाखामा पठाइदिनुहुन अनुरोध छ । पाठकहरूबाट आउने सुझावहरूलाई केन्द्र हार्दिक स्वागत गर्दछ ।

हाम्रो भनाइ

विद्यार्थीमा देशप्रेम, राष्ट्रिय एकताको भावना, लोकतान्त्रिक मूल्यमान्यता र संस्कारको विकास एवम् विविधताप्रतिको सम्मानको भावना जगाई व्यावहारिक रूपले भाषिक तथा सञ्चार सिपको विकास गराउनु आवश्यक छ । यसै गरी विद्यार्थीमा सूचना र विचारको आदानप्रदान, सूचना प्रविधिको प्रयोग एवम् तार्किक शिल्पका माध्यमले सकारात्मक भावनाको विकास गरी वैज्ञानिक अवधारणालाई व्यवहारमा प्रयोग गर्ने दक्षता अभिवृद्धि पनि विशेष पक्षका रूपमा रहेको छ । विद्यार्थीमा नैतिकता, अनुशासन, सामाजिक र मानवमूल्यबोध तथा चारित्रिक र नागरिक गुण तथा बोधगम्य भाषाको विकास एवम् वातावरण संरक्षण र दिगो विकासप्रतिको सजगता अपेक्षित छ । कक्षाकोठाको सिकाइले विद्यार्थीमा शारीरिक तन्दुरुस्ती, स्वस्थ्यकर जीवनशैली, जीवयोपयोगी सिप, पेसा र श्रमप्रति सम्मान तथा व्यवहार कुशल सिप विकास गर्न सक्नुपर्छ । विद्यार्थीहरूले नेपाली कला, साहित्य र संस्कृतिको संरक्षण गरी सिर्जनात्मक प्रयोग गर्न सक्नुपर्छ । उनीहरूमा सामाजिक र भौगोलिक परिवेश बोध र सद्भाव एवम् सहअस्तित्व बोधका माध्यमले दैनिक जीवनमा आइपर्ने समस्याको समाधान गर्ने शिल्प पनि विकास हुन आवश्यक छ । यस पक्षलाई दृष्टिगत गरी राष्ट्रिय पाठ्यक्रम प्रारूप, २०७६ अनुसार विकास गरिएको आधारभूत शिक्षा गणित विषय (कक्षा ७)को पाठ्यक्रमअनुरुप परीक्षण प्रयोजनका लागि यो पाठ्यपुस्तक विकास गरिएको हो ।

यस पाठ्यपुस्तकको लेखन श्री अनुपमा शर्मा, श्री देवनारायण यादव, श्री मेदनीप्रसाद कंडेल र श्री जगन्नाथ अधिकारीबाट भएको हो । पाठ्यपुस्तकलाई यस रूपमा ल्याउने कार्यमा यस केन्द्रका महानिर्देशक श्री अणप्रसाद न्यौपाने, डा. रामजीप्रसाद पण्डित, श्री प्रमिला बखती, श्री केशवराज फुलारा, श्री राम हाडा, श्री निर्मला गौतम र श्री रामचन्द्र ढकालको योगदान रहेको छ । यसको भाषा सम्पादन श्री गणेशप्रसाद भट्टराई र चिनाकुमारी निरौलाबाट भएको हो । यस पाठ्यपुस्तकको लेआउट डिजाइन श्री नवराज पुरीबाट भएको हो । उहाँहरूलगायत यसको विकासमा संलग्न सम्पूर्णप्रति केन्द्र हार्दिक कृतज्ञता प्रकट गर्दछ ।

पाठ्यपुस्तकलाई शिक्षण सिकाइको महत्त्वपूर्ण साधनका रूपमा लिइन्छ । यस पाठ्यपुस्तकको प्रयोगबाट पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित सक्षमता हासिल गर्न विद्यार्थीलाई सहयोग पुग्ने अपेक्षा गरिएको छ । पाठ्यपुस्तकलाई सकेसम्म क्रियाकलापमुखी र रुचिकर बनाउने प्रयत्न गरिएको छ । यस पाठ्यपुस्तकलाई अझै परिष्कृत पार्नका लागि शिक्षक, विद्यार्थी, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुझावका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्दछ ।

वि. सं. २०७८

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

विषयसूची

पाठ	शीर्षक	पृष्ठसङ्ख्या
१	समूह	१ - १५
२	पूर्ण सङ्ख्या	१६ - ४१
३	पूर्णाङ्क	४२ - ६३
४	आनुपातिक सङ्ख्याहरू	६४ - ७३
५	भिन्न र दशमलव	७४ - ८२
६	अनुपात र समानुपात	८३ - ९२
७	नाफा र नोक्सान	९३ - ९८
८	ऐकिक नियम	९९ - १०५
९	परिमिति, क्षेत्रफल र आयतन	१०६ - १३१
१०	घाताङ्क	१३२ - १३७
११	बीजीय अभिव्यञ्जक	१३८ - १६२
१२	समीकरण, असमानता र ग्राफ	१६३ - १७८
१३	रेखा र कोणहरू	१७९ - १९८
१४	समतलीय आकृतिहरू	१९९ - २१४
१५	अनुरूप आकृतिहरू	२१५ - २२०
१६	ठोस वस्तुहरू	२२१ - २२९
१७	निर्देशाङ्कहरू	२३० - २३५
१८	सममिति र टेसेलेसन	२३६ - २४३
१९	स्थानान्तरण	२४४ - २५२
२०	दिशा स्थिति र स्केल ड्रइङ	२५३ - २६१
२१	तथ्याङ्कको प्रस्तुतीकरण	२६२ - २७४

पाठ 1 समूह (Set)

1.0 पुनरवलोकन (Review)

सँगैका साथीसँग जोडीमा छलफल गरी तलका समूहहरूलाई समूह सङ्केतमा लेख्नुहोस् :

(क) हप्ताका सात बारहरूको समूह

(ख) अङ्ग्रेजी वर्णमालाका स्वर वर्णहरूको समूह

(ग) नेपालको राष्ट्रिय झन्डामा प्रयोग भएका रङको समूह

(घ) 50 सम्मका वर्ग सङ्ख्याहरूको समूह

(ङ) 15 सम्मका रूढ सङ्ख्याहरूको समूह

1.1 समूहका प्रकारहरू (Types of set)

1.1.1 खाली समूह (Null set)

क्रियाकलाप 1

तल दिइएका समूहहरूको अध्ययन गरी के कति सदस्यहरू छन् ? छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

(क) कन्या विद्यालयमा अध्ययन गर्ने केटा विद्यार्थीहरूको समूह

(ख) 1 र 2 को बिचमा पर्ने प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह

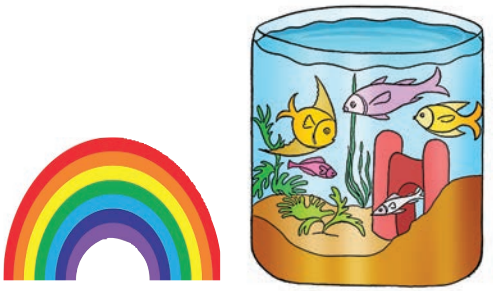
माथिका दुवै समूहमा एउटा पनि सदस्य छैनन् । एउटा पनि सदस्य नरहेको समूहलाई खाली समूह (Empty set or Null set or Void set) भनिन्छ । यसलाई बोइद (ϕ) ले जनाइन्छ । ϕ लाई 'Phi' भनेर पढिन्छ ।

एउटा पनि सदस्य नभएको समूहलाई खाली समूह भनिन्छ । यसलाई ϕ अथवा { } ले जनाइन्छ ।

1.1.2 सीमित र असीमित समूह (Finite and Infinite Sets)

क्रियाकलाप 2

तल दिइएका चित्रहरूको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :



(क) इन्द्रेणीमा कतिओटा रङहरू छन् ?

(ख) एक्वेरियमभित्र कतिओटा माछाहरू छन् ?

(ग) के आकाशमा भएका ताराहरूको गणना गर्न सकिन्छ ?

माथिका चित्रहरूबाट इन्द्रेणीका रङहरू, भाँडाभित्रका माछाहरू यतिओटै छन् भनी गणना गरेर निश्चित रूपमा भन्न सकिन्छ । तर आकाशमा भएका ताराहरूको गणना गर्न सकिँदैन ।

(क) सीमित वा निश्चित सदस्य सङ्ख्याहरू भएको समूहलाई सीमित समूह (Finite Set) भनिन्छ ।

(ख) सदस्य सङ्ख्या निश्चित रूपमा भन्न नसकिने वा अनगिन्ती सदस्यहरू भएको समूहलाई असीमित समूह (Infinite Set) भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 3

1. तल दिइएका समूहहरूलाई अध्ययन गरी सीमित वा असीमित कस्ता समूह हुन्, छलफल गर्नुहोस् :

N = { प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह}

W = {30 भन्दा साना पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह}

E = {जोर सङ्ख्याहरूको समूह}

S = {100 सम्मका वर्ग सङ्ख्याहरूको समूह}

(क) समूहहरू N, W, E र S का सदस्यहरू के के हुन् ?

(ख) के समूह N, W, E र S का सदस्य सङ्ख्याहरू निश्चित रूपमा यति नै छन् भनेर भन्न सकिन्छ, निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

समूहहरू N र E दुवैका पहिलो सदस्य अर्थात् सुरुको सदस्य थाहा छ तर अन्तिम सदस्यहरू थाहा छैनन् । अन्तिम सदस्य थाहा नहुँदा यति नै सदस्य छन् भनेर निश्चित रूपमा भन्न सकिँदैन । यी दुवै समूहहरूमा असीमित सदस्यहरू छन् । त्यसैले N र E दुवै असीमित समूहहरू हन् । समूहहरू W र S दुवैका सदस्यहरू निश्चित छन् । त्यसैले W र S दुवै सीमित समूहहरू हन् ।

उदाहरण 1

तल दिइएका समूहहरूबाट सीमित वा असीमित समूह छुट्याउनुहोस् । सीमित समूह भए सदस्य सङ्ख्या पनि लेख्नुहोस् :

(क) पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह

(ख) 24 का गुणनखण्डहरूको समूह

समाधान

यहाँ,

(क) यहाँ पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूहलाई W मानौँ,

W = {0, 1, 2, 3, ...}

W मा असीमित सदस्यहरू छन् । त्यसैले W असीमित समूह हो ।

(ख) यहाँ 24 का गुणनखण्डहरूको समूहलाई F मानौँ ।

F = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

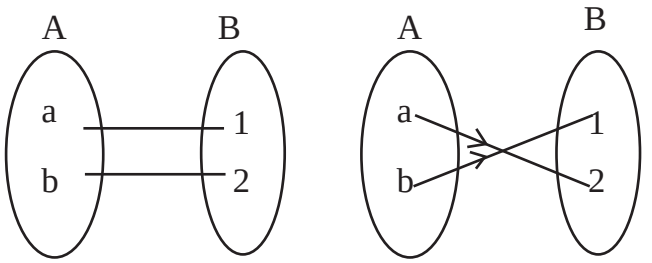
F मा जम्मा 8 ओटा सदस्यहरू छन् ।

त्यसैले F सीमित समूह हो ।

1.1.3 समतुल्य र बराबर समूहहरू (Equivalent and Equal Sets)

क्रियाकलाप 4

1. तल दिइएका चित्र अवलोकन गरी छलफल गर्नुहोस् :



(क) समूहहरू A र B का सदस्यहरूको सूची बनाउनुहोस् ।

(ख) के समूह A का प्रत्येक सदस्यले समूह B को कुनै एउटा सदस्य जोडा पाएको छ ?

(ग) के समूहहरू A र B का सदस्यहरूको सङ्ख्या बराबर छन् ?

यहाँ दुवै तरिकामा समूह A का प्रत्येक सदस्यले समूह B बाट एक सदस्य जोडा पाएको छ । अर्थात् समूहहरू A र B का सदस्यहरूको सङ्ख्या बराबर छन् । त्यसैले A र B समतुल्य समूहहरू हुन् ।

यदि दुईओटा समूहहरूका सदस्य सङ्ख्याहरू बराबर छन् भने त्यस्ता समूहहरूलाई समतुल्य समूह भनिन्छ । समतुल्य समूहहरूलाई सङ्केतमा A~B लेखिन्छ ।

क्रियाकलाप 5

तल दिइएका समूहको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नको छलफल गर्नुहोस् :

A = { △, ○, ▭, □ }

B = { □, △, ○, ▭ }

(क) समूह A र B मा कति कतिओटा सदस्यहरू छन् ?

(ख) के समूह A र B का सदस्य सङ्ख्याहरू बराबर छन् ?

(ग) के समूह A र B मा सदस्यहरू उही छन् ?

समूहहरू A र B दुवैमा चार चारओटा सदस्यहरू छन् । A का हरेक सदस्यहरू B मा र B का हरेक सदस्यहरू A मा छन् । अर्थात् समूह A र B का सदस्यहरूको क्रम नमिले पनि सदस्यहरू उही छन् । त्यसैले A र B बराबर समूहहरू हुन् ।

(क) यदि दुईओटा समूहहरूका सदस्यहरू उत्तिकै सङ्ख्यामा र उही छन् भने ती समूहहरू बराबर समूह हुन्छन् । यदि समूहहरू A र B बराबर समूह भए सङ्केतमा A = B लेखिन्छ ।

(ख) सबै बराबर समूहहरू समतुल्य हुन्छन् तर सबै समतुल्य समूह बराबर नहुन सक्छन् ।

उदाहरण 2

1. यदि A र B दुई समूह छन् भने निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

A = {1 भन्दा ठुला र 4 भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह}

B = {6 का रूढ गुणनखण्डहरूको समूह}

(क) A र B लाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् ।

(ख) समूह A र समूह B दुवैका सदस्य सङ्ख्याहरू लेख्नुहोस् ।

(ग) के समूह A का हरेक सदस्यहरू समूह B मा छन् ?

(घ) के समूह B का हरेक सदस्यहरू समूह A मा छन् ?

(ङ) समूह A र समूह B लाई कस्ता समूहहरू भन्न सकिएला ?

समाधान

यहाँ,

(क) A = { 2, 3}, B = {2, 3}

(ख) समूहहरू A र B दुवैमा दुई दुईओटा सदस्यहरू छन् ।

(ग) समूह A का हरेक सदस्यहरू समूह B मा छन् ।

(घ) समूह B का हरेक सदस्यहरू समूह A मा पनि छन् ।

(ङ) समूह A र B बराबर समूहहरू हुन् ।

अभ्यास 1.1

1. **तल दिइएका समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् र ती समूहका सदस्यहरूको सङ्ख्या पनि लेख्नुहोस् :**

   (क) A = {13 का रूढ सङ्ख्याहरूको समूह}

   (ख) B = {x : x एउटा 40 भन्दा साना 4 का अपवर्त्यहरूको समूह हो ।}

   (ग) C = {2 भन्दा ठुला र 7 भन्दा साना गन्ती सङ्ख्याहरूको समूह}

   (घ) D = {20 का गुणनखण्डहरूको समूह}

2. **दिइएका समूहहरूमध्ये खाली समूह भए ठिक (✓) र अरूलाई बेठिक चिह्न (×) दिनुहोस् :**

   (क) 1 भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह

   (ख) जोर रूढ सङ्ख्याको समूह

   (ग) कक्षा 6 का 6 फिट भन्दा अग्ला विद्यार्थीको समूह

   (घ) 2 ले भाग जाने बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह

3. **तल दिइएका समूहहरूबाट सीमित वा असीमित समूह छुट्याउनुहोस् । सीमित समूह भए सदस्य सङ्ख्या पनि लेख्नुहोस् :**

   (क) A = {20 भन्दा ठुला बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह}

   (ख) P = {20 भन्दा साना रूढ सङ्ख्याहरूको समूह}

   (ग) C = {20 भन्दा साना संयुक्त सङ्ख्याहरूको समूह}

   (घ) W = {1 भन्दा साना पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह}

4. **तल दिइएका समूहहरूमध्ये कुन कुन बराबर समूह हुन्, बराबर भए = चिह्नको प्रयोग गरी लेख्नुहोस् ।**

   (क) P = {2 देखि 9 सम्मका रूढ सङ्ख्याहरू}, Q = {1 देखि 8 सम्मका विजोर सङ्ख्याहरू}

   (ख) A = {2 ले भाग जाने 20 भन्दा साना सङ्ख्याहरू}, B ={10 भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरू}

   (ग) C = {*l*, u, r, e},D = { r, u, *l*, e }

   (घ) A = {16 का गुणनखण्डहरू}, B = {4 ले भाग जाने 16 सम्मका सङ्ख्याहरू}

5. **तल दिइएका समूहहरूमध्येबाट समतुल्य समूह छुट्याउनुहोस् :**

(क) A = {g, o, d} , B = {d, o, t}

(ख) A = {a, b, c, ..., x} , Y = {1, 2, 3, ..., 12}

(ग) C = {*l*, i, n, e}, D = {f, i, *l*, e}

(घ) G = {1, 2, 3, 4, 5} , H = {x : x एउटा 6 भन्दा सानो प्राकृतिक सङ्ख्या हो}

6. यदि दिइएका समूहहरू A = {0, 1, 2, 3} , B = {1, 2, 3}, C = {0}, D = { }, E = {1, 2, 3} र F = {1} भए तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(क) प्रत्येक समूहको सदस्य सङ्ख्या लेख्नुहोस् ।

(ख) कुन कुन समूहका सदस्य सङ्ख्या बराबर छन् ?

(ग) सदस्य सङ्ख्या बराबर भएर पनि आपसमा बराबर नहुने समूहहरू कुन कुन हुन् ?

(घ) कुन कुन समूहहरू बराबर छन्, लेख्नुहोस् ।

7. यदि समूहहरू A = {4, 5} र B = {c, d} छन् भने,

(क) समूहहरू A र B का सदस्यहरूलाई कति तरिकाबाट अलग अलग रूपमा जोडा मिलाउन सकिन्छ, देखाउनुहोस् ।

(ख) दुई समूहहरू समतुल्य छन् कि छैनन्, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

8. यदि A = { a, b, c, d} र B = { a, b, c, d, e} भए,

(क) के A र B बराबर छन् ?

(ख) A र B लाई बराबर बनाउन के गर्नुपर्ला ?

परियोजना कार्य

तपाईं आफ्नो विद्यालयको कक्षाकोठा वा घर छिमेक वरिपरि भएका वस्तुहरूको सूची तयार पार्नुहोस् । सो वस्तुहरूको सूचीबाट समान गुणको आधारमा फरक फरक समूहहरूको निर्माण गर्नुहोस् । ती समूहहरूलाई अवलोकन गरी तिनीहरूको नाम र प्रकार लेख्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

1.2 सर्वव्यापक समूह (Universal Set)

क्रियाकलाप 1

सम्पूर्ण विद्यार्थीहरू उपयुक्त समूहमा विभाजन भई प्रत्येक समूहले निम्नबमोजिमका सङ्ख्याको समूह छलफल गरी निर्माण गर्नुहोस् ।

(क) जोर (Even) सङ्ख्याहरूको समूह E

(ख) बिजोर (odd) सङ्ख्याहरूको समूह O

(ग) वर्ग (Square) सङ्ख्याहरूको समूह S

(घ) घन (Cube) सङ्ख्याहरूको समूह C

(ङ) रूढ (Prime) सङ्ख्याहरूको समूह P

(च) संयुक्त (Composite) सङ्ख्याहरूको समूह A

माथिका सबै (क देखि च सम्म) समूहहरूका गुण वा विशेषता छलफलमा आउन सक्ने कुनै एउटा समूह के हुन सक्छ ?

के माथिका N = {प्राकृतिक सङ्ख्याहरू} वा N = {1, 2, 3, 4, ...} मा माथिका सबै समूहरू छलफलमा आउन सक्छन् ?

त्यस्तै गरी, आफ्नो कक्षाका छात्राहरूको समूह G, छात्रहरूको समूह B र टोपीलगाउने विद्यार्थीहरूको समूह C बनाउनुहोस् ।

यी तीनओटै समूहहरूका गुण वा विशेषता आउन सक्ने कुनै एउटा निश्चित समूह के होला ?

के S = {कक्षाका सम्पूर्ण विद्यार्थीहरूको समूह} मा माथिका सबै (तीनओटै) समूहहरू पर्दछ ?

कुनै एउटा निश्चित समूहमा छलफलभित्र आउन सक्ने सबै प्रकारका समूहहरू समावेश भएका छन् भने त्यो निश्चित समूहलाई सर्वव्यापक समूह (Universal Set) भनिन्छ ।

सर्वव्यापक समूहलाई U ले जनाइन्छ ।

क्रियाकलाप 2

उपयुक्त समूहमा विभाजन भई तलको संवाद पढ्नुहोस् र छलफल गरी सर्वव्यापक समूह के हुन सक्छ ? कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

रूपेश : 13 सम्मका बिजोर सङ्ख्याहरू

नोर्बु : यसमा गन्ती सङ्ख्या 16 त परेन ।

मञ्जु : 14 सम्मका जोर सङ्ख्याहरू

सदाम : यसमा रूढ सङ्ख्याहरू पनि छन् त ?

दिलमाया : यसमा उपयुक्त भिन्न छन् त ?

कविता : ए ! यसमा त दशमलव सङ्ख्या पनि छैन ।

माथिको छलफलका आधारमा बिमलले बोर्डमा लेखेको सर्वव्यापक समूह पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ 14 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह (N) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14} मा माथिका सबै समूहहरू छलफलमा आउन सक्छन् ।

त्यसैले यहाँ समूह N सर्वव्यापक समूह हुन्छ ।

उदाहरण 1

सर्वव्यापक समूह (U) = 15 भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह छ । अब, सूचीकरण विधिबाट तलका समूहहरू निर्माण गर्नुहोस् :

(क) A = {15 भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरूको समूह}

(ख) B = {15 भन्दा साना रूढ सङ्ख्याहरूको समूह}

समाधान

यहाँ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14}

(क) A = {15 भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरूको समूह}

∴ A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}

(ख) B = {15 भन्दा साना रूढ सङ्ख्याहरूको समूह}

∴ B = {2, 3, 5, 7, 11, 13}

अभ्यास 1.2

1. सर्वव्यापक समूह U = {25 भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याहरू} छ भने सूचीकरण विधिबाट तलका समूहहरू लेख्नुहोस् :

(क) A = {25 भन्दा साना वर्ग सङ्ख्याहरूको समूह}

(ख) बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह O

(ग) संयुक्त सङ्ख्याहरूको समूह C

2. सर्वव्यापक समूह U = {5 देखि 20 सम्मका पूर्ण सङ्ख्याहरू} छ । दिइएको सर्वव्यापक समूहका आधारमा सूचीकरण विधिबाट निम्नबमोजिमका समूहहरू निर्माण गर्नुहोस् :

(क) जोर सङ्ख्याहरूको समूह E

(ख) 3 को अपवर्त्यहरूको समूह M_3

(ग) रूढ सङ्ख्याहरूको समूह P

3. तलदिइएका समूहहरूका लागि एउटा सर्वव्यापक समूह U बनाउनुहोस् ।

A = {2, 4, 6, 8, 10} र B = {1, 3, 5, 7, 9}

4. एउटा विद्यालयमा कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूबिच भएको तलको छलफलका आधारमा सर्वव्यापक समूह पत्ता लगाउनुहोस् :

डोल्मा : यसमा M_4 विचार गर्दा M_4 = {4, 8, 12} हुन्छ ।

आर्या : यसमा शून्य छैन त ।

कृष्णा : यसमा 13 पनि छैन नि ।

जाकिर : ए ! यसमा भिन्न पनि आउँदैन ।

सोल्मु : यसमा बिजोर सङ्ख्या त एउटा पनि छैन ।

जितु : यसमा दशमलव सङ्ख्या पनि छैन ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

1.3 उपसमूह (Subsets)

क्रियाकलाप 1

सबै विद्यार्थीहरू उपयुक्त सङ्ख्यामा समूहमा बस्नुहोस् । प्रत्येक समूहले ज्यामिति बाकसमा हुने तलका औजारहरूको समूहलाई सर्वव्यापक समूह U मान्नुहोस् ।

U = {प्रोट्रेक्टर, सेट स्क्वायर, कम्पास, रुलर}

अब प्रत्येक समूहले माथिको सर्वव्यापक समूहबाट निम्नानुसारको समूह निर्माण गर्नुहोस् :

1. सर्वव्यापक समूहबाट एउटा मात्र सदस्य भएका समूहहरू

A = {प्रोट्रेक्टर}, B = {सेट स्क्वायर}

C = {कम्पास}, D = {रुलर}

2. दुईओटा सदस्यहरू भएका समूहहरू

E = {प्रोट्रेक्टर, सेट स्क्वायर}

F = {प्रोट्रेक्टर, कम्पास}

G = {प्रोट्रेक्टर, रुलर}

H= {सेट स्क्वायर, रुलर}

I = {सेट स्क्वायर, कम्पास}

J = {कम्पास, रुलर}

3. तीनओटा सदस्य भएका समूहहरू

K = {प्रोट्रेक्टर, सेट स्क्वायर, कम्पास}

L= {प्रोट्रेक्टर, कम्पास, रुलर}

M = {सेट्रस्क्यार, सेट स्क्वायर, रुलर}

N = {प्रोट्रेक्टर, सेट स्क्वायर, रुलर}

4. चारओटा सदस्य भएका समूहहरू

O = {प्रोट्रेक्टर, सेट स्क्वायर, कम्पास, रुलर}

5. एउटा खाली समूह

P = {}

अब माथिका समूहका आधारमा तलका प्रश्नहरूमा साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् :

(क) के समूह A का सदस्य समूह U का पनि सदस्य हुन् ?

(ख) के समूह B, C, D का सबै सदस्यहरू समूह U का पनि सदस्यहरू हुन् ?

(ग) के समूह E, F, G, H, I र J का सबै सदस्यहरू समूह U का पनि सदस्यहरू हुन् ?

(घ) के समूह K, L, M र N का सबै सदस्यहरू समूह U का पनि सदस्यहरू हुन् ?

(ङ) के समूह O का सबै सदस्यहरू समूह U का पनि सदस्यहरू हुन् ?

यदि पहिलो समूहमा भएका प्रत्येक सदस्य दोस्रो समूहको पनि सदस्य भए पहिलो समूहलाई दोस्रो समूहको उपसमूह भनिन्छ । उपसमूहलाई $\subseteq$ वा $\subset$ सङ्केतले जनाइन्छ ।

1.3.1 उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूहहरू (Proper and improper subsets)

क्रियाकलाप 2

प्रत्येक विद्यार्थीले एउटा एउटा समूह बनाउनुहोस् ।

$P = \{1, 2, 3\}$

अब आफूले बनाएको समूहबाट बन्ने उपसमूहहरू बनाउनुहोस् र तल दिइएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

$A = \{1\}$, $B = \{2\}$ $C = \{3\}$

$D = \{1, 2\}$, $E = \{1, 3\}$ $F = \{2, 3\}$

$G = \{1, 2, 3\}$, $E = \{\}$

(क) P का सबै सदस्यहरू लिएर बनाइएको उपसमूह कुन हो ? यो कस्तो उपसमूह हो ?

(ख) P का केही भाग सदस्यहरू लिएर बनाइएका उपसमूहहरू कुन कुन हुन ? यी उपसमूहहरूलाई कस्ता उपसमूह भनिन्छ ?

(ग) के खाली समूहलाई कुनै पनि समूहको उपयुक्त उपसमूह भन्न सकिन्छ ?

(घ) के बराबर समूहहरू आपसमा अनुपयुक्त उपसमूहहरू हुन्छन् ?

(ङ) उपयुक्त उपसमूह र अनुपयुक्त उपसमूहलाई गणितीय सङ्केतमा कसरी जनाइन्छ ?

1. यदि कुनै सर्वव्यापक समूह U वा अन्य समूहहरू A, B, C, ... आदिबाट केही मात्र सदस्यहरू लिएर कुनै उपसमूह बनाइन्छ भने त्यसलाई उपयुक्त उपसमूह (proper subset) भनिन्छ । यसलाई $\subset$ सङ्केतले जनाइन्छ ।
2. यदि कुनै सर्वव्यापक समूह U वा अन्य समूहहरू A, B, C, ... आदिबाट उक्त समूहका सबै सदस्यहरू लिएर उपसमूह बनाइन्छ भने त्यसलाई अनुपयुक्त उपसमूह (Improper Subset) भनिन्छ । यसलाई $\subseteq$ सङ्केतले जनाइन्छ ।
3. खाली समूह सबै समूहको उपयुक्त उपसमूह हुन्छ ।
4. बराबर समूहहरू आपसमा अनुपयुक्त उपसमूहहरू हुन्छन् ।

उदाहरण 1

तल दिइएका सर्वव्यापक समूह (U) बाट निर्माण गरीएका विभिन्न उपसमूहहरूमध्ये उपयुक्त उपसमूह र अनुपयुक्त उपसमूह छुट्याउनुहोस् ।

U = {a, e, i, o, u}

A = {a, e}

B = {e, o, u}

C = {a, e, i, o, u}

समाधान

यहाँ उपसमूहहरू A र B उपयुक्त उपसमूहहरू हुन् ।

त्यस्तै उपसमूह C अनुपयुक्त उपसमूह हो ।

अभ्यास 1.3

1. यदि समूह F = {सयपत्री, गुलाफ, गुराँस} छ भने

(क) समूह F बाट बन्ने एक सदस्यीय उपसमूह बनाई नामाकरण गर्नुहोस् ।

(ख) समूह F बाट बन्ने दुई सदस्यीय उपसमूह बनाई नामाकरण गर्नुहोस् ।

(ग) समूह F बाट सबै सदस्य लिएर उपसमूह बनाई गरी नामाकरण गर्नुहोस् ।

(घ) समूह F बाट कुनै पनि सदस्य नभएको उपसमूह बनाई नामाकरण गर्नुहोस् ।

2. प्रश्न (1) मा बनाइएका उपसमूहहरूबाट उपयुक्त उपसमूह र अनुपयुक्त उपसमूह छुट्याउनुहोस् ।

3. यदि A = {1, 2, 3, 4} भए B = {2, 3, 4} र C = {4, 3, 2, 1} मध्ये कुन चाहीँ A को उपयुक्त उपसमूह हो ?

4. समूह A = {a, b, c} बाट बन्न सक्ने सबै उपसमूहहरू निर्माण गर्नुहोस् ।

5. तलका समूहहरूबाट बन्न सक्ने उपयुक्त उपसमूहहरू लेख्नुहोस् :

(क) P = {a, b} (ख) Q = {4, 5} (ग) R = {p, a, r}

6. तलको तालिका कापीमा बनाई भर्नुहोस् ।

समूह	उपसमूहहरू	उपयुक्त उपसमूहहरू	अनुपयुक्त उपसमूहहरू
{1}			
{1, 2}			
{1, 2, 3}			

7. कुनै एउटा समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् । उक्त समूहबाट बन्न सक्ने जति सबै उपसमूह लेख्नुहोस् । त्यसबाट उपयुक्त उपसमूह र अनुपयुक्त उपसमूहहरू छुट्याई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

तपाईंको कक्षाकोठामा भएका वस्तुहरूको सूची तयार गर्नुहोस् । गुणका आधारमा समूहहरू बनाउनुहोस् । ती प्रत्येक समूहबाट बन्ने उपसमूहहरू निर्माण गरी प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास

1. समूह A = {6 को गुणनखण्डहरूको समूह} र B = {10 भन्दा साना रूढ सङ्ख्याहरूको समूह} भए

(क) समूह A = समूह B लाई सूचीकरण र समूह निर्माण विधिमा लेख्नुहोस् ।

(ख) समूह A र समूह B समतुल्य वा बराबर कस्ता समूहहरू हुन्, किन ?

2. खाली समूहको एउटा उदाहरण व्याख्या विधिमा लेख्नुहोस् ।

3. समूहहरू A = {1, 2, 3, 4, 5} र B = {a, b, c, d, e,} हुँदा A र B बराबर हुँदैनन् किन, कारण लेख्नुहोस् ।

4. समूह A = {10 भन्दा ठुला जोर सङ्ख्याहरूको समूह} र B = {10 भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरूको समूह} भए,

(क) समूह A र समूह B लाई सूचीकरण र समूह निर्माण विधिमा लेख्नुहोस् ।

(ख) समूह A र समूह B सीमित वा असीमित कस्ता समूह हुन् ? किन लेख्नुहोस् ।

5. तलका समूहहरूको उपसमूहहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) M = {3, 4} (ख) N = {a, e, i} (ग) R = {2, 4, 6}

6. समूह A = {1, 3, 5, 6} बाट बन्न सक्ने कुनै पाँच ओटा उपसमूहहरू बनाउनुहोस् ।

7. यदि A = {1, 2, 3}, B = {1, 3} र C = {3, 2} भए A को उपयुक्त उपसमूह कुन होला ?

8. यदि P = {a, b, c}, Q = {c, b, a} र R = {a, c} भए P को अनुपयुक्त उपसमूह कुन हो ?

9. यदि U = {1, 3, 5, 7, 9} भए तल निर्माण गरीएको उपसमूहहरू हेरी उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूह छुट्याउनुहोस् ।

(क) E = {3, 5, 9} (ख) F = {1, 3, 5, 7} (ग) G = {1, 3, 5, 7, 9}

10. तलका समूहहरूको उपयुक्त उपसमूहहरू निर्माण गर्नुहोस् ।

(क) A = {1, 2} (ख) B = {5, 10, 15} (ग) C = {3, 6, 9}

11. M = {3 ले निः शेष भाग जाने 3 देखि 15 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरू} दिइएको छ । समूह M बाट दुईओटा उपयुक्त र एउटा अनुपयुक्त उपसमूह बनाउनुहोस् । के अनुपयुक्त उपसमूह एकभन्दा बढी बनाउन सकिन्छ ?

12. समूह P = {6 का गुणनखण्डहरू} बाट उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूहहरू निर्माण गरी सङ्केतद्वारा देखाउनुहोस् ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 2

पूर्ण सङ्ख्या
(Whole Number)

2.0 पुनरवलोकन (Review)

तल दिइएको सङ्ख्या चार्ट भर्नुहोस् र निष्कर्ष कक्षामा छलफल गर्नुहोस् :

सङ्ख्या	उक्त सङ्ख्यालाई आफैँले गुणन गर्दा	उक्त सङ्ख्याको वर्ग सङ्ख्या	दुईओटा उस्ता उस्तै गुणनखण्डमध्ये एउटा गुणनखण्ड लिँदा
1	$1 \times 1 = 1$	1	1
2	$2 \times 2 = 4$	4	2
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

- कुनै सङ्ख्यालाई आफैसँग गुणन गर्दा आउने गुणनफललाई वर्ग सङ्ख्या भनिन्छ ।
- कुनै पनि वर्ग सङ्ख्याका दुईओटा उस्ता उस्तै गुणनखण्डहरू हुन्छन् भने ती गुणनखण्डहरूमध्ये एउटालाई त्यस सङ्ख्याको वर्गमूल भनिन्छ । कुनै सङ्ख्याको वर्गमूल (square root) लाई जनाउन '$\sqrt{\ }$' सङ्केतको प्रयोग गरेर लेखिन्छ ।

  जस्तै : $\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$ हुन्छ ।

2.1 सङ्ख्याको वर्ग र वर्गमूल (Square and Square Root of the Number)

क्रियाकलाप 1

1. कुनै एउटा वर्ग सङ्ख्या लिनुहोस्, जस्तै 64
2. अब उक्त सङ्ख्याबाट क्रमशः बिजोर सङ्ख्याहरू 1, 3, 5, 7, 9, 11 घटाउँदै जानुहोस् । जति पटकमा शून्य आउँछ त्यही नै वर्ग हुन्छ ।

$64 - 1 = 63$
$63 - 3 = 60$
$60 - 5 = 55$
$55 - 7 = 48$
$48 - 9 = 39$
$39 - 11 = 28$
$28 - 13 = 15$
$15 - 15 = 0$

कति पटकमा नतिजा शून्य आयो ?

आठौँ पटकमा नतिजा शून्य आएकाले 64 को वर्गमूल 8 हो ।

2.1.1 रूढ खण्डीकरण विधिबाट वर्गमूल (Square root Prime Factorisation Method)

क्रियाकलाप 2

तलको उदाहरण हेरी सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

6 र 36 का रूढ गुणनखण्डहरू निकाल्दा,

$$\begin{array}{r|r} 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$6 = 2 \times 3$ $\qquad$ $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

(क) सङ्ख्या 6 र 36 बिच कस्तो सम्बन्ध छ ?

(ख) सङ्ख्या 6 को रूढ गुणनखण्डहरूमध्ये 2 कतिओटा छ ?

(ग) सङ्ख्या 6 को रूढ गुणनखण्डहरूमध्ये 3 कतिओटा छ ?

(घ) सङ्ख्या 36 को रूढ गुणनखण्डहरूमध्ये 2 र 3 कति कतिओटा छन् ?

(ङ) वर्ग सङ्ख्या र वर्गमूलका रूढ गुणनखण्डहरूमा के फरक पाउनुभयो, निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

अब 36 को वर्गमूल निकाल्दा,

$$= \sqrt{36}$$
$$= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3}$$
$$= \sqrt{2^2 \times 3^3}$$
$$= 2 \times 3$$
$$= 6$$

अतः 36 को वर्गमूल 6 हुन्छ ।

रूढ गुणनखण्ड विधिबाट वर्गमूल निकाल्दा अपनाउनुपर्ने प्रक्रिया :

- दिइएको सङ्ख्याको रूढ गुणनखण्डहरू निकाल्ने
- रूढ गुणनखण्डलाई '√' चिह्न भित्र राख्ने
- जोडा जोडा सङ्ख्यालाई घाताङ्कका रूपमा लेख्ने
- प्रत्येक जोडाको एउटा एउटा सङ्ख्या मूल चिह्न बाहिर लेख्ने र गुणन गर्ने
- प्राप्त गुणनफल नै सो सङ्ख्याको वर्गमूल हुन्छ ।

उदाहरण 1

1225 को रूढ खण्डीकरण विधिबाट वर्गमूल निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ 1225 को रूढ गुणनखण्ड निकाल्दा,

5	1225
5	245
7	49
	7

अब 1225 को वर्गमूल निकाल्दा,

$= \sqrt{1225}$

$= \sqrt{5 \times 5 \times 7 \times 7}$

$= \sqrt{5^2 \times 7^2}$

$= 5 \times 7$

$= 35$

उदाहरण 2

एउटा वर्गाकार सेमिनार हलको क्षेत्रफल 625m² भए त्यसको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ 625 को रूढ गुणनखण्ड निकाल्दा,

5	625
5	125
5	25
	5

अब 625 को वर्गमूल निकाल्दा,

$= \sqrt{625}$

$= \sqrt{5 \times 5 \times 5 \times 5}$

$= \sqrt{5^2 \times 5^2}$

$= 5 \times 5$

$= 25$

अतः उक्त सेमिनार हलको लम्बाइ 25m रहेछ ।

2.1.2 भाग विधिबाट वर्गमूल (Square root by Division Method)

क्रियाकलाप 3

तल दिइएका उदाहरण अवलोकन गरी भाग विधिबाट वर्गमूल निकाल्ने तरिका बारेमा छलफल गर्नुहोस् :

उदाहरण 3

1764 को भाग विधिबाट वर्गमूल निकाल्नुहोस् :

(क) 1764 का अङ्कहरूलाई कसरी जोडी बनाइएको छ ?

(ख) पहिला 4 ले नै किन भाग गरीयो ?

(ग) पुनः 4 को तल 4 लाई राखेर किन जोडियो ?

(घ) के सधैँ भाग गर्दा भाजक र भागफलमा एउटै सङ्ख्या लिनुपर्दछ, निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

	4 2
4	$\overline{17}\ \overline{64}$
+ 4	– 16 ↓
82	1 64
+ 2	–1 64
84	0

तरिका

1. सङ्ख्याको एकको स्थानबाट जोडा जोडा मिलाउँदै जानुपर्छ ।
   जस्तै : $\overline{17}\ \overline{64}$
2. पहिलो जोडा 17 लाई वर्ग सङ्ख्यामा विचार गर्दा 17 भन्दा सानो तर सबैभन्दा ठुलो वर्ग सङ्ख्या 16 हुन्छ । यसको वर्गमूल 4 आउने गरी हि(साब गरीन्छ ।
3. 4 लाई तल माथि राखेर गुणनफल 17 को तलपट्टि राखी घटाउनुपर्दछ । अनि अगाडिको 4 र 4 लाई जोड चिह्न राखी जोड्नुपर्दछ ।
4. शेष आएको 1 सँग अर्को जोडा सङ्ख्याहरू 64 लाई तल झार्नुपर्दछ । अब भाज्य 164 हुन्छ ।
5. अब 82 को दशको स्थानको सङ्ख्याले भाज्य 164 को दशको स्थान र सय स्थानको सङ्ख्या 16 लाई भाग जाने भागफल अनुमान गर्नुपर्छ र नजिकको सङ्ख्याले गुणन गर्नुपर्दछ । यहाँ 16 लाई 8 ले 2 पटक भाग जान्छ ।
6. अब शेष 0 आएकाले 1764 को वर्गमूल 42 हुन्छ ।

उदाहरण 4

95481 को भाग विधिबाट वर्गमूल निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ

	3 0 9
3	9 $\overline{54}$ $\overline{81}$
+ 3	− 9
60	0 54
+ 0	− 0
609	0 54 81
+ 9	− 54 81
618	0

- यहाँ 9 54 81 लाई एकको स्थानबाट जोडी मिलाउँदा 9 $\overline{54}$ $\overline{81}$ हुन्छ ।
- पहिलो पटक 54 झार्नु पर्दछ । तर 6 पछि 0 बाहेक कुनै अङ्क राख्दा 54 लाई भाग गर्न मिल्दैन । त्यसैले 6 को पछि शून्य राखेर भाग गरीसकेपछि 81 लाई झारेर 5481 लाई भाग गरीएको छ ।

अतः 95481 को वर्गमूल 309 हुन्छ ।

उदाहरण 5

$\frac{144}{169}$ को वर्गमूल निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ $\frac{144}{169}$ को वर्गमूल निकाल्दा,

$$= \sqrt{\frac{144}{169}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}{13 \times 13}}$$

$$= \sqrt{\frac{2^2 \times 2^2 \times 3^3}{13^2}}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 3}{13}$$

$$= \frac{12}{13}$$

- अंश र हरको छुट्टाछुट्टै वर्गमूल निकाल्नु पर्दछ ।
- भिन्नको सरल गरी उत्तर लेख्नुपर्दछ ।

उदाहरण 6

के 12675 वर्ग सङ्ख्या हो ? यदि होइन भने 12675 लाई कुन सङ्ख्याले भाग गर्दा भागफल वर्ग सङ्ख्या बन्दछ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

5	12675
5	4225
5	845
13	169
	13

यहाँ $12675 = 3 \times 5 \times 5 \times 13 \times 13$

दुईओटा उस्ता उस्तै सङ्ख्याहरूको जोडी बनाउँदा,

$3 \times 5^2 \times 13^2$

दुईओटा उस्ता उस्तै सङ्ख्याहरूको जोडी बनाउँदा 3 को जोडी छैन । त्यसैले 12675 वर्ग सङ्ख्या होइन । 12675 लाई 3 ले भाग गर्दा आउने सङ्ख्या वर्ग सङ्ख्या बन्दछ ।

अत: आवश्यक सङ्ख्या = 3

अभ्यास 2.1

1. तलका तथ्यहरू ठिक भए ठिक (√) चिह्न र बेठिक भए क्रस (×) चिह्न लगाउनुहोस् ।

(क) कुनै पनि सङ्ख्याको एकको स्थानमा 0, 1, 4, 5, 6 र 9 छन् भने त्यो सङ्ख्या वर्ग सङ्ख्या हुन्छ ।

(ख) वर्गमूल भनेको वर्गको उल्टो क्रिया हो ।

(ग) कुनै पनि वर्ग सङ्ख्याको अन्तमा जोर सङ्ख्यामा शून्यहरू छन् भने त्यो पनि वर्ग सङ्ख्या हुन्छ ।

(घ) 169000 वर्ग सङ्ख्या हो ।

2. तल दिइएका सङ्ख्याका रूढ खण्डीकरण विधिबाट वर्गमूल निकाल्नुहोस् :

(क) 169 (ख) 324 (ग) 1225 (घ) 5625 (ङ) 121×196

3. तल दिइएका सङ्ख्याको भाग विधिबाट वर्गमूल निकाल्नुहोस् :

(क) 2304 (ख) 8836 (ग) 9801 (घ) 11025 (ङ) 95481

4. तल दिइएका भिन्नको वर्गमूल निकाल्नुहोस् :

(क) $\frac{625}{1024}$ (ख) $\frac{49}{81}$ (ग) $\frac{324}{1225}$ (घ) $\frac{1225}{2916}$

5. के 500 वर्ग सङ्ख्या हो ? रूढ खण्डीकरण विधिबाट परीक्षण गर्नुहोस् ।

6. के 325 वर्ग सङ्ख्या हो ? यदि होइन भने कुन सङ्ख्याले गुणन गर्दा 325 लाई वर्ग सङ्ख्या बनाउन सकिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. एउटा वर्गाकार जग्गाको लम्बाइ 37 m भए त्यसको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. एउटा वर्गाकार सेमिनार हलको क्षेत्रफल 729 m^2 भए त्यसको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. सामाजिक शिक्षकले कक्षा 7 का विद्यार्थीलाई हनुमानढोका घुमाउन लानुभएछ । विद्यार्थीहरूले खाएको खाजाको रकम रु. 15625 भएछ । सबै विद्यार्थीहरूले विद्यार्थी सङ्ख्या बराबरको खाजा खाएका रहेछन् भने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. 196 को वर्गमूल कति हुन्छ ? लगातार घटाउने प्रक्रियाबाट पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूले बाढीपीडितको सहयोगका लागि जम्मा रु. 2500 दि(एछन् । प्रत्येक विद्यार्थीले कक्षामा जति विद्यार्थी छन् त्यतिनै दिएका थिए । कक्षामा कति विद्यार्थी रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. 1021 मा कुन सबैभन्दा सानो सङ्ख्या जोड्दा वर्ग सङ्ख्या बन्दछ ? उक्त सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. 18227 बाट कुन सबैभन्दा सानो सङ्ख्या घटाउँदा वर्ग सङ्ख्या बन्दछ ? उक्त सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. के 7200 वर्ग सङ्ख्या हो ? यदि होइन भने 7200 लाई कुन सङ्ख्याले भाग गर्दा भागफल वर्ग सङ्ख्या बन्दछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

तपाइँको विद्यालयका विद्यार्थी सङ्ख्या टिपोट गर्नुहोस् । उक्त सङ्ख्या वर्ग सङ्ख्या हो वा होइन परीक्षण गर्नुहोस् । यदि वर्ग सङ्ख्या होइन भने वर्ग सङ्ख्या बनाउन कुन सङ्ख्याले गुणन गर्नुपर्दछ ? पत्ता लगाउनुहोस् र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (क) 13 (ख) 18 (ग) 35 (घ) 75 (ङ) 154

3. (क) 48 (ख) 94 (ग) 99 (घ) 105 (ङ) 309

4. (क) $\frac{25}{32}$ (ख) $\frac{7}{9}$ (ग) $\frac{18}{35}$ (घ) $\frac{35}{54}$ 5. होइन

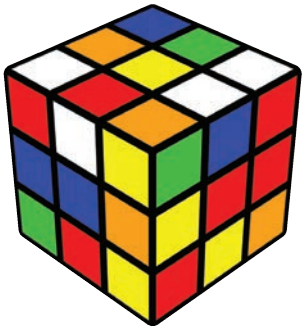
6. होइन, 13 ले गुणन गर्दा वर्ग सङ्ख्या बन्दछ ।

7. 1369 m^2 8. 27 9. 125 10. 14 11. 50 जना

12. 3 13. 2 14. 2

2.4 सङ्ख्याको घन र घनमूल (Cube and Cube Roots)

2.4.0 पुनरवलोकन (Review)



चित्रमा प्रत्येक भुजा 3 cm भएको घनाकार वस्तु दे खाइएको छ । यस वस्तुको आयतन कति हुन्छ ? आयतन निकाल्न के गरीन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ घनाकार वस्तुको आयतन

(v) $= 3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$

$= 27\text{ cm}^3$ हुन्छ ।

तीनओटा उही सङ्ख्याको गुणनफललाई घन सङ्ख्या भनिन्छ, जस्तै : कुनै सङ्ख्या 2 भए 2 को घन सङ्ख्या 2^3 हुन्छ । अर्थात् $2 \times 2 \times 2 = 8$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

सङ्ख्या 5 को घन सङ्ख्या निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ 5 को घन सङ्ख्या $= 5 \times 5 \times 5$

$= 125$ हुन्छ ।

अत: 5 को घन सङ्ख्या $= 125$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

तपाईँको घरमा खानेपानी सञ्चित गर्नका लागि 6 ft लम्बाइ 6 ft चौडाइ र 6 ft उचाइ भएको एउटा ट्याङ्की जमिनमुनि निर्माण गर्न लागिएको छ । उक्त ट्याङ्की निर्माण गर्नका लागि जमिनमुनि कति घन मिटरको खाल्डो आवश्यक पर्ला ?

समाधान

यहाँ 10 को घन सङ्ख्या नै आवश्यक सङ्ख्या हो ।

जमिनमुनिको खाल्डाको आयतन (v) $= 6 \times 6 \times 6$

$= 216\text{ m}^3$

अत: आवश्यक खाल्डाको आयतन 216 घनमिटर हुन्छ ।

2.4.1 रूढ खण्डीकरण विधिबाट सङ्ख्याको घनमूल (Cube Root by Prime Factorisation Method)

क्रियाकलाप 1

तल दिइएको सङ्ख्या चार्ट भर्नुहोस् र निष्कर्षमा छलफल गर्नुहोस् :

सङ्ख्या	उही सङ्ख्यालाई तीन पटक गुणन गर्दा आउने गुणनफल	उक्त सङ्ख्याको घन सङ्ख्या	तीनओटा उस्ता उस्तै गुणनखण्डमध्ये एउटा गुणनखण्ड
1	$1 \times 1 \times 1 = 1$	1	1
2	$2 \times 2 \times 2 = 8$	8	2
3	$3 \times 3 \times 3 = 27$	27	3
4			
5			
6			
7			
8			
9			

कुनै घन सङ्ख्याको तीनओटा उस्तै गुणनखण्डहरूमध्ये एउटालाई उक्त सङ्ख्याको घनमूल भनिन्छ, जस्तै : $8 = 2 \times 2 \times 2$ मा 2 घनमूल हो ।

अर्थात् $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

512 को घनमुल निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ 512 को रूढ गुणनखण्ड निकाल्दा,

$$512 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

अब 512 को घनमूल

$= \sqrt[3]{512}$

$= \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$

$= \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^3}$

$= 2 \times 2 \times 2$

$= 8$

तरिका

- दिइएको सङ्ख्याको रूढ गुणनखण्ड निकाल्ने
- रूढ गुणनखण्डलाई $\sqrt[3]{}$ चिह्नभित्र राख्ने
- तीन तीनओटा सङ्ख्याको एक जोडाका दरले जोडा बनाउने
- प्रत्येक जोडाको एउटा एउटा सङ्ख्या लिने र गुणन गर्ने
- प्राप्त गुणनफल नै सो सङ्ख्याको घनमूल हुन्छ ।

उदाहरण 4

एउटा घनाकार ट्याङ्कीको आयतन 4096 m^3 छ भने सो ट्याङ्कीको उचाइ निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ ट्याङ्कीको आयतन (v) = 4096 m^3

ट्याङ्कीको उचाइ निकाल्नका लागि 4096 को घनमूल निकाल्नुपर्दछ ।

त्यसैले 4096 को घनमूल निकाल्दा,

$= \sqrt[3]{4096}$

$= \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$

$= \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 16$

2	4096
2	2048
2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

अतः उक्त घनाकार ट्याङ्कीको उचाइ 16 m रहेछ ।

उदाहरण 5

के 1323 घन सङ्ख्या हो ? यदि होइन भने 1323 लाई कतिले गुणन गर्दा घन सङ्ख्या बन्दछ, पत्ता लगाउनुहोस् :

3	1323
3	441
3	147
7	49
	7

समाधान

यहाँ $1323 = 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$

$= 3^3 \times 7^2$

1323 का रूढ गुणनखण्डहरूमध्ये 7 दुईओटा मात्र छ । 1323 घन सङ्ख्या हुन अर्को एउटा 7 पनि चाहिन्छ ।

अतः आवश्यक सङ्ख्या 7 हो जसले 1323 लाई गुणन गर्दा गुणनफल घन सङ्ख्या बन्दछ ।

अभ्यास 2.2

1. तल दिइएका सङ्ख्याहरूको घन सङ्ख्या निकाल्नुहोस् :

(क) 7 (ख) 12 (ग) 13 (घ) 15

(ङ) 21 (च) 30 (छ) 42

2. तल दिइएका सङ्ख्याहरूको घनमूल निकाल्नुहोस् ।

(क) 8 (ख) 343 (ग) 1000 (घ) 8000

3. 25 m लम्बाइ भएको एउटा घनाकार कोठाको आयतन कति हुन्छ ?

4. खानेपानी आयोजनाले 27 m लम्बाइ भएको घनाकार ट्याङ्की निर्माण गरेछ । उक्त ट्याङकीको क्षमता कति होला ? ($1\ m^3 = 1000\ l$)

5. के 392 घन सङ्ख्या हो ? यदि होइन भने कुन सङ्ख्याले गुणन गर्दा 392 घन सङ्ख्या हुन्छ ? रूढ खण्डीकरण विधिबाट पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. 1728 घन सङ्ख्या हो वा होइन ? रूढ खण्डीकरण विधिबाट परीक्षण गर्नुहोस् ।

7. प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{27 \times 125}$

8. के 2916 घन सङ्ख्या हो ? यदि होइन भने कुन सङ्ख्याले 2916 लाई भाग गर्दा घन सङ्ख्या बन्दछ ?

9. 3993 लाई कुन सङ्ख्याले भाग गर्दा भागफल घन सङ्ख्या बन्दछ ? उक्त भागफलको घनमूल निकाल्नुहोस् ।

10. 1 देखि 10 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको घन सङ्ख्या निकाल्नुहोस् । तल दिइएअनुसार परीक्षण गर्नुहोस् र लेख्नुहोस् :

(क) के प्राकृतिक बिजोर सङ्ख्याहरूको घन सङ्ख्या पनि बिजोर नै हुन्छ ?

(ख) के प्राकृतिक जोर सङ्ख्याहरूको घन सङ्ख्या पनि जोर सङ्ख्या हुन्छ ?

परियोजना कार्य

हाम्रो दैनिक जीवनमा प्रयोग भइरहेका घन र घन सङ्ख्या सम्बन्धी कम्तीमा पाँचओटा उदाहरण खोजी गरी लेख्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) 343 (ख) 1728 (ग) 2197 (घ) 3375
   (ङ) 9261 (च) 27000 (छ) 74088
2. (क) 2 (ख) 7 (ग) 10 (घ) 20
3. 15625 m^3 4. 19683000 l
5. होइन, 7 ले गुणन गर्दा घन सङ्ख्या हुन्छ । 6. हो ।
   8. 4 9. 3

2.5 महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor)

2.5.0 पुनरवलोकन (Review)

तलको खाली ठाउँ भर्नुहोस् र छलफल गर्नुहोस् :

20 का गुणनखण्डहरू = { ..... }

35 का गुणनखण्डहरू = { ..... }

20 र 35 का साझा गुणनखण्डहरू = { ..... }

20 र 35 का सबैभन्दा ठुलो साझा गुणनखण्ड = ...

20 र 35 को म.स. = { ..... }

दिइएका सङ्ख्याहरूका साझा गुणनखण्डहरूमध्ये सबैभन्दा ठुलो साझा गुणनखण्डलाई महत्तम समापवर्तक भनिन्छ ।

2.5.1 महत्तम समापवर्तक (म.स.) पत्ता लगाउने विधिहरू

तरिका 1

रूढ खण्डीकरण विधि (Prime Factorization Method)

तल दिइएको अवस्थाको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

क्रियाकलाप 1

हरिमायाले उनको आफ्नो जन्मदिनमा 30 ओटा स्याउ र 40 ओटा केरा वृद्धाश्रममा रहनुभएका आमाबुबाहरूलाई बाँड्ने सोच गरीछन् ।

(क) उनले बढीमा कति जनालाई बराबर सङ्ख्यामा स्याउ र केरा बाड्न सक्लिन् ?

(ख) प्रत्येकले कति कतिओटा पाउलान् ?

(ग) यो पत्ता लगाउने गणितीय प्रक्रिया के होला ?

यसका लागि दिइएका सङ्ख्याहरू 30 र 40 लाई निःशेष भाग जाने सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुपर्ने हुन्छ ।

2	30
3	15
	5

2	40
2	20
2	10
	5

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$30 \div 10 = 3$

$40 \div 10 = 4$

साझा गुणनखण्ड $= 2 \times 5 = 10$

30 र 40 लाई निःशेष भाग जाने सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या 10 हो । त्यसैले हरिमायाले 10 जनालाई बराबर सङ्ख्यामा स्याउ र केरा बाँड्न सक्छिन् । प्रत्येक 10 जनालाई 3/3 ओटा स्याउ र 4/4 ओटा केरा बाँड्न सक्छिन् ।

दिइएका सङ्ख्याहरूलाई निःशेष भाग जाने सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या म.स. हो ।

उदाहरण 1

सङ्ख्याहरू 100, 125 र 200 को रूढ खण्डीकरण विधिबाट म.स. निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ

2	100
2	50
5	25
	5

5	125
5	25
	5

2	200
2	100
2	50
5	25
	5

$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$125 = 5 \times 5 \times 5$

$200 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

साझा गुणनखण्डहरू = 5×5 = 25

अत: म.स. = 25 हुन्छ ।

- दिइएका सङ्ख्याहरूको रूढ गुणनखण्डहरू निकाल्नुहोस् ।
- तीमध्ये साझा रूढ गुणनखण्डहरू लिनुहोस् ।
- साझा रूढ गुणनखण्डहरूको गुणनफल निकाल्नुहोस् ।
- सोही गुणनफल नै म.स. हो ।

तरिका 2

भाग विधिबाट म.स. (H.C.F. by Division Method)

क्रियाकलाप 2

ठुला ठुला सङ्ख्याहरू दिइएको अवस्थामा भाग विधिबाट म.स. निकाल्नु उपयुक्त मानिन्छ। यस विधिमा दिइएका सङ्ख्याहरूमध्ये सानो सङ्ख्याले ठुलो सङ्ख्यालाई भाग गर्दै जानुपर्दछ ।

तल दिइएका उदाहरणको अवलोकन गरी भाग विधिबाट म.स. निकाल्ने तरिकाका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

सङ्ख्याहरू 60, 72 र 108 लाई नि:शेष भाग जाने सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या कुन हो ?

यहाँ

```
60) 72 (1
   – 60
     12) 60 (5
        – 60
           0
```

60 र 72 को म.स. = 12 छ ।

अब 12 ले तेस्रो सङ्ख्या 108 लाई भाग गर्दा,

```
12) 108 (9
   – 108
      0
```

अतः 60, 72 र 108 लाई भाग जाने सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या 12 हो ।

तरिका

- दिइएका सङ्ख्याहरूमध्ये सबैभन्दा सानोले अर्को सङ्ख्यालाई भाग गर्नुहोस् । (भाजकभन्दा सानो शेष नआएसम्म)
- शेषले भाज्यलाई भाजक मानी भाग गर्दै जानुहोस् ।
- अब दुईओटा सङ्ख्याको म.स.ले तेस्रो सङ्ख्यालाई भाग गर्नुहोस् ।

उदाहरण 2

125 ओटा सुन्तला, 150 ओटा मौसम र 225 ओटा अम्बा बढीमा कति विद्यार्थीलाई बराबर गरी बाँड्न सकिन्छ ? प्रत्येकले हरेक फलफूल कति कतिओटा प्राप्त गर्छन् होला, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

आवश्यक सङ्ख्या 125, 150 र 225 को म.स. हुन्छ । म.स.ले प्रत्येक सङ्ख्यालाई भाग गर्दा आउने भागफल नै विद्यार्थीले बराबर पाउने फलफूलको सङ्ख्या हुन्छ ।

यहाँ 125 र 150 को म.स. निकाल्दा,

```
125) 150 (1
    – 125
      25) 125 (5
        – 125
            0
```

अब भाजक 25 र अर्को सङ्ख्या 225 को म.स. निकाल्दा,

```
25) 225 (5
   – 225
       0
```

∴ म.स 25 हुन्छ ।

अतः 125 ओटा सुन्तला, 150 ओटा मौसम र 225 ओटा अम्बा बढीमा 25 जना विद्यार्थीहरूलाई बराबर गरी बाँड्न सकिन्छ ।

प्रत्येकले 125 ÷ 25 = 5 ओटा सुन्तला,

150 ÷ 25 = 6 ओटा मौसम र 225 ÷ 25 = 9 ओटा अम्बा पाउँछन् ।

उदाहरण 3

त्यो सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्, जसबाट 10 घटाउँदा आउने घटाउफलले 558, 700 र 840 लाई निःशेष भाग जान्छ :

समाधान

यहाँ 588, 700 र 840 को म.स.नै आवश्यक सङ्ख्याबाट 10 घटाउँदा आउने घटाउफल हो ।

त्यसैले 588, 700 र 840 को म.स. निकाल्दा,

```
588) 700 (1
   – 588
     112) 588 (5
        – 560
          28) 112 (4
            – 112
                0
```

फेरि

```
28) 840 (30
  – 840
      0
```

588, 700 र 840 को म.स. = 28

आवश्यक सङ्ख्या = x (मानौँ)

प्रश्नअनुसार,

$x - 10 = 28$

अथवा $x = 28 + 10$

अथवा $x = 38$

अतः आवश्यक सङ्ख्या = 38 हो ।

अभ्यास 2.3

1. तल दिइएका सङ्ख्याहरूको रूढ खण्डीकरण विधिबाट म.स. निकाल्नुहोस् :

(क) 21 र 28 (ख) 26 र 52

(ग) 9, 18, र 36 (घ) 12, 18 र 36

2. तल दिइएका सङ्ख्याहरूको भाग विधिबाट म.स. निकाल्नुहोस् :

(क) 144 र 312 (ख) 500 र 625 (ग) 120, 320 र 480

(घ) 80, 90 र 120 (ङ) 144, 384 र 432

3. 72 ओटा कापी र 99 ओटा सिसाकलम बढीमा कति जनालाई बराबर हुने गरी बाँड्न सकिएला ? प्रत्येकले कति कतिओटा कापी र सिसाकलम पाउँछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा संस्थाले कोभिडको राहतमा 125 kg दाल 150 kg गेडागुडी र 275 kg चामल बाँडेछ । यी रासनहरू बढीमा कति परिवारलाई बराबर हुने गरी बाँड्न सकिएला ? प्रत्येक परिवारले कति कति के.जी. दाल, गेडागुडी र चामल पाउलान, पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा संस्थाले बाढीपीडितको राहतमा 80 ओटा कम्बल, 90 ओटा स्विटर र 120 ओटा न्यानो ज्याकेट वितरणका लागि व्यवस्था गरेछ । ती बढीमा कति परिवारलाई बराबर भाग लाग्ने गरी बाँड्न सकिन्छ ? प्रत्येक परिवारले हरेक कपडा कति कति सङ्ख्यामा प्राप्त गर्छन् होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. प्रविणले आफ्नो जन्मदिनको अवसरमा 60 ओटा स्याउ, 72 ओटा सुन्तला र 108 ओटा केरा वृद्धाश्रममा लगेर बाँडेछन् । उक्त फलफूलहरू बढीमा कति जनालाई बराबर गरी बाँडेहोला ? प्रत्येकले हरेक फलफूल कति कतिओटा प्राप्त गरेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. 275, 440 र 715 लाई निःशेष भाग जाने सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या कुन हो ?

8. त्यो सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्, जसमा 5 जोड्दा आउने योगफलले 225, 357 र 525 लाई निःशेष भाग जान्छ ।

उत्तर

1. (क) 7 (ख) 6 (ग) 9 (घ) 6
2. (क) 24 (ख) 125 (ग) 40 (घ) 10 (ङ) 48
3. 9 जनालाई, 8 ओटा कापी 11 ओटा सिसाकलम
4. 25 परिवार, 5 kg दाल, 6 kg गेडागुडी, 11 kg चामल
5. 10 परिवार, 8 ओटा कम्बल, 9 ओटा स्वेटर र 12 ओटा ज्याकेट
6. 12 जनालाई, स्याउ 5 ओटा, सुन्तला 6 ओटा, केरा 9 ओटा
7. 55 8. 70

2.6 लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple)

2.6.0 पुनरवलोकन (Review)

क्रियाकलाप 1

तलको खालि ठाउँ भर्नुहोस् र समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) सङ्ख्या 6 का अपवर्त्यहरूको समूह = { ... }

सङ्ख्या 8 का अपवर्त्यहरूको समूह = { ... }

सङ्ख्याहरू 2 र 8 का साझा अपवर्त्यहरूको समूह = { ... }

सङ्ख्याहरू 6 र 8 का सबैभन्दा सानो साझा अपवर्त्य = ...

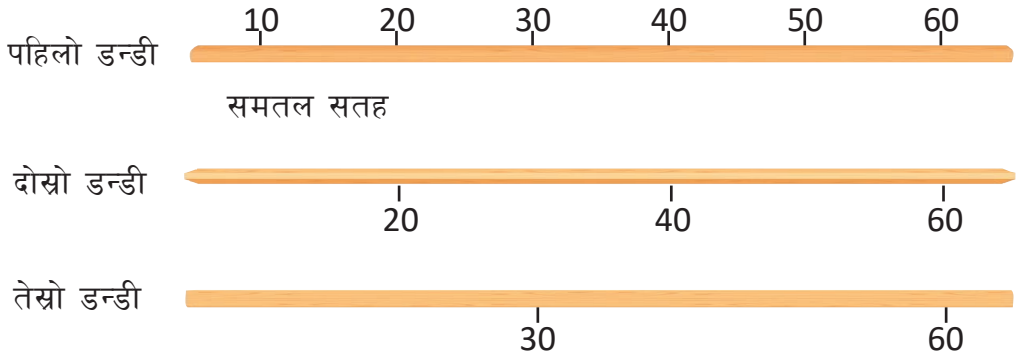
(ख) के सङ्ख्याहरू 6 र 8 ले सबैभन्दा सानो साझा अपवर्त्यलाई निःशेष भाग जान्छ ? भाग गरी हेर्नुहोस् ।

दुई वा दुईभन्दा बढी सङ्ख्याहरूको ल.स. भनेको ती सङ्ख्याहरूले निःशेष भाग जाने सबैभन्दा सानो सङ्ख्या हो ।

क्रियाकलाप 2

चित्रमा 10 cm, 20 cm र 30 cm लम्बाइ भएका तीनओटा डन्डीहरू छन् ।

यी तीनओटै डन्डीहरूले समतल सतहमा सँगसँगै नाप्दै जाँदा नाप्न मिल्ने सबैभन्दा छोटो दुरी कति सेन्टिमिटर हुन्छ ? यो दुरीले के लाई जनाउँछ, छलफल गर्नुहोस् ।



M_{10} = {10, 20, 30, 40, 50, 60, ...}
M_{20} = {20, 40, 60, ...}
M_{30} = {30, 60, ...}

तीनओटै डन्डीले नाप्दा आउने एउटै सबैभन्दा छोटो दुरी 60 cm छ । यसलाई ल.स. भनिन्छ ।

अतः ल.स. = 60 cm हुन्छ ।

2.6.1 लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) पत्ता लगाउने विधिहरू

तरिका 1

रूढ खण्डीकरण विधिबाट ल.स. (L.C.M. by Prime factorization Method)

क्रियाकलाप 1

दिइएका उदाहरण अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

उदाहरण 1

18, 24 र 36 का रूढ गुणनखण्ड विधिबाट ल.स. निकाल्नुहोस् ।

(क) सङ्ख्याहरू 18, 24 र 36 का रूढ गुणनखण्डहरू निकाल्नुहोस् ।

(ख) ती मध्ये सबै सङ्ख्याहरूको साझा गुणनखण्ड निकाल्नुहोस् ।

(ग) अब दुई दुईओटा सङ्ख्याहरूको साझा गुणनखण्डहरू पनि लिनुहोस् ।

(घ) बाँकी रूढ गुणनखण्डहरू पनि लिनुहोस् ।

(ङ) साझा र बाँकी रूढ गुणनखण्डहरूको गुणनफल निकाल्नुहोस् ।

(च) उक्त गुणनफललाई के भनिन्छ, निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

2	18
3	9
	3

2	24
2	12
2	6
	3

2	36
2	18
3	9
	3

18 का गुणनखण्डहरू = 2 × 3 × 3

24 का गुणनखण्डहरू = 2 × 2 × 2 × 3

36 का गुणनखण्डहरू = 2 × 2 × 3 × 3

सङ्ख्याहरू : 18, 24 र 36 का साझा गुणनखण्डहरू = 2 × 3 = 6

सङ्ख्याहरू : 18 र 36 का साझा गुणनखण्डहरू = 3

सङ्ख्याहरू : 24 र 36 का साझा गुणनखण्डहरू = 2

बाँकी गुणनखण्डहरू = 2

ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्डहरू

= 6 × 3 × 2 × 2

= 72

अतः सङ्ख्याहरू 18, 24 र 36 को ल.स. = 72

तरिका 2

भाग विधिबाट ल.स. (L.C.M. by division method)

सङ्ख्याहरू 18, 24 र 36 लाई एकै ठाउँमा राखी रूढ खण्डीकरणको प्रक्रियाअनुसार निम्नलिखित तरिकाबाट पनि ल.स. निकाल्न सकिन्छ :

समाधान

यहाँ

2	18, 24, 36
3	9, 12, 18
3	3, 4, 6
2	1, 4, 2
	1, 2, 1

$\therefore$ ल.स $= 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$

$= 72$

तरिका

- दिइएका सबै सङ्ख्याहरूलाई पङ्क्तिमा अर्धविराम राखेर लेख्नुहोस् ।
- सबैभन्दा सानो साझा रूढ गुणनखण्डद्वारा भाग गर्दै जानुहोस् ।
- दिइएका सङ्ख्याहरूमध्ये कम्तीमा दुईओटालाई पूर्ण रूपमा रूढ गुणनखण्ड नआएसम्म भाग गर्दै जानुहोस् ।
- सबै भाजक रूढ गुणनखण्डहरू र अन्तिम पङ्क्तिका बाँकी सङ्ख्याहरूको गुणनफल निकाल्नुहोस् । यहि गुणनफल नै दिइएका सङ्ख्याहरूको ल.स. हुन्छ ।

उदाहरण 2

24, 36 र 56 ले ठिक भाग जाने सबैभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ दिइएका सङ्ख्याहरूले ठिक भाग जाने सबैभन्दा सानो सङ्ख्या ती सङ्ख्याहरूको ल.स. हुन्छ ।

24, 36 र 56 को ल.स. निकाल्दा,

2	24, 36, 56
2	12, 18, 28
2	6, 9, 14
3	3, 9, 7
	1, 3, 7

$\therefore$ ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$

$= 504$

अतः 24,36 र 56 ले ठिक भाग जाने सबैभन्दा सानो सङ्ख्या 504 हुन्छ ।

उदाहरण 3

गणित शिक्षकले कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूलाई पहिलो 3/3 जनामा, दोस्रो 5/5 जनामा र तेस्रो 6/6 जनामा समूह बनाएर प्रयोगात्मक कार्य दिने सोच बनाउनुभएछ । कम्तीमा कति जना विद्यार्थीहरू भएमा प्रत्येक कार्यमा बाँकी नहुने गरी समूह बनाउन सकिएला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ आवश्यक समूह सङ्ख्या भन्नाले प्रत्येक समूहका विद्यार्थी सङ्ख्याहरू 3, 5 र 6 को ल.स. हुन्छ ।

अब 3, 5 र 6 को ल.स. निकाल्दा,

3	3, 5, 6
	1, 5, 2

$\therefore$ ल.स. $= 3 \times 5 \times 2$

$= 30$

अतः कम्तीमा 30 जना विद्यार्थी भएमा क्रमशः पहिलो 3/3 जना, दोस्रो 5/5 जना र तेस्रो 6/6 जनामा समूह बनाएर प्रयोगात्मक कार्य गर्न सकिन्छ ।

उदाहरण 4

त्यो सबैभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्, जसबाट 5 घटाउँदा आउने घटाउफललाई 18, 24 र 36 ले निःशेष भाग जान्छ ।

समाधान

यहाँ 18, 24 र 36 को ल.स. नै आवश्यक सङ्ख्याबाट 5 घटाउँदा आउने सङ्ख्या हो ।

त्यसैले, 18, 24 र 36 को ल.स. निकाल्दा,

2	18, 24, 36
3	9, 12, 18
3	3, 4, 6
2	1, 4, 2
	1, 2, 1

$\therefore$ ल.स. $= 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$

$= 72$

प्रश्नअनुसार, आवश्यक सङ्ख्या = x मानौँ ।

$x - 5 = 72$

अथवा $x = 72 + 5$

अथवा $x = 77$

अत: आवश्यक सङ्ख्या 77 हो ।

उदाहरण 5

त्यो सबैभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्, जसमा 5 जोड्दा आउने योगफललाई 32, 64 र 192 ले ठिक भाग जान्छ ।

समाधान

यहाँ 32, 64 र 192 को ल.स. नै आवश्यक सङ्ख्यामा 5 जोड्दा आउने सङ्ख्या हो ।

त्यसैले 32, 64 र 192 को ल.स. निकाल्दा,

2	32, 64, 192
2	16, 32, 96
2	8, 16, 48
2	4, 8, 24
2	2, 4, 12
2	1, 2, 6
	1, 1, 3

$\therefore$ ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$= 192$

आवश्यक सङ्ख्या = x मानौँ ।

त्यसैले प्रश्नअनुसार,

$x + 5 = 192$

अथवा $x = 192 - 5$

अथवा $x = 187$

अत: आवश्यक सानो सङ्ख्या 187 हो ।

उदाहरण 6

दुईओटा घन्टीहरू क्रमशः 45 मिनेट र 60 मिनेटको अन्तरमा बज्छन्। यदि दुवै घन्टीहरू पहिलो पटक एकैसाथ बिहान 10:00 मा बजे भने दोस्रो पटक कति समयपछि एकैसाथ बज्लान्, पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ यसका लागि 45 र 60 को ल.स. निकाल्नुहोस् :

$$\begin{array}{r|l} 5 & 45, 60 \\ \hline 3 & 9, \ 12 \\ \hline & 3, \ 4 \end{array}$$

∴ ल.स. $= 5 \times 3 \times 3 \times 4$

$= 180$ मिनेट

$= 3$ घण्टा

दोस्रो पटक एकैसाथ घन्टी बज्ने समय = 10 बजे + 3 घण्टा

= 1:00 बजे

अभ्यास 2.4

1. तल दिइएका सङ्ख्याहरूको रूढ खण्डीकरण विधिबाट ल.स. निकाल्नुहोस्।

(क) 28, 42, र 56 (ख) 3, 11, 33

(ग) 6, 15 र 21 (घ) 20, 36 र 44

(ङ) 50, 75 र 125 (च) 210, 280 र 420

2. 42, 49 र 63 ले ठिक भाग जाने सबैभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

3. त्यो सबैभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्, जसबाट 10 घटाउँदा आउने घटाउफललाई 15, 20, 45 ले निःशेष भाग जान्छ।

4. त्यो सबैभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्, जसमा 3 जोड्दा आउने योगफललाई 8, 12 र 14 ले ठिक भाग लाग्छ।

5. खेलकूद शिक्षकले विद्यार्थीहरूलाई पहिलो खेलमा 15/15 दोस्रो खेलमा 20/20 जना र तेस्रो खेलमा 25/25 जनाको समूह बनाउनुभयो । कम्तीमा कति जना विद्य(ार्थीहरू भएमा प्रत्येक खेलमा कोही बाँकी नहुने गरी समूह बनाउन सकिएला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. तीनओटा घडीहरूका आलाम क्रमशः 10, 15 र 20 मिनेटको अन्तरमा बज्दा रहेछन् । सबै घडीको आलाम बिहान 10 बजे एकैसाथ बजेछन् । अब अर्को कुन समयमा पुनः तीनओटै घडीहरू एकैसाथ बज्लान, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

3 एकाइ, 11 एकाइ र 33 एकाइ बराबरको कागजको स्ट्रिप निर्माण गरी वा डन्डी लिएर 3, 11 र 33 को ल.स. कति हुन्छ, लेखाउनुहोस् र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) 168 (ख) 33 (ग) 210 (घ) 1980
   (ङ) 750 (च) 840
2. 882 3. 190 4. 165 5. 300 6. 11 बजे

पाठ 3

पूर्णाङ्क
(Integers)

3.0 पुनरवलोकन (Review)

तल दिइएका अवस्थाहरूको अध्ययन गरी समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क)

सङ्ख्या रेखामा –2, 0 र 2 लाई B, D र F ले जनाएको छ । A, C, G र I ले कुन कुन पूर्णाङ्कलाई जनाउँछ ?

(ख) पूर्णाङ्कहरू 8, –2, 3, 0 र –6 लाई सङ्ख्या रेखामा कसरी देखाइन्छ ?

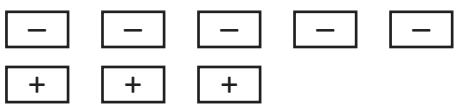
(ग) कुनै एउटा बिन्दुलाई उद्‌गम बिन्दु मानेर उक्त बिन्दुदेखि 5 एकाइ दायाँको स्थान A र 5 एकाइ बायाँको स्थान B लाई सङ्ख्या रेखामा कसरी देखाउन सकिन्छ ?

3.1 पूर्णाङ्कको जोड (Addition of Integers)

क्रियाकलाप 1

- दुई फरक फरक रङका आयताकार कागजका टुक्राहरू लिनुहोस् । एउटा रङका कागजका टुक्राहरूमा '+' चिह्न लेख्नुहोस् । दोस्रो रङका कागजका टुक्राहरूमा '–' चिह्न लेख्नुहोस् ।
- पूर्णाङ्कको समूहबाट कुनै दुईओटा सङ्ख्या लिनुहोस् र योगफल कति हुन्छ ? कागजका टुक्राहरूबाट हेर्नुहोस् ।

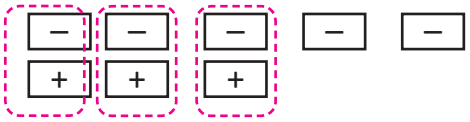
  जस्तै : (-5) + (+3)



5 ओटा '–'

3 ओटा '+'

- अब '+' लेखिएको र '–' लेखिएको कागजका टुक्राहरूलाई जोडी बनाएर हटाउनुहोस् ।



2 ओटा '–' चिह्न भएका कागजका टुक्राहरू बाँकी रहेका छन् ।

त्यसैले, (–5) + (+3) = –2 भयो ।

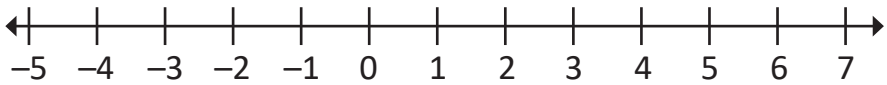
क्रियाकलाप 2

सङ्ख्या रेखाको माध्यमबाट पूर्णाङ्कको जोड

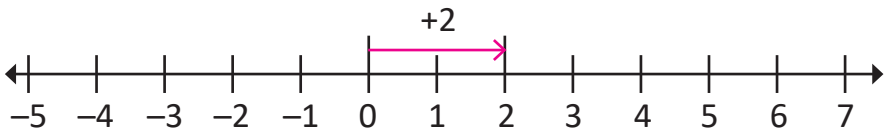
तल दिइएका सङख्या रेखाको अवलोकन गरी समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) (+2) + (+4) = ?

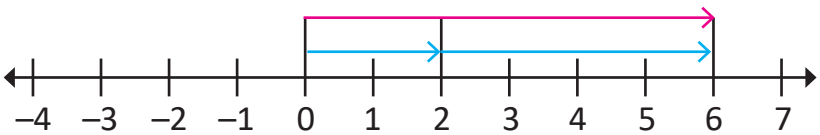
(अ) सङ्ख्या रेखा बनाउनुहोस् ।



(आ) उद्गम बिन्दु (शून्य)बाट २ एकाइ दायाँ जानुहोस् ।



(इ) अब, उक्त बिन्दुबाट पुनः 4 एकाइ दायाँतर्फ जानुहोस् ।



(ई) कुन सङ्ख्यामा पुग्नुभयो ? टिपोट गर्नुहोस् ।

अतः (+2) + (+4) = (6) हुन्छ ।

(ख) (+6) + (–2) = ?

उद्गम बिन्दुबाट 6 एकाइ दायाँ र सो बिन्दुबाट 2 एकाइ बायाँ फर्कदा कुन बिन्दुमा पुगिन्छ ? सङ्ख्या रेखा बनाएर टिपोट गर्नुहोस् ।

(ग) (+2) + (–7) = ?

उद्गम बिन्दुबाट 2 एकाइ दायाँ र सो बिन्दुबाट 7 एकाइ बायाँ फर्कदा कुन बिन्दुमा पुगिन्छ ? सङ्ख्या रेखा बनाएर टिपोट गर्नुहोस् ।

(घ) (–3) + (–5) = ?

उद्गम बिन्दुबाट 3 एकाइ बायाँ र सो बिन्दुबाट पुनः 5 एकाइ बायाँ नै जाँदा कुन बिन्दुमा पुगिन्छ ? सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् ।

पूर्णाङ्कको जोडको नियमहरू (Laws of Addition of Integerss)

I. बन्दी नियम (Closure Law)

पूर्णाङ्कको समूह {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...} बाट कुनै दुईओटा सङ्ख्याहरू लिनुहोस् । उक्त सङ्ख्याहरूको योगफल निकाल्नुहोस् । नतिजा के आउँछ ? छलफल गर्नुहोस् ।

जस्तै : $0 + 1 = 1$

$-2 + 1 = -1$

$-2 - 3 = -5$

कुनै पनि दुईओटा पूर्णाङ्कहरूको योगफल पूर्णाङ्क नै हुन्छ ।

यदि a र b कुनै दुईओटा पूर्णाङ्कहरू भए a + b पनि पूर्णाङ्क नै हुन्छ । यसलाई बन्दी नियम भनिन्छ ।

II. क्रम विनियम नियम (Commutative Law)

पूर्णाङ्कको समूहबाट कुनै दुईओटा सङ्ख्याहरू लिनुहोस् । उक्त सङ्ख्याहरूको क्रम परिवर्तन गरी योगफल निकाल्नुहोस् । नतिजा के आउँछ, छलफल गर्नुहोस् ।

जस्तै : $2 + 3 = 3 + 2 = 5$

$-1 + 1 = 1 - 1 = 0$

$-2 + (-3) = (-3) + (-2) = -5$

पूर्णाङ्कहरूलाई जुनसुकै क्रममा राखेर योगफल निकाल्दा पनि परिणाम एउटै पूर्णाङ्क आउँछ ।

कुनै दुईओटा पूर्णाङ्कहरू a र b भए a + b = b + a हुन्छ । यसलाई क्रम बिनियम नियम भनिन्छ ।

III. सङ्घीय नियम (Associative Law)

पूर्णाङ्कको समूहबाट कुनै पनि तीनओटा सङ्ख्याहरू लिनुहोस् । ती सङ्ख्याहरूलाई जुनसुकै क्रममा राखेर पहिला दुईओटा पूर्णाङ्कलाई जोडेर आएको जोडफलमा तेस्रो पूर्णाङ्क जोड्नुहोस् । नतिजा के आउँछ, छलफल गर्नुहोस् ।

जस्तै:

– 3, –2 र –5 मा

$[(-3) + (-2)] + (-5) = (-3) + [(-2) + (-5)]$

$-5 - 5 = -3 - 7$

$\therefore\ -10 = -10$

यदि a, b र c कुनै पूर्णाङ्क भए $(a + b) + c = a + (b + c)$ हुन्छ, यसलाई सङ्घीय नियम भनिन्छ ।

IV. जोडको विपरीत परिमाण (Additive Inverse Quantity)

$-5 + (+5) = ?$

$(+2) + (-2) = ?$ छलफल गर्नुहोस् ।

कुनै दुईओटा पूर्णाङ्कहरू जोड्दा योगफल शून्य (0) हुन्छ भने त्यसलाई जोडको विपरीत परिणाम भनिन्छ ।

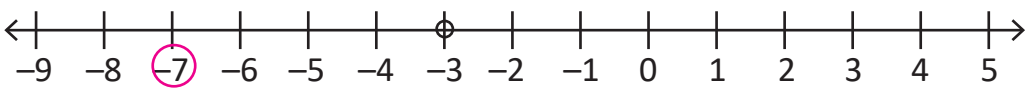
कुनै पनि पूर्णाङ्क a को लागि ऋणात्मक पूर्णाङ्क (–a) हुन्छ, जहाँ, $a + (-a) = (-a) + a = 0$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

–3 को 4 एकाइ बायाँ पर्ने पूर्णाङ्क लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ



–3 बाट 4 एकाइ बायाँ पर्ने पूर्णाङ्क (–7) हो ।

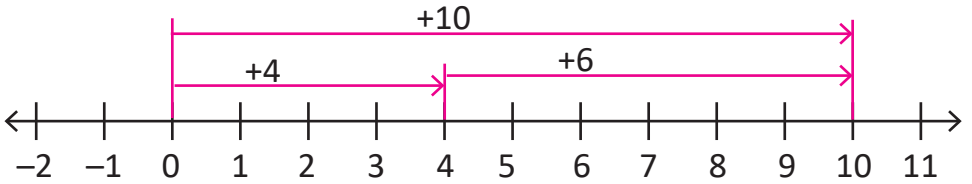
उदाहरण 4

सङ्ख्या रेखाको प्रयोग गरी जोड गर्नुहोस् :

(क) (+4) + (+6)

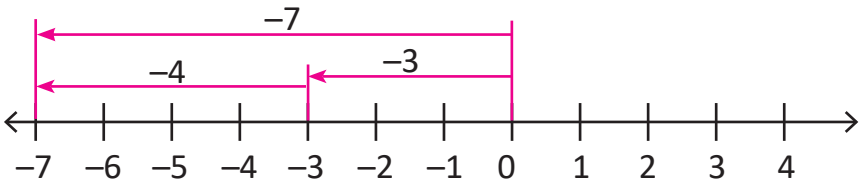
समाधान

यहाँ



अत: (+4) + (+6) = +10 हुन्छ ।

(ख) (–3) + (–4)



अत: (–3) + (–4)

= –3 –4

= –7 हुन्छ ।

उदाहरण 3

पूर्णाङ्कहरू (–7), (–2) र (+6) बाट सङ्घीय नियमको परीक्षण गर्नुहोस् :

समाधान

यहाँ

(–7) + (–2) + (+6)

= [(–7) + (–2)] + (+6)

= –9 + 6

= –3

फेरि

(–7) + [(–2) + (+6)]

= (–7) + (+4)

= –7 + 4

= –3

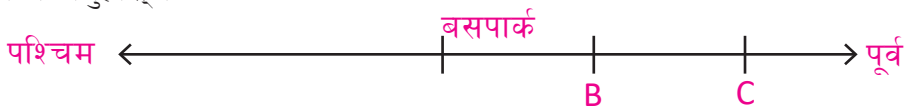
अत: [(–7) + (–2)] + (+6) = (–7) + [(–2) + (+6)] = –3

3.2 पूर्णाङ्कको घटाउ (Substraction of Integers)

क्रियाकलाप 3

राम बसपार्कबाट 20 km पूर्वमा रहेको स्थान C मा गए । फेरि उही बाटो हुँदै स्थान C बाट 13 km पश्चिममा पर्ने स्थान B मा फर्किए ।

यदि बसपार्कलाई उद्‌गमबिन्दु, पूर्वतिरको दुरीलाई धणात्मक मान लिने हो भने राम बसपार्कबाट कति किलोमिटर टाढा छन् ? दिइएको सङ्ख्या रेखाको अवलोकन गरी छलफल गर्नुहोस् ।

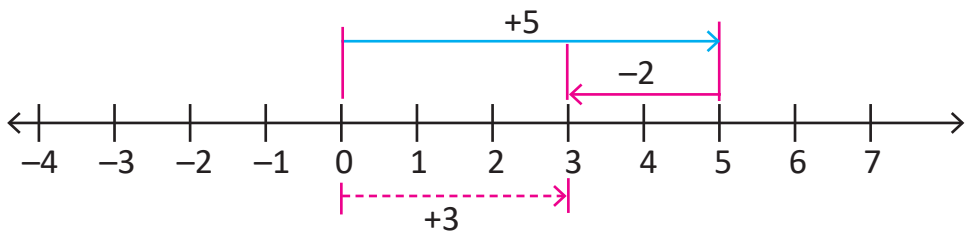


क्रियाकलाप 4

तल दिइएका सङ्ख्या रेखाहरूबाट पूर्णाङ्कका घटाउका उदाहरणहरूको अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

I. (+5) – (+2) = ?

शून्य (0) बाट 5 एकाइ दायाँ गएर पुनः 2 एकाइ बायाँ फर्कदा कुन बिन्दुमा पुगिन्छ ? सङ्ख्या रेखाबाट टिपोट गर्नुहोस् ।

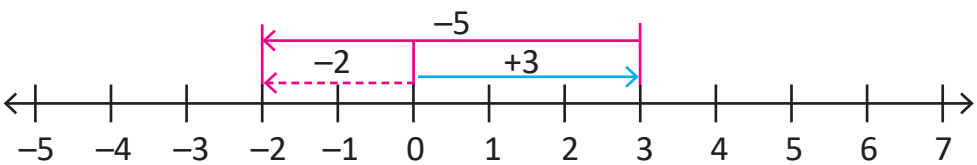


3 एकाइ दायाँ अर्थात् (+3) मा पुगिन्छ ।

अतः (+5) – (+2) = (+3) हुन्छ ।

II. (+3) – (+5) = ?

उद्‌गम बिन्दु (0) बाट 3 एकाइ दायाँ जानुहोस् । पुनः उक्त बिन्दुबाट 5 एकाइ बायाँतर्फ फर्कनुहोस् । कुन बिन्दुमा पुगिन्छ ? सङ्ख्या रेखा बनाएर छलफल गर्नुहोस् ।



2 एकाइ बायाँ अर्थात् (–2) मा पुगिन्छ ।

अतः (+3) – (+5) = (–2) हुन्छ ।

उदाहरण 4

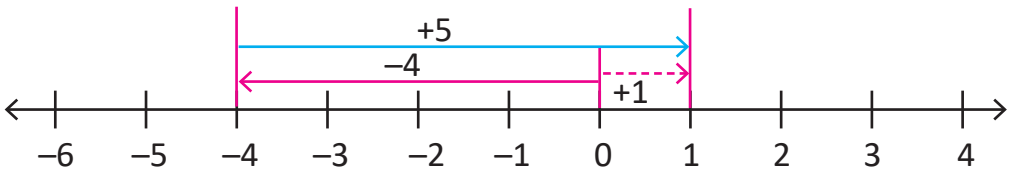
(क) (–4) – (–5) लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ (–4) – (–5)

= (–4) +5

= 1



अतः (–4) – (–5) = +1 हुन्छ ।

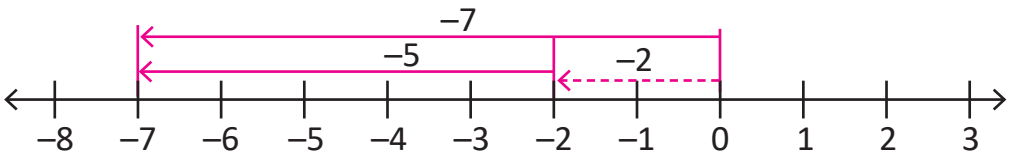
(ख) (–2) – (+5) लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ (–2) – (+5)

= –2 – 5

= –7



अतः (–2) – (+5) = –7 हुन्छ ।

उदाहरण 5

सरल गर्नुहोस् :

(+250) + (–275) – (+148) + (+207) – (175)

समाधान

यहाँ (+250) + (–275) – (+148) + (+207) – (175)

= 250 – 275 – 148 + 207 – 175

= (–25) + 59 – 175

= –25 + 59 – 175

= 34 – 175

= –141

3.3 पूर्णाङ्कको निरपेक्षमान (Absolute value of Integers)

तल दिइएको सङ्ख्या रेखाको अवलोकन गरी छलफल गर्नुहोस् :

यहाँ उद्‌गम बिन्दु बसपार्क हो । बसपार्कबाट 4 km दायाँ स्थान A छ भने 4 km बायाँ स्थान B छ ।

स्थान A देखि B सम्मको दुरी कति छ ?

के 4km + (–4) km = 0 हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

स्थान A देखि B सम्मको दुरी 4 km + 4 km = 8 km हुन्छ । दुरी कहिल्यै पनि ऋणात्मक हुँदैन । त्यसैले –4 र +4 दुवैको निरपेक्ष मान 4 हुन्छ । –4 र 4 विमूख पूर्णाङ्क हुन् ।

कुनै पनि पूर्णाङ्कको धनात्मक साङ्ख्यिक मानलाई निरपेक्षमान भनिन्छ । त्यसैले, |+a| = |–a| = a हुन्छ ।

कुनै पूर्णाङ्क सङ्ख्या रेखाको उद्‌गम बिन्दु शून्यबाट जति दुरीमा छ ठिक त्यति नै दुरीमा रहेको अर्को विपरीत दिशाको पूर्णाङ्कलाई त्यो पूर्णाङ्कको विमुख भनिन्छ ।

अभ्यास 3.1

1. तल दिइएका पूर्णाङ्कहरूको 8 एकाइ दायाँ पर्ने पूर्णाङ्क लेख्नुहोस् :

(क) (–2) (ख) (–6) (ग) 0 (घ) (+3) (ङ) (+5)

2. तल दिइएका पूर्णाङ्कहरूका 8 एकाइ बायाँ पर्ने पूर्णाङ्क लेख्नुहोस् :

(क) (–3) (ख) (–4) (ग) 0 (घ) (+2) (ङ) (+7)

3. तल दिइएका पूर्णाङ्कहरूका विमूख पूर्णाङ्क लेख्नुहोस् :

(क) (+3) (ख) (+4) (ग) (–8) (घ) 0 (ङ) (–2)

4. तल दिइएका पूर्णाङ्कहरूका निरपेक्ष मान लेख्नुहोस् :

(क) |+10| (ख) |–6| (ग) |–5| (घ) |+4| (ङ) |–9|

5. सङ्ख्या रेखाको प्रयोग गरी योगफल निकाल्नुहोस् :

(क) (+3) + (+4) (ख) (–4) + (–3)

(ग) (+5) + (–2) (घ) (–5) + (+2)

6. सङ्ख्या रेखाको प्रयोग गरी घटाउनुहोस् :

(क) (–8) – (–3) (ख) (+9) – (–4)

(ग) (+4) – (+5) (घ) (+7) – (+2)

7. क्रम विनियम नियमको प्रयोग गरी दुवै तरिकाले तल दिइएका पूर्णाङ्कहरूको योगफल निकाल्नुहोस् :

(क) (+3) र (+6) (ख) (+4) र (–3)

(ग) (+5) र (–3) (घ) (–3) र (–1)

8. तल दिइएका पूर्णाङ्कहरूका सङ्घीय नियम प्रयोग गरी दुवै तरिकाले योगफल निकाल्नुहोस् :

(क) (+2), (–3) र (–5) (ख) (+4), (–3) र (+6)

(ग) (–5), (+4) र (0) (घ) (–2), (–5) र (+8)

9. (+9) र यसको विमुख पूर्णाङ्कको योगफल कति हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

10. (+30) मा कति जोड्दा (–30) हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

11. (–25) मा कति घटाउँदा (–20) हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

12. कुनै दुईओटा पूर्णाङ्कहरूको योगफल (–115) छ । तीमध्ये एउटा पूर्णाङ्क 175 भए अर्को पूर्णाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. दुईओटा बसहरू एकै स्थानबाट एकै समयमा छुटेछन् । एउटा बसले 125 km पूर्व यात्रा गऱ्यो र अर्को बसले 120 km पश्चिम यात्रा गऱ्यो । ती दुई बसले पार गरेको जम्मा दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. सरल गर्नुहोस् :

(क) (–30) – (–40) – (–20) + (+2)

(ख) (+75) – (–14) – (–10) + (+1)

(ग) (–40) + (–25) + (+60) + (–5)

(घ) (–30) – (–40) – (–20) – (–10)

15. तल दिइएका दुवै तालिकाहरूबाट प्रत्येक पङ्क्ति, प्रत्येक लहर र विकर्णहरूको योगफल निकाल्नुहोस् । कुन तालिकाको नतिजामा पङ्क्ति, लहर र विकर्णको योगफल एउटै आउँछ, लेख्नुहोस् ।

तालिका 1

–5	–1	–4
–5	–2	7
0	3	–3

तालिका 2

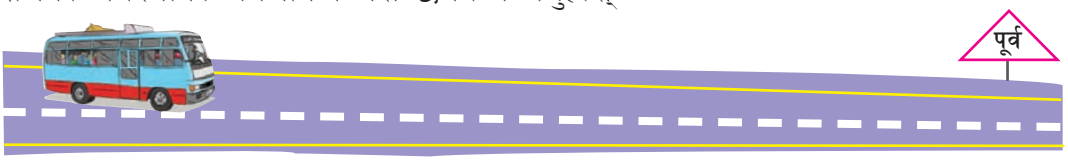
1	–10	0
–4	–3	–2
–6	4	–7

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3.4 पूर्णाङ्कको गुणन (Multiplication of Integers)

तलको अवस्थाको अवलोकन गरी छलफल गर्नुहोस् :



पश्चिमबाट पूर्वतर्फ 40 km प्रति घण्टाका दरले गुडिरहेको बस 8 घण्टामा कति दुरी पार गर्ला ?

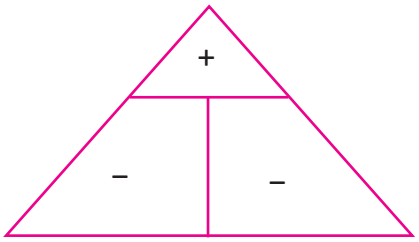
8 घण्टामा बसले पार गरेको दुरी = 40 km × 8

= 320 km

क्रियाकलाप 1

I. चित्रमा देखाइए जस्तै एउटा त्रिभुजमा दुईओटा '–' चिह्न र एउटा '+' चिह्न लेख्नुहोस् ।

II. अब पूर्णाङ्कको समूहबाट सङ्ख्याहरू लिएर गुणन गर्नुहोस् ।



जस्तै : (–3) × (–4)

3 × 4 = 12 हुन्छ ।

यसका लागि माथिको चित्रमा दुईओटा '–' चिह्नलाई औँलाहरूले छोप्नुहोस् । बाँकी कुन चिह्न रहन्छ, हेर्नुहोस् ।

यहाँ '+' चिह्न बाँकी रह्यो । त्यसैले, (–3) × (–4) = +12 भयो ।

धनात्मक पूर्णाङ्क × धनात्मक पूर्णाङ्क = धनात्मक पूर्णाङ्क
ऋणात्मक पूर्णाङ्क × ऋणात्मक पूर्णाङ्क = धनात्मक पूर्णाङ्क
धनात्मक पूर्णाङ्क × ऋणात्मक पूर्णाङ्क = ऋणात्मक पूर्णाङ्क
ऋणात्मक पूर्णाङ्क × धनात्मक पूर्णाङ्क = ऋणात्मक पूर्णाङ्क

क्रियाकलाप 2

तल दिइएको गुणन तालिका पूरा गर्नुहोस् । तल सोधिएका सङ्ख्याहरूको गुणनफल कति हुन्छ ? छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

×	–3	–2	–1	0	1	2	3
3	–9	–6	–3	0	3	6	9
2	–6	–4	–2	0	2	4	6
1	–3	–2	–1	0	1	2	3
0							
–1							
–2							
–3							

(क) $(-3) \times (-2) =$ _____

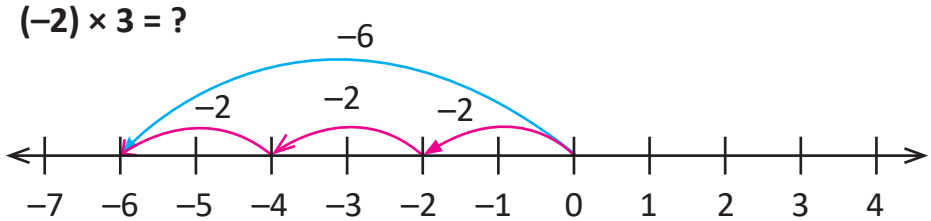
(ख) $(+2) \times (-1) =$ _____

(ग) $(+1) \times 0 =$ _____

क्रियाकलाप 3 (सङ्ख्या रेखाको प्रयोगबाट गुणन)

तलका सङ्ख्या रेखाको प्रयोगबाट गरीएका सङ्ख्याहरूको गुणनक्रिया अवलोकन गरी छलफल गर्नुहोस् :

(क) **$(-2) \times 3 = ?$**



उद्‌गम बिन्दुबाट बायाँतर्फ 2 एकाइ 3 पटक जाँदा कुन बिन्दुमा पुगिन्छ, छलफल गर्नुहोस् :

$(-2) \times 3$

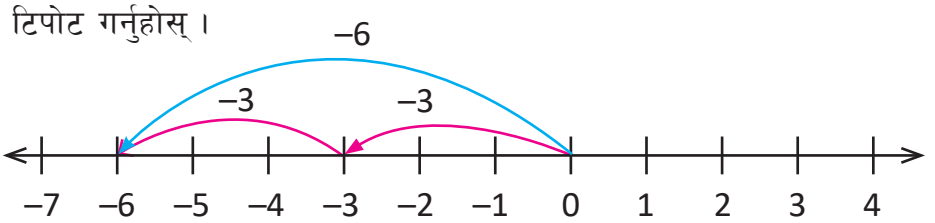
$= (-2) + (-2) + (-2)$

$= -6$

अतः $(-2) \times 3 = -6$

(ख) **2 × (–3) = ?**

उद्‌गम बिन्दुबाट बायाँतर्फ 3 एकाइ 2 पटक जानुहोस् । कुन बिन्दुमा पुगिन्छ ? सङ्ख्या रेखा बनाइ टिपोट गर्नुहोस् ।



यहाँ

$2 \times (-3)$

$= (-3) + (-3)$

$= -6$

अतः $2 \times (-3) = (-6)$ हुन्छ ।

पूर्णाङ्कका गुणनका नियमहरू (Properties of Multiplication of Integers)

I. बन्दी नियम (Closure Property)

पूर्णाङ्कको समूहबाट कुनै दुई सङ्ख्याहरू लिनुहोस् । उक्त सङ्ख्याहरूको गुणनफल निकाल्नुहोस् । नतिजा के आउँछ, छलफल गर्नुहोस् ।

जस्तै : $(-5) \times (+4) = (-20)$

$(-4) \times (-2) = (+8)$

$1 \times 0 = 0$

कुनै पनि दुईओटा पूर्णाङ्कहरूको गुणनफल पनि पूर्णाङ्क नै हुन्छ । यसलाई बन्दी नियम भनिन्छ ।

यदि $a \times b$ दुई पूर्णाङ्कहरू भए $a \times b$ पनि पूर्णाङ्क हुन्छ ।

II. क्रम विनिमय नियम (Commutative Property)

पूर्णाङ्कको समूहबाट कुनै दुई सङ्ख्याहरू लिनुहोस् । ती सङ्ख्याहरूलाई क्रम परिवर्तन गरी गुणनफल निकाल्नुहोस् । नतिजा के आउँछ, छलफल गर्नुहोस् ।

जस्तै : $3 \times 2 = 2 \times 3 = 6$

$(-8) \times (+3) = (+3) \times (-8) = -24$

$1 \times 0 = 0$

कुनै पनि दुईओटा पूर्णाङ्कहरूको गुणनफल तिनीहरूको स्थान बदल्दा हुने गुणनफलसँग बराबर हुन्छ, यसलाई विनिमय नियम भनिन्छ ।

यदि a र b दुईओटा पूर्णाङ्कहरू छन् भने $a \times b = b \times a$ हुन्छ ।

III. सङ्घीय नियम (Associative Property)

कुनै तीनओटा पूर्णाङ्कहरूलाई फरक फरक क्रममा राखेर पहिला दुईओटाको गुणनफलमा तेस्रोले गुणन गर्दा गुणनफल के आउँछ, छलफल गर्नुहोस् ।

जस्तै : तीनओटा पूर्णाङ्कहरू 2, 3 र –4 मा,

$[2 \times 3] \times (-4) = 2 \times [3 \times (-4)]$

$6 \times (-4) = 2 \times (-12)$

$\therefore -24 = -24$

कुनै तीनओटा पूर्णाङ्क.हरूलाई जुनसुकै क्रममा राखेर पहिला दुईओटाको गुणनफलमा तेस्रोले गुणन गर्दा गुणनफल बराबर हुन्छ ।

यदि a, b र c तीनओटा पूर्णाङ्हरू हुन् भने,

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ हुन्छ ।

IV. पद विच्छेदन नियम (Distributive Property)

जस्तै : (+6), (+3) र (–2) मा,

$+6\ [(+3) + (-2)] = (+6) \times (+3) + (+6) \times (-2)$

अथवा $+6\ (+1) = 18 - 12$

अथवा $+6 = +6$

यदि a, b र c तीनओटा पूर्णाङ्कहरू हुन् भने

$a(b + c) = a \times b + a \times c$ हुन्छ ।

V. 1 को गुणन नियम (Multiplicative Property of 1)

$(-5) \times 1 = (-5)$

$1 \times (+6) = +6$

यदि a एउटा पूर्णाङ्क हो भने $a \times (+1) = (+1) \times a = a$ हुन्छ ।

VI. 0 को गुणन नियम (Multiplicative Property of zero)

$2 \times 0 = 0$

$0 \times 2 = 0$

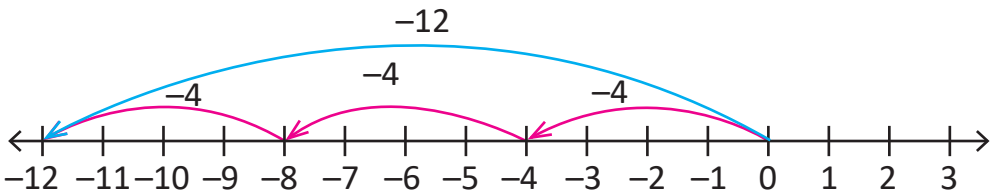
यदि a एउटा पूर्णाङ्क हो भने $a \times 0 = 0 \times a = 0$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

सङ्ख्या रेखाको प्रयोग गरी (–4) × 3 को गुणन गर्नुहोस् :

समाधान

यहाँ,



अत: $(-4) \times 3 = (-12)$

उदाहरण 2

गुणन गर्नुहोस् : **(+12) × (–8) × (+2)**

समाधान

यहाँ $(+12) \times (-8) \times (+2)$

$= (-96) \times (+2)$

$= -192$

उदाहरण 3

गुणनको सङ्घीय नियम प्रयोग गरी (+5), (+6) र (–7) लाई दुवै तरिकाले गुणन गर्नुहोस् :

समाधान

यहाँ $(+5) \times (+6) \times (-7)$

$= [(+5) \times (+6)] \times (-7)$

$= (+30) \times (-7)$

$= (-210)$

फेरि, $(+5) \times [(+6) \times (-7)]$

$= (+5) \times (-42)$

$= (-210)$

$\therefore\ [(+5) \times (6)] \times (-7) = (+5) \times [(6) \times (-7)] = (-210)$

उदाहरण 3

गुणनको पद विच्छेदन नियम प्रयोग गरी सरल गर्नुहोस् :

(क) $(-5) \times [(+24) - (-6)]$

समाधान

यहाँ $(-5) \times [(+24) - (-6)]$

$= (-5) \times [+24 + 6]$

$= (-5) \times (+30)$

$= (-150)$

फेरि, $(-5) \times [(+24) - (-6)]$

$= (-5) \times (+24) - (-5)\ (-6)$

$= (-120) - (+30)$

$= -120 - 30$

$= -150$

$\therefore\ [(-5) + [(+24) - (-6)] = -150$

3.5 पूर्णाङ्कको भाग (Division of Integers)

तल दिइएका उदाहरण अवलोकन गरी छलफल गर्नुहोस् :

$(-8) \times (-4) = 32$

$32 \div (-8) = ?$

$32 \div (-4) = ?$

$32 \div (-8) = (-4)$ हुन्छ र $32 \div (-4) = (-8)$ हुन्छ ।

भाग क्रिया गुणन क्रियाको विपरीत क्रिया (Inverse operation) हो । त्यसैले भाग क्रियामा पनि गुणन क्रियाकै नियम लागु हुन्छ ।

धनात्मक पूर्णाङ्क ÷ धनात्मक पूर्णाङ्क = धनात्मक पूर्णाङ्क
धनात्मक पूर्णाङ्क ÷ ऋणात्मक पूर्णाङ्क = ऋणात्मक पूर्णाङ्क
ऋणात्मक पूर्णाङ्क ÷ ऋणात्मक पूर्णाङ्क = धनात्मक पूर्णाङ्क
ऋणात्मक पूर्णाङ्क ÷ धनात्मक पूर्णाङ्क = ऋणात्मक पूर्णाङ्क

अभ्यास 3.2

1. खालि ठाउँमा उपयुक्त सङ्ख्या भर्नुहोस् :

(क) $\square \div (-6) = 4$

(ख) $81 \div \square = (-9)$

(ग) $19 \times \square = 0$

(घ) $-20 \times \square = -20$

(ङ) $\square + (-45) = 1$

2. सङ्ख्या रेखाको प्रयोग गरी गुणन गर्नुहोस् :

(क) $(+3) \times (+2)$ (ख) $(-5) \times (+3)$

(ग) $(+2) \times (-6)$ (घ) $(-4) \times (-3)$ (ङ) $(+5) \times (-4)$

3. गुणनको सङ्घीय नियम प्रयोग गरी दुवै तरिकाले गुणनफल निकाल्नुहोस् :

(क) $(+3) \times (+4) \times (+5)$ (ख) $(+7) \times (-5) \times (-3)$

(ग) $(-2) \times (-2) \times (-2)$ (घ) $(+4) \times (+8) \times (-5)$

4. गुणनको पद विच्छेद नियम प्रयोग गरी सरल गर्नुहोस् :

(क) $(+6) \times [(-8) + (+30)]$

(ख) $(-9) \times [(+24) - (-6)]$

(ग) $(+7) \times [(-12) - (+8)]$

(घ) $(-8) \times [(-3) + (-5)]$

5. भागफल निकाल्नुहोस् :

(क) $(+36) \div (+6)$ (ख) $(-45) \div (+5)$

(ग) $(+54) \div (-6)$ (घ) $(-95) \div (-1)$

6. दिइएका सङ्ख्याहरूको सरल गर्नुहोस् :

(क) $[(+7) \times (+8) \times (-6)] \div (-3)$

(ख) $[(+12) \times (-8)] \div [(+2) \times (-1)]$

(ग) $[(+6) \times (+4)] \div [(-3) \times (-2)]$

(घ) $(+5) \times (-4) \times (-8) \times (-3)$

7. दुईओटा पूर्णाङ्कहरूको गुणनफल (+63) छ । एउटा पूर्णाङ्क (+7) भए अर्को पूर्णाङक पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. (–5) लाई कतिले गुणन गर्दा गुणनफल (+90) हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. (+56) लाई कतिले भाग गर्दा भागफल (+7) हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. गुणनफल (–144) बनाउन (–12) लाई कति पटक गुणन गर्नुपर्दछ ।

11. गुणनफल (–169) बनाउन (–13) लाई कति पटक गुणन गर्नुपर्दछ ?

12. एउटा हाजिरी जवाफ प्रतियोगितामा प्रत्येक सही उत्तरका लागि (+5), प्रत्येक गलत उत्तरका लागि (–2) र उत्तर भन्न नसकेमा (0) दिने नियम रहेछ ।

(क) समूह A ले 4 ओटा सही जवाफ र 5 ओटा गलत जवाफ दिएछ भने जम्मा कति अङ्क प्राप्त गरेछ ?

(ख) समूह B ले 5 ओटा सही जवाफ र 5 ओटा नै गलत जवाफ दिएछ । जम्मा कति अङ्क प्राप्त गरेछ ?

(ग) कुन समूहले बढी अङ्क प्राप्त गरेछन् ? कतिले प्राप्त गरेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. एउटा चाउचाउ उद्योगलाई प्याकिङ गरेको 1kg चाउचाउ बेच्दा 10 रुपियाँ नाफा हुँदोरहेछ । तर 1kg खुला चाउचाउ बेच्दा 5 रुपियाँ नोक्सान हुँदोरहेछ । यदि उक्त उद्योगले एक दिनमा 1500 kg प्याकिङ गरेको चाउचाउ र 200 kg खुला चाउचाउ बेचेछ । कम्पनीलाई उक्त दिनमा नाफा वा नोक्सान के कति भएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. **एउटा हाजिरी जवाफ प्रतियोगितामा प्रत्येक सही उत्तरका लागि (+3) र प्रत्येक गलत उत्तरका लागि (–2) दिने नियम छ ।**

(क) समूह A ले जम्मा 18 अङ्क प्राप्त गरेछ । जसमा 12 ओटा प्रश्नको गलत उत्तर दिएछ भने कतिओटा प्रश्नको सही जवाफ दिएछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) समूह B ले जम्मा (–5) अङ्क प्राप्त गरेछ । जसमा 7 ओटा प्रश्नको गलत उत्तर दिएछ भने कतिओटा प्रश्नको सही जवाफ दिएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) कुन समूहले धेरैओटा प्रश्नहरूको सही जवाफ दिएछ ? कतिले दिएछ , पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

तल दिइएका पूर्णाङ्कहरूबिचको गणितीय क्रियालाई सङ्ख्यारेखका देखाउनुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

1. $(+3) \times (+2)$
2. $(+3) \times (-2)$
3. $(-3) \times (+2)$
4. $(-3) \times (-2)$

उत्तर

1 देखि 11 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

12. (क) 10 (ख) 15 (ग) समूह B ले 5 अङ्क बढी प्राप्त गरेछ ।

13. नाफा रु. 14000 14. (क) 14 (ख) 3 (ग) समूह क, 11 ओटा

3.6 पूर्णाङ्कको सरलीकरण (Simplification of Integers)

पूर्णाङ्कको जोड, घटाउ, गुणन र भागसम्बन्धी समस्याहरू अगिल्ला पाठहरूमा छलफल गरीसकेका छौँ । अब हामी पूर्णाङ्कका सरलीकरणका बारेमा छलफल गर्ने छौँ ।

क्रियाकलाप 1

तल दिइएको गणितीय समस्याको अवलोकनबाट सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् ।

एउटा हाजिरी जवाफ प्रतियोगितामा प्रत्येक सही उत्तरका लागि (+5) र प्रत्येक गलत उत्तरका लागि (–3) दिने नियम रहेछ ।

(क) समूह अन्नपूर्णले जम्मा 104 अङ्क प्राप्त गरी विजयी भएछ । जसमा 25 ओटा प्रश्नको सही जवाफ दिएका रहेछन् भने कतिओटा प्रश्नको उत्तर गलत गरेछन् ?

(ख) यो समस्या समाधान गर्न कुन कुन गणितीय क्रियाहरू गर्नुपर्ला ?

यहाँ दिइएको समस्यालाई गणितीय वाक्यमा लेख्दा,

$25 \times (+5) + \square \times (-3) = 104$

गलत उत्तर दिइएका प्रश्न सङ्ख्या = x (मानौँ)

अब $25 \times (+5) + x \times (-3) = 104$

अथवा $125 - 3x = 104$

अथवा $-3x = 104 - 125$

अथवा $-3x = -21$

$x = 7$

7 ओटा प्रश्नको जवाफ गलत गरेछ ।

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस् :

$(+12) + (-5) + (+25) \div (-5) - (-6) \times (+7)$

$= (+12) + (-5) + (-5) - (-6) \times (+7)$ [$(+25) \div (-5)$ गरेको]

$= (+12) + (-5) + (-5) - (-42)$

$= (+7) + (-5) + 42$

$= +2 + 42$

$= 44$

- जोड, घटाउ तथा गुणन मिश्रित समस्यामा पहिला गुणनको काम गर्नुपर्दछ ।
- जोड, घटाउ तथा भाग क्रिया समावेश भएमा समस्याको समाधान गर्दा सबैभन्दा पहिला भाग क्रिया गर्नुपर्दछ ।
- गुणन र भाग समावेश भएका समस्यामा पहिला भाग क्रिया गर्ने वा बायाँबाट दायाँतिर सरल गर्दै जाँदा जुन चिह्न पहिला आउँछ, त्यहि क्रिया पहिला गर्नुपर्दछ ।

अभ्यास 3.3

1. सरल गर्नुहोस् :

(क) $(-6) \times (-4) \div (+4) + (-5) - (-1)$

(ख) $(-15) \div (+5) \times (-4) + (-10) - (+7)$

(ग) $(-12) + (+16) \times (-27) \div (-9)$

(घ) $(-3) \times (+16) - \{(+12) \div (+6) + (-10)\}$

2. एउटा विद्यालयमा भएको हाजिरी जवाफ प्रतियोगितामा प्रत्येक सही उत्तरका लागि (+10) र प्रत्येक गलत उत्तरका लागि (–5) दिने नियम रहेछ ।

(क) निलो सदनले 60 अङ्क प्राप्त गरेछ । जसमा 2 ओटा प्रश्नको उत्तर गलत दिएछ भने कतिओटा प्रश्नको सही जवाफ दिएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) पहेँलो सदनले 20 अङ्क प्राप्त गरेछ । जसमा 5 ओटा प्रश्नको उत्तर गलत भनेछ भने कतिओटा प्रश्नको सही जवाफ दिएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) कुन समूहले धेरैओटा प्रश्नहरूको सही जवाफ दिएछ, कतिले लेख्नुहोस् ।

3. रामको बैङ्क खातामा वैशाख महिनाको सुरुमा रु. 5000 थियो । वैशाख 7 गते रु. 30,000 तलब उसको खातामा जम्मा भयो । वैशाख 9 गते बिजुलीको महसुल रु. 945 उक्त खाताबाट बुझाए । वैशाख 11 गते फोनमा रु. 500 उक्त खाताबाट रिचार्ज गरेछन् । वैशाख 15 गते ABC खाद्य स्टोरलाई उक्त खाताबाट रु. 10,000 तिरेछन् भने अब उनको खातामा कति रकम बाँकी छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. पहिलो पूर्णाङ्क दोस्रो पूर्णाङ्कको पाँच गुणाभन्दा 2 ले बढी छ । यदि पहिलो पूर्णाङ्क 77 छ भने दोस्रो पूर्णाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा 1000 *l* क्षमताको ट्याङ्कीमा 500 *l* पानी छ। यसमा दुईओटा धाराहरू जडान गरीएका छन् । 1 मिनेटमा धारा A ले 25 *l* पानी भर्छ र धारा B ले 15 *l* पानी बाहिर फाल्छ। यदि दुवै धारालाई छ मिनेटसम्म खोलियो भने ट्याङ्कीमा कति लिटर पानी हुन्छ ?

परियोजना कार्य

हाम्रो दैनिक जीवनमा पूर्णाङ्कको जोड र घटाउको प्रयोग भएका कुनै पाँचओटा उदाहरणहरू लेखी कक्षामा प्रस्तुत् गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) +2 (ख) –5 (ग) +36 (घ) –40
2. (क) 7 (ख) 4 (ग) 3
3. रु. 2355
4. 15
5. 560 *l*

पाठ 4 आनुपातिक सङ्ख्या (Rational Number)

4.0 पुनरवलोकन (Review)

पूर्णाङ्कहरूको समूह Z = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...} बाट कुनै दुई सङ्ख्याहरू लिनुहोस् । ती सङ्ख्याहरूको जोड, घटाउ, गुणन र भागमध्ये कुन कुन क्रिया सम्भव होला, छलफल गर्नुहोस् ।

4.1 आनुपातिक सङ्ख्याको परिचय (Introduction of Rational Number)

क्रियाकलाप 1

दिइएको अवस्थाको अध्ययन गर्नुहोस् र सङ्ख्या रेखाका आधारमा सोधिएका प्रश्नहरूको छलफल गर्नुहोस् ।

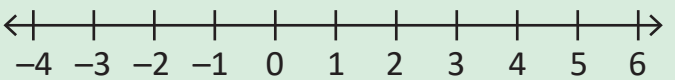
पूर्णाङ्कको समूहबाट दुईओटा सङ्ख्याहरू 3 र –4 लिइएको छ । यिनीहरूबिच जोड, घटाउ, गुणन र भाग क्रिया गरीएको छ ।

$3 + (-4) = -1$

$3 - (-4) = 3 + 4 = 7$

$3 \times (-4) = -12$

$3 \div (-4) = \frac{3}{-4}$



(क) के दुईओटा पूर्णाङ्कहरूलाई जोड्दा, घटाउँदा र गुणन गर्दा सधैँ पूर्णाङ्कनै हुन्छ ?

(ख) पूर्णाङ्क सङ्ख्याहरू बिचको भागफल के होला ?

(ग) के $\frac{3}{-4}$ पूर्णाङ्कको सङ्ख्या रेखामा छ ?

कुनै पनि दुईओटा पूर्णाङ्कहरू जोड्दा, घटाउँदा, गुणन गर्दा पूर्णाङ्कनै आउँछ । तर एउटा पूर्णाङ्कलाई अर्को पूर्णाङ्कले भाग गर्दा सधैँ पूर्णाङ्क नहुन पनि सक्छ । त्यसकारण अरू थप सङ्ख्याहरूको आवश्यकता महसुस भयो ।

जस्तै : $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}$ पूर्णाङ्कहरू होइनन् । यिनीहरू $\frac{a}{b}$ का रूपमा आउँछन् । यस्ता सङ्ख्याहरू आनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् । आनुपातिक सङ्ख्याको समूहलाई Q ले जनाइन्छ

$$Q = \{..., -4, -3, \frac{-5}{2}, -2, \frac{-3}{2}, -1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 1, ...\}$$

कुनै पनि सङ्ख्यालाई $\frac{a}{b}$ का रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई आनुपातिक सङ्ख्या (Rational Number) भनिन्छ । जहाँ a र b दुवै पूर्णाङ्कहरू हुन् र $b \neq 0$ छ ।

क्रियाकलाप 2

तल दिइएका प्रश्नहरूलाई साथीहरूबिच समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(क) के सबै प्राकृतिक सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या हुन् ।

(ख) के सबै पूर्णाङ्क आनुपातिक सङ्ख्या हुन्छन् ?

सबै पूर्णाङ्कहरू आनुपातिक सङ्ख्याहरूको समूहमा पर्ने भएकाले पूर्णाङ्कहरूको समूह आनुपातिक सङ्ख्याहरूको उपसमूह हो, त्यसैले $Z \subset Q$ लेख्न सकिन्छ ।

आनुपातिक सङ्ख्याका विशेषताहरू (Properties of Rational Numbers)

तलका आनुपातिक सङ्ख्याहरूको विशेषताहरूको अवलोकन गरी छलफल गर्नुहोस् ।

I. एकात्मक नियम (Identity Property)

जोडको एकात्मक नियम	गुणनको एकात्मक नियम
$\frac{1}{2} + 0 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$\frac{-2}{3} + 0 = 0 + \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3}$	$\frac{-2}{3} \times 1 = 1 \times \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3}$
कुनै पनि आनुपातिक सङ्ख्यामा शून्य (0) जोड्दा आउने सङ्ख्या त्यही सङ्ख्या हुन्छ । यसलाई जोडको एकात्मक नियम भनिन्छ ।	कुनै पनि आनुपातिक सङ्ख्यालाई 1 ले गुणन गर्दा त्यही सङ्ख्या आउँछ । यसलाई गुणनको एकात्मक नियम भनिन्छ ।

II. विपरीत गुण (Inverse Property)

जोडको विपरीत गुण	गुणनको विपरीत गुण
$-1 + 1 = 0$	$2 \times \frac{1}{2} = 1$
$\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$
कुनै पनि आनुपातिक सङ्ख्या $\frac{a}{b}$ मा $\frac{-a}{b}$ लाई जोड्दा शून्य आउँछ भने यसलाई जोडको विपरीत गुण भनिन्छ । $\frac{a}{b}$ र $\frac{-a}{b}$ एक अर्काका जोडका विपरीत हुन् ।	कुनै पनि आनुपातिक सङ्ख्या $\frac{a}{b}$ लाई $\frac{b}{a}$ ले गुणन गर्दा 1 आउँछ । त्यसै ले $\frac{a}{b}$ र $\frac{b}{a}$ लाई एक अर्काका गुणनको विपरीत मानिन्छ ।

III. क्रम विनियम गुण (Commutative Property)

जोडको क्रम विनियम गुण	गुणनको क्रम विनियम गुण
$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ लाई जोडको क्रम विनिमय भनिन्छ ।	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$ लाई गुणनको क्रम विनिमय भनिन्छ ।

IV. सङ्घीय नियम (Associative Property)

जोडको सङ्घीय नियम	गुणनको सङ्घीय नियम
$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{5}$ नियम, $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$ लाई जोडको सङ्घीय नियम भनिन्छ ।	$\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{5}$ नियम, $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f}$ लाई गुणनको सङ्घीय नियम भनिन्छ ।

V. बन्दी नियम (Closure Property)

जोडको बन्दी नियम	गुणनको बन्दी नियम
$\frac{1}{2}$ र $\frac{2}{3}$ आनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् । $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हो ।	$\frac{1}{2}$ र $\frac{2}{3}$ आनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् । $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हो ।
दुईओटा आनुपातिक सङ्ख्याहरूको योगफल पनि आनुपातिक सङ्ख्या हुन्छ । यसलाई जोडको बन्दी नियम भनिन्छ ।	दुईओटा आनुपातिक सङ्ख्याहरूको गुणनफल पनि आनुपातिक सङ्ख्या नै हुन्छ। यसलाई गुणनको बन्दी नियम भनिन्छ ।

4.2 दशमलव र आनुपातिक सङ्ख्या (Decimal and Rational Number)

क्रियाकलाप 3

तल तालिकामा दिइएका भिन्नहरूलाई दशमलव सङ्ख्यामा रूपान्तरण गरी खालि ठाउँ भर्नुहोस् र निष्कर्षलाई छलफल गर्नुहोस् ।

क्र.स.	भिन्न	दशमलव सङ्ख्या
1	$\frac{1}{2}$	0.5
2	$\frac{1}{3}$	0.333
3	$\frac{2}{7}$	0.285714285714
4	$\frac{2}{3}$	...
5	$\frac{3}{10}$	...
6	$\frac{5}{13}$	...

भिन्नलाई दशमलवमा रूपान्तरण गर्दा अन्त्य हुने, अन्त्यहीन र पुनरावृत्त दशमलवमा व्यक्त गर्न सकिन्छ ।

I. अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्या (Terminating Decimal)

तल दिइएका उदाहरणहरूको अवलोकन गरी छलफल गर्नुहोस् :

$\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{8} = 0.125$, $\frac{1}{3} = 1.5$

$\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{2}$ लाई दशमलव सङ्केतमा रूपान्तरण गर्दा दशमलव पछाडिका सङ्ख्याहरू निश्चित स्थानमा अन्त्य भएका छन् ।

आनुपातिक सङ्ख्याको हरले अंशलाई भाग गर्दा भागफलमा दशमलव पछाडिका सङ्ख्याहरूको अन्त्य हुन्छ भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्या भनिन्छ ।

II. अन्त्यहीन पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्या (Non terminating Recurring Decimal)

भिन्नहरू $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{11}$ लाई दशमलव सङ्ख्यामा रूपान्तरण गर्नुहोस् । नतिजाका आधारमा के निष्कर्ष निस्किन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

$\frac{1}{3} = 0.3333...$

$\frac{2}{9} = 0.2222$

$\frac{4}{11} = 0.363636...$

0.333.. लाई $0.\overline{3}$ पनि लेख्न सकिन्छ । माथिको मेलबन्दले उक्त सङ्ख्या दोहोरिरहन्छ भन्ने जनाउँछ ।

माथिका भिन्नलाई दशमलव सङ्केतमा रूपान्तरण गर्दा दशमलवपछिका सङ्ख्याहरू अन्त्य भएका छैनन् । एउटै सङ्ख्या दोहोरिरहेका छन् । यस्ता सङ्ख्यालाई अन्त्यहीन पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्या भनिन्छ ।

अन्त्य हुने र अन्त्यहीन पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्यालाई आनुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ ।

नोट : यदि आनुपातिक सङ्ख्याको हरमा 2 अथवा 5 का अपवर्त्य रहेका छन् भने त्यो सङ्ख्या अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्या हुन्छन् ।

जस्तै : $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{7}{25}, ...$

यदि आनुपातिक सङ्ख्याको हरमा 2 र 5 बाहेक अरू सङ्ख्या भएमा त्यस्ता दशमलव सङ्ख्या अन्त्यहीन पूरावृत्त हुन्छन्, जस्तै : $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, ...$

4.3 दशमलवलाई भिन्नमा रूपान्तरण (Conversion of Decimal into fraction)

I. अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्यालाई भिन्नमा रूपान्तरण

0.75 लाई भिन्नमा कसरी रूपान्तरण गर्न सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

0.75 भनेको सयांशको 75 अंश भन्ने बुझिन्छ ।

त्यसैले $\frac{\cancel{75}^{3}}{\cancel{100}_{4}}$ हुन्छ ।

अर्थात् $\frac{3}{4}$ हुन्छ ।

> 0.75 मा दशमलव पछि दुईओटा सङ्ख्याहरू छन् । त्यसैले 0.75 लाई 100 ले गुणन र भाग गर्नुपर्छ ।

अर्को तरिका : 0.75 लाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्दा,

$$\frac{0.75 \times 100}{100}$$

$$= \frac{75}{100}$$

$$= \frac{3}{4}$$

II. अन्त्यहीन पुनरावृत्त दशमलवलाई भिन्नमा रूपान्तरण

$0.\overline{3}$ लाई भिन्नमा कसरी रूपान्तरण गर्न सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

मानौं, $x = 0.\overline{3}$

$x = 0.33 \ldots$ (i)

समीकरण (i) लाई 10 ले गुणा गर्दा,

$10x = 3.33 \ldots$ (ii)

> $0.\overline{3}$ मा दशमलवपछि एउटै सङ्ख्या 3 मात्र पुनरावृत्त छ, त्यसैले 10 ले गुणा गर्नुपर्दछ ।

अब समीकरण (ii) बाट समीकरण (i) घटाउँदा,

$10x - x = 3.33\ldots - 0.33\ldots$

अथवा $9x = 3$

अथवा $x = \frac{3}{9}$

अथवा $x = \frac{1}{3}$

अतः $0.\overline{3} = \frac{1}{3}$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

तल दिइएका भिन्नहरूलाई दशमलवमा रूपान्तरण गरी अन्त्य हुने र अन्त्यहीन पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्याहरू छुट्याउनुहोस् ।

(क) $\frac{5}{8}$ (ख) $\frac{2}{3}$

समाधान

(क) $\frac{5}{8}$

$= 0.625$

0.625 अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्या हो ।

$$\begin{array}{r} 0.625 \\ 8\overline{)\,50} \\ -48 \\ \hline 20 \\ -16 \\ \hline 40 \\ -40 \\ \hline \times \end{array}$$

(ख) $\frac{2}{3}$

$= 0.666...$

$= 0.\overline{6}...$

$0.\overline{6}$ अन्त्यहीन पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्या हो ।

$$\begin{array}{r} 0.666 \\ 3\overline{)\,20} \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 2 \end{array}$$

उदाहरण 2

तल दिइएका दशमलव सङ्ख्यालाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 0.35 (ख) $0.\overline{41}$

समाधान

(क) 0.35

$$= \frac{0.35 \times 100}{100} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

(ख) $0.\overline{41}$

मानौं, $x = 0.\overline{41}$

$x = 0.4141...$ (i)

समीकरण (i) लाई 100 ले गुणन गर्दा,

$100x = 41.4141...$ (ii)

अब समीकरण (ii) बाट समीकरण (i) घटाउँदा,

$100x - x = 41.4141... - 0.4141...$

अथवा $99x = 41$

अथवा $x = \frac{41}{99}$

अतः $0.\overline{41} = \frac{41}{99}$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

$\frac{1}{2}$ र $\frac{5}{6}$ का बिचका कुनै दुईओटा आनुपातिक सङ्ख्याहरू निकाल्नुहोस् :

समाधान

$\frac{1}{2}$ र $\frac{5}{6}$ को बिचको आनुपातिक सङ्ख्या निकाल्न,

एउटा सङ्ख्या $= \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{6}}{2}$ ($\frac{1}{2}$ र $\frac{5}{6}$ को औसत मान निकाल्ने ।)

$= \frac{3+5}{6} \times \frac{1}{2} \quad = \frac{8}{6} \times \frac{1}{2} \quad = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \quad = \frac{4}{6} \quad = \frac{2}{3}$

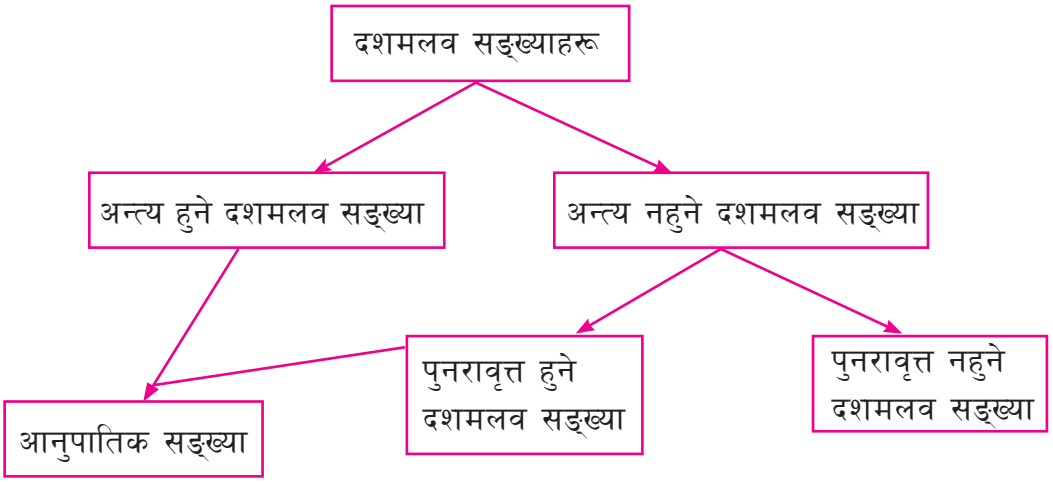
अर्को सङ्ख्या $= \frac{1}{2}$ र $\frac{2}{3}$ को औसत मान

$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{2}$

$= \frac{3+4}{6} \times \frac{1}{2} \quad = \frac{7}{12}$

$\frac{1}{2}$ र $\frac{5}{6}$ का बिचमा पर्ने कुनै दुई आनुपातिक सङ्ख्याहरू $\frac{2}{3}$ र $\frac{7}{12}$ हुन् ।

दशमलव सङ्ख्याहरूलाई तलको जस्तो चार्टबाट देखाउन सकिन्छ :



अभ्यास 4.1

1. तल दिइएका भिन्नहरूलाई दशमलवमा रूपान्तरण गरी अन्त्य हुने र अन्त्यहीन पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्याहरू छुट्याउनुहोस् ।

(क) $\frac{1}{2}$ (ख) $\frac{3}{5}$ (ग) $\frac{2}{7}$ (घ) $\frac{15}{2}$ (ङ) $\frac{17}{13}$

(च) $\frac{55}{10}$ (छ) $\frac{37}{20}$ (ज) $\frac{25}{17}$ (झ) $\frac{12}{25}$

2. तल दिइएका सङ्ख्याहरूको जोडको विपरीत सङ्ख्या लेख्नुहोस् :

(क) $\frac{2}{5}$ (ख) $\frac{-5}{7}$ (ग) $\frac{22}{12}$ (घ) $\frac{12}{7}$ (ङ) $\frac{-11}{8}$

3. तल दिइएका सङ्ख्याहरूको गुणनको विपरीत सङ्ख्या लेख्नुहोस् :

(क) $\frac{3}{4}$ (ख) $\frac{25}{10}$ (ग) $\frac{-2}{3}$ (घ) $\frac{22}{12}$ (ङ) $\frac{1}{8}$

4. तल दिइएका दशमलव सङ्ख्यालाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 0.5 (ख) $0.\overline{7}$ (ग) $0.\overline{24}$ (घ) $0.\overline{27}$

(ङ) $1.5\overline{7}$ (च) 2.35 (छ) 7.025

5. $\frac{1}{2}$ र $\frac{3}{5}$ का बिचका कुनै दुईओटा आनुपातिक सङ्ख्या लेख्नुहोस् ।

6. $\frac{1}{3}$ र $\frac{3}{4}$ को बिचका कुनै दुईओटा आनुपातिक सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. तलका प्रश्नहरूको उत्तर कारणसहित लेख्नुहोस् :

(क) के सबै प्राकृतिक सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या हुन् ?

(ख) के सबै पूर्ण सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या हुन् ?

(ग) के सबै पूर्णाङ्क आनुपातिक सङ्ख्या हुन् ?

(घ) के शून्य (0) आनुपातिक सङ्ख्या हो ?

(ङ) के सबै आनुपातिक सङ्ख्या पूर्णाङ्क हुन् ?

परियोजना कार्य

प्रकृतिक सङ्ख्या, पूर्ण सङ्ख्या, पूर्णाङ्क र आनुपातिक सङ्ख्याहरूको सम्बन्धलाई चित्रबाट देखाउनुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 5 भिन्न र दशमलव (Fraction and Decimal)

5.1 भिन्न (Fraction)

5.1.0 पुनरवलोकन (Review)

तल दिइएका भिन्नसम्बन्धी समस्याहरूका बारेमा समूहमा छलफल गरी हिसाब गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ (ख) $5\frac{5}{6} - 1\frac{2}{3}$

(ग) $6 \times \frac{2}{5}$ (घ) $12 \div \frac{2}{5}$

5.1.1 भिन्नको सरलीकरण (Simplification of Fractions)

क्रियाकलाप 1

तल दिइएका गणितीय समस्यालाई अध्ययन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

सिर्जनाको मासिक आम्दानी रु. 24000 छ र उनले एक महिनामा आम्दानीको तीन भागको एक भाग शिक्षामा खर्च गरीन् । त्यस्तै चार भागको दुई भाग खानामा खर्च गरीन् भने,

(क) उनले जम्मा कति भाग खर्च गरीछन् ?

(ख) जम्मा कति रकम खर्च गरीछन् ?

यहाँ शिक्षामा खर्च भएको आम्दानीको भाग = तीन भागको एक भाग = $\frac{1}{3}$

खानामा खर्च भएको आम्दानीको भाग = चार भागको दुई भाग = $\frac{2}{4}$

जम्मा खर्च = ?

जम्मा खर्च निकाल्न दुवै खर्च जोड्नुपर्दछ ।

त्यसैले जम्मा खर्च $= \frac{1}{3} + \frac{2}{4}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{4}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{3}{3}$

$= \frac{4}{12} + \frac{6}{12} = \frac{10}{12}$

असमान हरलाई समान बनाएको

जम्मा खर्च = $\frac{5}{6}$ (लघुत्तम पदमा लेख्दा)

अब जम्मा खर्च रकम = आम्दानीको $\frac{5}{6}$ भाग

= रु. 24000 × $\frac{5}{6}$

= रु. 4000 × 5

= रु. 20,000

अर्को तरिका (नमुना चित्रण विधिबाट)

शिक्षामा आम्दानीको तीन भागको एक भाग खर्च भएकाले सिर्जनाको आम्दानीलाई तीन बराबर भाग लगाउँदा,

सिर्जनाको आम्दानी = रु. 24,000		
x	x	x

3x = 24000

अथवा x = $\frac{24000}{3}$

अथवा x = 8000

अत: शिक्षामा खर्च = रु. 8,000

फेरि खानामा आम्दानीको चार भागको दुईभाग खर्च भएकाले,

सृजनाको आम्दानी = रु. 24,000			
y	y	y	y

4y = 24000

अथवा y = $\frac{24000}{4}$

अथवा y = 6000

खानामा खर्च = 2 भाग

= 2 × 6000

= रु. 12,000

अत: जम्मा खर्च = शिक्षामा खर्च + खानामा खर्च

= 8000 + 12000

= रु. 20,000

जम्मा खर्चको भाग = $\frac{\text{जम्मा खर्च}}{\text{जम्मा आम्दानी}}$ = $\frac{\text{रु.}20000}{\text{रु.}24000}$ = $\frac{4\times5}{4\times6}$ = $\frac{5}{6}$

उदाहरण 1

शान्ति निकेतन विद्यालयको कक्षा 7 मा 48 जना विद्यार्थी छन्। तीमध्ये तीन भागको दुई भाग ($\frac{2}{3}$ भाग) छात्रा र बाँकी छात्र छन् भने,

(क) छात्राको सङ्ख्या कति रहेछ ?

(ख) छात्रको सङ्ख्या कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या = 48

छात्राको सङ्ख्या = जम्मा विद्यार्थीको $\frac{2}{3}$ भाग

$= 48 \times \frac{2}{3}$

$= 32$

छात्रको सङ्ख्या = जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या − छात्राको सङ्ख्या

$= 48 - 32$

$= 16$

अतः छात्रा 32 जना र छात्र 16 जना रहेछन् ।

अर्को तरिका (नमुना चित्रण विधिबाट)

छात्राको सङ्ख्या तीन भागको दुई भाग,

विद्यार्थी सङ्ख्या = 48		
x	x	x

$3x = 48$

$x = \frac{48}{3}$

$\therefore x = 16$

छात्रा = 2 भाग

छात्र = 1 भाग

छात्राको सङ्ख्या = 2 भाग

$= 2 \times 16$

$= 32$

छात्रको सङ्ख्या $= 48 - 32$

$= 16$

उदाहरण 2

प्रविणले आफ्नो जन्मदिनमा एउटा केक किनेछन् । उनका साथीहरूमध्ये कृपाले $\frac{1}{2}$ भाग, अमनले $\frac{1}{3}$ र सन्दीपले $\frac{1}{6}$ भाग खाएछन् । सबैभन्दा धेरै केक कसले खाएछन्, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ कृपाले खाएको केकको भाग $= \frac{1}{2}$

अमनले खाएको केकको भाग $= \frac{1}{3}$

सन्दीपले खाएको केकको भाग $= \frac{1}{6}$

अब तीनैओटा भिन्नको हरमा भएका अङ्कको ल.स. निकाल्नुहोस् ।

ल.स. = 6

अब सबै भिन्नको हर 6 बनाउनुहोस् ।

तुलना गर्नका लागि सबै भिन्नका हरहरू समान हुनुपर्छ ।

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{6}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$$
$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$$

2 का अपवर्त्यहरू 2, 4, 6, 8, ...
3 का अपवर्त्यहरू 3, 6, 9, ...
6 का अपवर्त्यहरू 6, 12, ...
सबैभन्दा सानो साझा अपवर्त्य = 6

यहाँ $\frac{3}{6}$ भनेको 3 ओटा $\frac{1}{6}$ हो । $\frac{2}{6}$ भनेको 2 ओटा $\frac{1}{6}$ हो र $\frac{1}{6}$ भनेको 1 ओटा $\frac{1}{6}$ हो ।

त्यसैले यी 3 ओटा भिन्नमध्ये $\frac{3}{6}$ ठुलो भिन्न हो ।

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ भाग खाने कृपाले सबैभन्दा धेरै केक खाइछन् ।

अभ्यास 5.1

1. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\left(11\frac{1}{13} - 1\frac{3}{8}\right) + 2\frac{7}{8}$ (ख) $13\frac{1}{9} - \left(4\frac{8}{9} - 6\frac{5}{11}\right)$

(ग) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{2} - \frac{4}{5} \div \frac{1}{5}$ (घ) $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \div \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{5}{9} - 2$

2. $\left(6\frac{1}{8} - 8\right)$ लाई 30 बाट घटाएर $1\frac{1}{4}$ जोड्नुहोस् ।

3. **सन्दीपको मासिक आम्दानी रु. 27,000 छ। उनले $\frac{1}{5}$ भाग खाजामा खर्च गरेछन्। $\frac{1}{10}$ भाग कपडामा खर्च गरेछन् र $\frac{2}{5}$ यातायातमा खर्च गरेछन् भने,**

(क) कति भाग बचत गरेछन् ?

(ख) कति रुपियाँ बचत गरेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. रमाइलो मेलामा रेमाले आफूसँग भएको रुपियाँको $\frac{1}{5}$ भाग मनोरञ्जनमा र $\frac{1}{2}$ भाग खानाका लागि खर्च गरीन् । कुन शीर्षकमा धेरै खर्च गरेकी रहिछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. **कक्षा 7 मा भएका 40 जना विद्यार्थीहरूमध्ये $\frac{1}{5}$ भाग विद्यार्थीले अङ्ग्रेजी विषय मन पराउँछन्। $\frac{2}{5}$ विद्यार्थीले गणित विषय मन पराउँछन्। बाँकी विद्यार्थीले विज्ञान मन पराउँछन्।**

(क) अङ्ग्रेजी मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) गणित मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) विज्ञान मन पराउने विद्यार्थीलाई भिन्नका रूपमा लेख्नुहोस् ।

6. **रञ्जुलाई उनको बुबाले रु. 6,000 दिनुभयो । उनले तीन भागको एक भाग रुपियाँले किताब किनिन्। चार भागको एक भाग रुपियाँले कपडा किनिन्। पाँच भागको एक भाग रुपियाँ भ्रमणमा खर्च गरीछन् भने,**

(क) जम्मा कति भाग खर्च गरीछन् ?

(ख) जम्मा कति रुपियाँ खर्च गरीछन् ?

(ग) कति रकम बचत गरीछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. **ऋतुले एउटा स्याउको $\frac{3}{5}$ भाग खाइछन् र बाँकी भाग उनको भाइ सुमनले खाएछन्।**

(क) सुमनले खाएको स्याउको भागलाई भिन्नमा लेख्नुहोस् ।

(ख) कसले कति भाग स्याउ बढी खाएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. **मोहनले आफूसँग भएको रकममध्ये $\frac{2}{3}$ भाग श्रीमतीलाई दिएछन्। बाँकी रकमबाट $\frac{1}{5}$ भाग छोरालाई र $\frac{1}{3}$ भाग छोरीलाई दिएछन्। श्रीमतीलाई रु. 60,000 दिएका रहेछन् भने,**

(क) छोरालाई कति रकम दिएका रहेछन् ?

(ख) छोरीलाई कति रकम दिएका रहेछन् ?

(ग) छोरा र छोरीमध्ये कसलाई कतिले धेरै रकम दिएका रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. प्रकृतिले ऊ सँग भएको रकमको $\frac{1}{4}$ भाग खर्च गरेछ । बाँकी रकमबाट $\frac{2}{5}$ भाग हराएछ । यदि हराएको रकम रु. 900 हो भने ऊ सँग पहिले कति रकम थियो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. एउटा विद्यालयमा $\frac{4}{5}$ भाग छात्रहरू छन् । विद्यालयको वनभोज कार्यक्रममा $\frac{1}{4}$ भाग छात्रा र $\frac{1}{3}$ भाग छात्रहरू समावेश भएछन् । यदि 190 जना विद्यार्थीहरू वनभोज कार्यक्रममा गएका थिए भने विद्यालयको जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

तपाईं आफूले एक दिनमा विद्यालयमा बिताउने समयमध्ये तल दिइएका क्रियाकलापहरूका लागि कति कति समय खर्चनुहुन्छ ? भिन्नका रूपमा लेखि कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) बिहानीको प्रार्थना

(ख) खाजा खाने समय

(ग) अध्ययन समय

(घ) अन्य क्रियाकलापको समय

उत्तर

1. (क) $12\frac{15}{26}$ (ख) $14\frac{3}{11}$ (ग) $\frac{-5}{2}$ (घ) $\frac{1}{9}$

2. 33 3. (क) $\frac{1}{9}$ (ख) रु. 2700

4. खानामा 5.(क) 8 (ख) 18 (ग) 14

6. $\frac{47}{60}$, रु. 1300 7. (क) $\frac{2}{5}$ (ख) ऋतुले $\frac{1}{5}$

8. (क) रु. 6000 (ख) रु. 10000 छोरालाई $\frac{1}{5}$ (ग) छोरीलाई रु. 4000

9. रु. 3000 10. 600

5.2 दशमलव (Decimal)

5.2.0 पुनरवलोकन (Review)

तल दिइएका दशमलव सङ्ख्याहरूको हिसाब गर्नुहोस् :

(क) 8.97 + 23.2 (ख) 3.6 × 5.8

(ग) 7.7 – 2.8 (घ) 17.40 ÷ 4

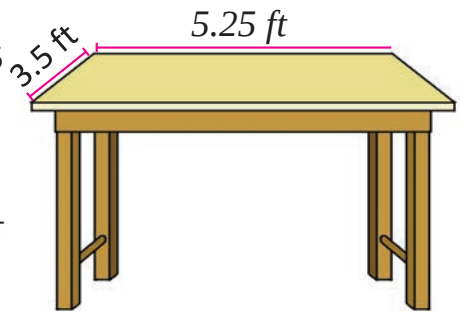
दशमलव सङ्ख्याहरूको जोड, घटाउ, गुणन र भाग गर्दा के के कुरामा ध्यान दिनुपर्दछ ? साथी समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

5.2.1 दशमलवको सरलीकरण (Simplification of Decimal)

क्रियाकलाप 1

ईशाले कक्षाकोठा सजाउनका लागि केही ढाँचाहरू बनाउँदै थिइन् । सो ढाँचा बनाउनका लागि लम्बाइ 4.5 cm भएका वर्गाकार कागजका टुक्राहरू चाहिन्छ । उनीसँग 54 cm लम्बाइ र चौडाइ 4.5 cm भएको आयताकार कागज छ। त्यस कागजबाट 4.5 cm लम्बाइका कतिओटा टुक्राहरू बन्लान ? उनले कतिओटा कागजका टुक्राहरू बन्छन् भनी हिसाब गर्न 54 ÷ 4.5 गरीन् । के यो सही छ, छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 2



चित्रमा देखाइएको टेबुलको सतहको लम्बाइ 5.25 ft र चौडाइ 3.5 ft रहेछ ।

(क) टेबुलको परिमिति कति होला ?

(ख) परिमिति निकाल्न कुन गणितीय क्रिया प्रयोग गर्नुपर्ला, छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ टेबुलको परिमिति निकाल्न,

उक्त टेबुलको लम्बाइ र चौडाइ दुवैलाई दुई दुई पटक जोड्नुपर्दछ ।

अर्थात टेबुलको परिमिति = 2(l + b) हुन्छ ।

अतः टेबुलको परिमिति = 2(5.25 ft + 3.5 ft)

= 2 × 8.75 ft

= 17.5 ft

उदाहरण 1

तल दिइएको गणितीय समस्यालाई कसरी सरल गर्न सकिन्छ ? सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्दै निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

सरल गर्नुहोस् :

$7.5 + \{6.72 \div 2.8\ (3.59 - 1.49)\}$

(क) के 3.59 बाट 1.49 नघटाइ 2.8 ले 6.72 लाई भाग गर्न मिल्छ ?

(ख) कुन कोष्ठभित्रको काम पहिले गर्नुपर्ला ?

(ग) सरल गर्दा कोष्ठभित्रको क्रम के होला ?

सरल गर्दा क्रमश : भाग, गुणन, जोड र घटाउको काम गरीन्छ तर यहाँ सर्वप्रथम 3.59 बाट 1.49 लाई घटाउनु पर्दछ । आएको नतिजालाई 2.8 सँग गुणन गर्नुपर्दछ । त्यसपछि मात्र 6.72 लाई भाग गर्न सकिन्छ । त्यसैले (3.59 – 1.49) लाई सानो कोष्ठमा र {6.72 ÷ 2.8 (3.59 – 1.49)} लाई मझौला कोष्ठमा राखिएको छ ।

समाधान

यहाँ $7.5 + \{6.72 \div 2.8\ (3.59 - 1.49)\}$

$= 7.5 + \{6.72 \div 2.8\ (2.1)\}$

$= 7.5 + \{6.72 \div 5.88\}$

$= 7.5 + 1.14$

$= 8.64$

चार साधारण क्रियाहरू (+, –, ÷, ×) र कोष्ठहरूसहितको दशमलवको सरलीकरण गर्दा पूर्ण सङ्ख्याको सरलीकरणमा जस्तै कोष्ठभित्र समावेश भएका क्रियालाई पहिला गरीसकेपछि बाँकी क्रियाहरू गर्दै जानुपर्दछ । सरलीकरणमा प्रयोग भएका कोष्ठहरू क्रमैसँग सानो कोष्ठ ( ), मझौला कोष्ठ { } र ठुलो कोष्ठ [ ] भित्र समावेश भएका क्रियाहरू गर्नुपर्दछ ।

अभ्यास 5.2

1. सरल गर्नुहोस् :

(क) $1.44 \div 1.2 + 6.2$

(ख) $12.75 - \{4.38 - (2.4 \times 4.32 \div 3.6 - 0.85)\}$

(ग) $\dfrac{1.2 \times 1.2 - 0.4 \times 0.4}{2.4 - 1.6}$

(घ) $\dfrac{4.5 \times 4.5 - 2.1 \times 2.1}{4.5 + 2.1}$

2. त्रिभुजको क्षेत्रफल = 1/2 × आधार × उचाइ हुन्छ । यदि एउटा त्रिभुजको आधार 25.75 cm र उचाइ 30.15 cm छ भने क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा आयताकार बगैँचाको लम्बाइ 22.66 m र चौडाइ 15.65 m छ ।

   (क) सो बगैँचाको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

   (ख) उक्त बगैँचाको परिमिति कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा वर्गाकार टेबुलको परिमिति 242.2 m छ । टेबुलको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा आयताकार जग्गाको क्षेत्रफल 215.66 m^2 छ । यदि सो जग्गा 67.35 m लामो भए कति फराकिलो होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. एउटा वर्गाकार खेतको लम्बाइ 8.45 m छ भने उक्त खेतको परिमिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

पत्तीका वा इन्टरनेटबाट आजको मुद्रा विनिमय दर तालिका खोज्नुहोस् । कुनै पनि पाँचओटा देशको खरिद दर र बिक्री दर टिप्नुहोस् र तिनीहरूबिचको फरक निकालेर कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) 7.4	(ख) 10.4	(ग) 1.6	(घ) 2.4
2. 388.18 cm^2	3. (क) 354.62 m^2	(ख) 76.62 m	
4. 60.55 m	5. 31.4 m	6. 33.8 m	

पाठ 6 अनुपात र समानुपात (Ratio and Proportion)

6.1 अनुपात (Ratio)

6.1.0 पुनरवलोकन (Review)

अनुजाको तौल 30 kg र रमेशको तौल 60 kg छ । अनुजा र रमेशको तौललाई कसरी तुलना गर्न सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् :

अन्तरको रूपमा,

अनुजा र रमेशको तौलको अन्तर = (60 – 30) kg = 30 kg

भागफलको रूपमा,

$$\frac{\text{अनुजाको तौल}}{\text{रमेशको तौल}} = \frac{30\text{ kg}}{60\text{ kg}} = \frac{1}{2}$$

अन्तरबाट तुलना गर्नु र भागफलबाट तुलना गर्नु एउटै होइन । अन्तरले खुद कति अङ्कले सानो वा ठुलो भन्ने बुझाउँछ भने भागफलले कति गुणाले सानो वा ठुलो भन्ने बुझाउँछ ।

6.1.1 अनुपातको परिचय (Introduction of Ratio)

क्रियाकलाप 1

दिइएको तालिका अवलोकन गरी साधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

वस्तु	मूल्य
	रु. 10
	रु. 70
	रु. 5

(क) कापीको मूल्य सिसाकलमको मूल्यको कति गुणा छ ?

(ख) इरेजरको मूल्य सिसाकलमको मूल्यको कति गुणा छ, तुलना गर्नुहोस् ।

$$\frac{\text{कापीको मूल्य}}{\text{सिसाकलमको मूल्य}} = \frac{\text{रु.}70}{\text{रु.}10} = \frac{7}{1}$$

कापीको मूल्य सिसाकलमको मूल्यको 5 गुणा छ ।

$$\frac{\text{इरेजरको मूल्य}}{\text{सिसाकलमको मूल्य}} = \frac{\text{रु.}5}{\text{रु.}10} = \frac{1}{2}$$

इरेजरको मूल्य सिसाकलमको मूल्यको एक तिहाइ छ ।

एउटा परिमाणका आधारमा अर्को परिमाणलाई तुलना गर्ने प्रक्रियालाई अनुपात भनिन्छ ।

दुईओटा एउटै एकाइमा भएका परिमाणहरू a र b को अनुपात $\frac{a}{b}$ वा a:b हुन्छ, जहाँ $b \neq 0$ । a:b लाई a is to b भनेर पढिन्छ । जहाँ a र b अनुपातका पदहरू हुन् ।

अनुपातको सरल रूप (Simplest form of a Ratio)

क्रियाकलाप 2

तल चित्रमा देखाइएको सिसाकलमको लम्बाइ 18 cm र व्यास 6 mm छ । सिसाकलमको व्यास र यसको लम्बाइको अनुपात कति हुन्छ ?

के $\frac{18\text{ cm}}{6\text{ mm}} = \frac{3}{1}$ लेख्न सकिन्छ ?

के सिसाकलमको लम्बाइ यसको ब्यासको तीन गुणा मात्र छ, छलफल गर्नुहोस् ।

सिसाकलको लम्बाइ व्यासको तीन गुणा मात्र छैन, कसरी गर्ने ?

यदि दिइएका परिमाणहरूका एकाइहरू फरक छन् भने एउटै एकाइमा परिवर्तन गरेर तुलना गर्नुपर्दछ ।

सिसाकलमको लम्बाइ मिलिमिटरमा परिवर्तन गर्दा,

$18\ cm = 18 \times 10\ mm = 180\ mm$ हुन्छ ।

त्यसैले,

सिसाकलमको व्यास र यसको लम्बाइको अनुपात $= \frac{10\ mm}{180\ mm} = \frac{1}{18}$ लेख्न सकिन्छ ।

- अनुपातले समान एकाइ भएका परिमाणहरूलाई मात्र तुलना गर्दछ ।
- अनुपात लेख्दा एकाइ लेख्नुहुँदैन ।

अनुपात र भिन्नको सम्बन्ध (Relation of Ratio and Fraction)

क्रियाकलाप 3

एउटा वृत्त खिच्नुहोस् । यसलाई पाँच बराबर भागमा बाड्नुहोस् ।

(क) छाया पारिएको भागलाई भिन्नमा लेख्नुहोस् ।

(ख) छाया पारिएको भाग र छाया नपारिएको भागको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

(ग) भिन्न र अनुपातमा के फरक छ, छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ

छाया पारिएको भागको भिन्न $= \frac{3}{5}$

छाया पारिएको र नपारिएको भागको अनुपात $= \frac{3}{2} = 3:2$

भिन्नमा $\frac{3}{5}$ ले 5 भागमध्ये 3 भाग बुझाउँछ ।

अनुपातमा 3:2 ले जम्मा $3 + 2 = 5$ भाग भन्ने बुझाउँछ ।

उदाहरण 1

चित्रमा देखाइएका दुईओटा बाल्टिनहरूको क्षमतालाई अनुपातमा लेख्नुहोस :

9 *l* क्षमता

15 *l* क्षमता

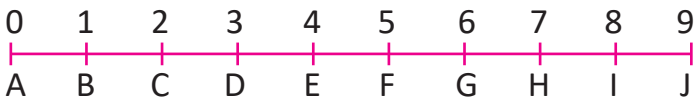
समाधान

यहाँ $\dfrac{\text{पहिलो बाल्टिनको क्षमता}}{\text{दोस्रो बाल्टिनको क्षमता}} = \dfrac{9\,l}{15\,l} = \dfrac{3 \times 3\,l}{3 \times 5\,l} = \dfrac{3}{5} = 3:5$

अतः पहिलो बाल्टिनको क्षमता : दोस्रो बाल्टिनको क्षमता = 3:5 छ ।

उदाहरण 2

तल दिइएको सङ्ख्या रेखामा प्रत्येक भागले 1cm जनाउँछ ।



AC र AF को अनुपात कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ AC : AF

$= \dfrac{AC}{AF}$

$= \dfrac{2\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \dfrac{2}{5} = 2:5$

उदाहरण 3

विष्णुले गणितमा 100 पूर्णाङ्कमा 75 अङ्क प्राप्त गरेछन् । विज्ञानमा 75 पूर्णाङ्कमा 50 अङ्क प्राप्त गरेछन् ? कुन विषयमा राम्रो अङ्क प्राप्त गरेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ गणितमा प्राप्त गरेको अङ्कको भिन्न $= \dfrac{75}{100} = \dfrac{3}{4}$

विज्ञानमा प्राप्त गरेको अङ्कको भिन्न $= \dfrac{50}{75} = \dfrac{2}{3}$

समान हर बनाउँदा,

गणितमा प्राप्त गरेको अङ्कको भिन्न $= \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{3} = \dfrac{9}{12}$

विज्ञानमा प्राप्त गरेको अङ्कको भिन्न $= \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{4} = \dfrac{8}{12}$

$\therefore \dfrac{9}{12} > \dfrac{8}{12}$ त्यसैले विष्णुले गणितमा राम्रो गरेका रहेछन् ।

उदाहरण 4

अन्जु र अमनको उचाइ क्रमश : 145 cm र 165 cm छ । उनीहरूको उचाइको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ अन्जु र अमनको उचाइको अनुपात $= \frac{145 \text{ cm}}{165 \text{ cm}}$

$= \frac{5 \times 29}{5 \times 33} = \frac{29}{33} = 29 : 33$

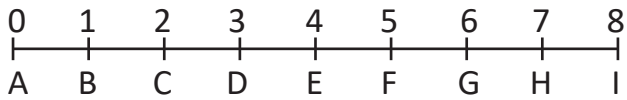
अभ्यास 6.1

1. तलका प्रत्येकको अनुपात लेखी लघुत्तम पदमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 10 cm र 100 cm (ख) रु. 180 र रु. 240 (ग) 10 kg र 2 kg

(घ) 8 घन्टा र 24 घन्टा (ङ) 250 ml र 1000 ml (ङ) 2.5 kg र 7.5 kg

2. तल दिइएको सङ्ख्या रेखामा प्रत्येक भागले 1 cm जनाउँछ । सोधिएका दुरीहरूको अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् :

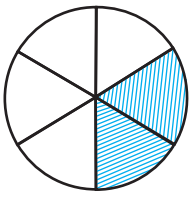


(क) AB : AG (ख) AC : DI (ग) CF : CH

(घ) BG : BI (ङ) AF : AI

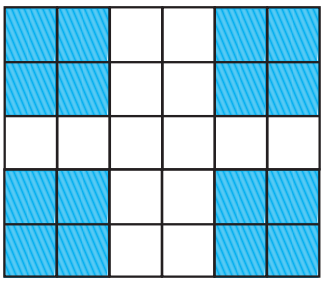
3. दिइएको चित्रबाट छाया पारिएको र छाया नपारिएको भागको अनुपात निकाल्नुहोस् :

(क)



(ख)

(ग)



4. एउटा विद्यालयमा 450 विद्यार्थीहरू छन् । जसमध्ये 180 छात्राहरू छन् ।

(क) छात्रा र जम्मा विद्यार्थीहरूको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

(ख) छात्र र जम्मा विद्यार्थीको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

(ग) छात्रा र छात्रको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

5. एउटा विद्यालयमा 25 जना शिक्षकहरू र 500 जना विद्यार्थीहरू छन् भने शिक्षक र विद्यार्थीको अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. प्रमेशको उचाइ 165 cm र प्रमिलाको उचाइ 150 cm छ ।

(क) प्रमेश र प्रमिलाको उचाइको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

(ख) प्रमिला र प्रमेशको उचाइको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

7. राहुलले अङ्ग्रेजी विषयमा 50 पूर्णाङ्कमा 40, नेपालीमा 30 पूर्णाङ्कमा 20 र गणितमा 20 पूर्णाङ्कमा 13 प्राप्त गरेछन् ।

(क) अङ्ग्रेजी र नेपाली दुई विषयमा कुनको नतिजा राम्रो छ ?

(ख) नेपाली र गणितमध्ये कुन विषयको नतिजा राम्रो छ ?

(ग) सबैभन्दा राम्रो नतिजा कुन विषयमा छ, अनुपात निकालेर तुलना गर्नुहोस् ।

8. एलिसा र दिपेशले रु. 6000 लाई 5:7 को अनुपातमा बाँड्दा दुवैले कति कति रुपियाँ पाउलान, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

तपाइँको विद्यालयको कक्षा 5 देखि 10 सम्मका छात्र र छात्रा विद्यार्थीहरूको सङ्ख्या टिपोट गर्नुहोस् । कक्षागत रूपमा प्रत्येक कक्षाका,

(क) छात्रा र छात्रको अनुपात

(ख) छात्रा र जम्मा विद्यार्थीको अनुपात

(ग) छात्र र जम्मा विद्यार्थीको अनुपात निकाल्नुहोस् र निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1 देखि 3 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (क) $\frac{2}{5}$ (ख) $\frac{3}{5}$ (ग) $\frac{2}{3}$ 5. 1:20 6. (क) 11:10

(ख) 10:11 7. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 8. रु. 2500, रु. 3500

6.2 समानुपात (Proportion)

6.2.0 पुनरवलोकन (Review)

$\frac{2}{5}$ का समतुल्य भिन्नहरू हुने गरी तल दिइएको तालिका पूरा गर्नुहोस् :

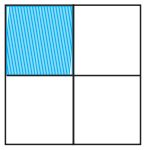
$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$	$\frac{2}{5} = \frac{10}{}$
$\frac{2}{5} = \frac{6}{}$	$\frac{2}{5} = \frac{}{30}$
$\frac{2}{5} = \frac{}{20}$	$\frac{2}{5} = \frac{14}{}$

के $\frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \frac{8}{20}$ सबैका अनुपातहरू एउटै छन् ? छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

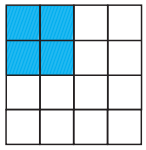
6.2.1 समानुपातको परिचय (Introduction of Proportion)

क्रियाकलाप 1

दुईओटा बराबर नापका वर्गाकार कागज लिनुहोस् । पहिलोलाई बराबर चार भागमा बाँड्नुहोस् । दोस्रोलाई बराबर 16 भागमा बाँड्नुहोस् ।



चित्र I



चित्र II

पहिलो चित्रबाट छाया पारिएको र नपारिएको भागको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

$$\frac{\text{छाया पारिएको भाग}}{\text{छाया नपारिएको भाग}} = \frac{1}{3}$$

अब, दोस्रो चित्रबाट छाया पारिएको र नपारिएको भागको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

$$\frac{\text{छाया पारिएको भाग}}{\text{छाया नपारिएको भाग}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

अतः $\frac{1}{3}$ र $\frac{4}{12}$ बराबर अनुपातहरू हुन् ।

बराबर अनुपातहरूलाई समानुपात भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 2

दीपेन्द्रले गणित विषयमा 30 पूर्णाङ्कको परीक्षामा 25 अङ्क प्राप्त गरेछन् । नर्मदाले 24 पूर्णाङ्कको परीक्षामा 20 अङ्क प्राप्त गरीछन् । कसको नतिजा राम्रो छ ? यिनीहरूको प्राप्ताङ्कको अनुपात कति होला ? कसरी तुलना गर्न सकिएला, छलफल गर्नुहोस् ।

दीपेन्द्रको प्राप्ताङ्क र पूर्णाङ्कको अनुपात = $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

नर्मदाको प्राप्ताङ्क र पूर्णाङ्कको अनुपात = $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

$\frac{25}{30}$ र $\frac{20}{24}$ को अनुपात बराबर भएकाले दुवैको नतिजा बराबर देखिन्छ ।

अत: $\frac{25}{30} = \frac{20}{24}$ हुन्छ ।

दुईओटा अनुपातहरू बराबर भएकाले यी अनुपातलाई समानुपात भनिन्छ । यहाँ 25 लाई पहिलो पद, 30 लाई दोस्रो पद, 20 लाई तेस्रो पद र 24 लाई चौथो पद भनिन्छ ।

चारओटा सङ्ख्याहरू a, b, c र d मा a र b को अनुपात c र d को अनुपातसँग बराबर छन् भने a, b, c र d समानुपातमा छन् भनिन्छ । यसलाई a:b :: c:d वा $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ लेखिन्छ । अथवा $a \times d = b \times c$ लेखिन्छ ।

माथिका उदाहरणमा $\frac{25}{30}$ र $\frac{20}{24}$ समानुपातिक छन् ।

Extremes

यसलाई 25:30 :: 20:24 पनि लेखिन्छ ।

Means

बाहिरको दुईओटा पदलाई Extremes भनिन्छ । भित्रको दुईओटा पदलाई Means भनिन्छ । यहाँ 25 र 24 Extremes हुन् भने 30 र 20 Means हुन ।

$25 \times 24 = 30 \times 20 = 600$ भयो ।

Extremes र Means को छुट्टा छुट्टै गुणनफल बराबर हुन्छ ।

क्रियाकलाप 3

के 3, 4, 9 र 12 समानुपातमा छन् ?

समाधान

यहाँ 3, 4, 9 र 12 लाई समानुपातमा लेख्दा,

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

अथवा $3 \times 12 = 4 \times 9$

अथवा $36 = 36$

अतः Extremes र Means को गुणनफल बराबर आएकाले 3, 4, 9 र 12 समानुपातमा छन् ।

अर्को तरिका

पहिलो र दोस्रो सङ्ख्याको अनुपात $= \frac{3}{4}$

तेस्रो र चौथो सङ्ख्याको अनुपात $= \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

अतः दुवै अनुपात बराबर भएकाले 3, 4, 9 र 12 समानुपातमा छन् ।

अभ्यास 6.2

1. तल दिइएका कुन कुन अनुपातहरू बराबर छन् ? कारणसहित लेख्नुहोस् :

(क) $\frac{2}{3}$ र $\frac{4}{5}$

(ख) $\frac{8}{4}$ र $\frac{2}{1}$

(ग) $\frac{4}{5}$ र $\frac{12}{20}$

(घ) $\frac{3}{5}$ र $\frac{9}{15}$

2. तलका सङ्ख्याहरू समानुपातमा छन् वा छैनन्, जाँचेर लेख्नुहोस् :

(क) 2, 3, 12, 20

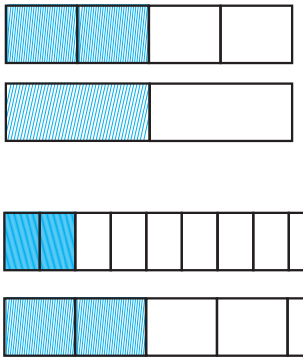
(ख) 7, 8, 14, 20

(ग) 5 m, 3 m, 25 m, 35 m

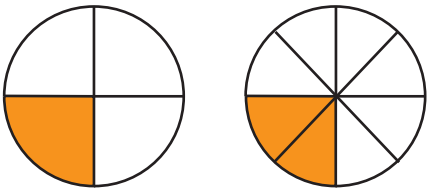
(घ) 3 ft, 8 ft, 12 ft, 32 ft

3. तल दिइएका जोडा चित्रहरूबाट छाया पारिएको भाग र छाया नपारिएको भागको अनुपात लेख्नुहोस् । ती चित्रहरू समानुपातमा छन् वा छैनन्, कारण सहित लेख्नुहोस् :

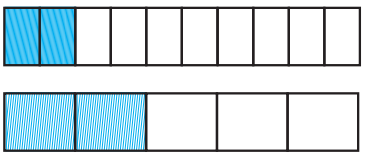
(क)



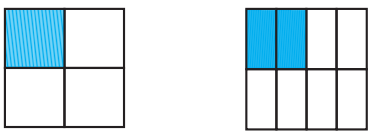
(ख)



(ग)



(घ)



4. ठिक भए (√) चिह्न र बेठिक भए (×) चिह्नले जनाउनुहोस् :

(क) 16 : 24 :: 20 : 30

(ख) 8 : 9 :: 24 : 27

(ग) 32 m : 64 m = 6 sec : 12 sec

(घ) 45 km : 60 km = 12 hours : 15 hours

5. तल दिइएका समानुपातबाट Extremes र Means छुट्याएर लेख्नुहोस् :

(क) 40 : 200 :: 15 : 75

(ख) 3 : 7 :: 21 : 49

(ग) 10 : 55 :: 2 : 11

(घ) 25 : 15 = 5 : 3

6. अनिताको गणित र विज्ञानको प्राप्ताङ्कको अनुपात 10:12 छ यदि उनको गणितको प्राप्ताङ्क 80 भए विज्ञानको प्राप्ताङ्क कति होला ?

7. 6 किलोग्राम सुन्तलाको मूल्य रु. 540 पर्छ भने 8 किलोग्राम सुन्तलाको मूल्य कति पर्ला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

दुईओटा वर्गाकार कागजहरू लिएर दुवैलाई बराबर अनुपात हुनेगरी फरक फरक भागमा बाँड्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1 देखि 5 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 6. 96 7. रु. 720

पाठ 7

नाफा र नोक्सान
(Profit and Loss)

7.0 पुनरवलोकन (Review)

तल दिइएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) सुवासले एउटा झोलालाई रु. 750 मा किनेर रु. 800 मा बेचेछन् भने सुवासलाई कति नाफा वा घाटा भयो ?

(ख) कमलाले रु. 1000 मा किनेर ल्याएको झोलामा सामान्य खोट देखेपछि रु. 900 मा बेचेछन् । कमलालाई कति नाफा वा घाटा के भयो ?

सुवासले झोलालाई थोरै मूल्यमा किनेर धेरै मूल्यमा बेचेका छन् । त्यसैले नाफा भयो । त्यसैगरी नरेन्द्रले धेरै मूल्यमा किनेर थोरैमा बेचेकाले नोक्सान भयो ।

नाफा भनेको विक्रय मूल्य र क्रय मूल्यको फरक हो ।

नाफा (profit) = विक्रय मूल्य (selling price) – क्रय मूल्य (cost price) हुन्छ ।

नोक्सान (loss) = क्रय मूल्य (cost price) – विक्रय मूल्य (selling price) हुन्छ ।

7.1 प्रतिशत समावेश भएका नाफा र नोक्सानसम्बन्धी समस्या (Problems of Profit and Loss with Percentage)

क्रियाकलाप 1

तलको अवस्थाको अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

मानकाजी एक व्यापारी हुन् । उनले होलसेल पसलबाट प्रत्येक टिसर्टलाई रु. 1000 का दरले किनेका थिए । पहिलो टिसर्ट बेच्दा रु. 1200 मा बेचे । यसैगरी दोस्रो टिसर्टमा अलिकति उधिएको देखेपछि त्यसलाई मर्मत गरी रु. 950 मा बेचे ।

(क) पहिलो टिसर्टमा कति नाफा भयो ?

(ख) दोस्रो टिसर्टमा कति नोक्सान भयो ?

(ग) पहिलो टिसर्टमा भएको नाफालाई प्रतिशतमा कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(घ) दोस्रो टिसर्टमा कति प्रतिशत नोक्सान भएछ ? यसलाई कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

पहिलो टिसर्टमा, क्रय मूल्य = रु. 1000 विक्रय मूल्य = रु. 1200 नाफा = रु. 1200 − रु. 1000 = रु. 200 अब $\frac{\text{रु.}200}{\text{रु.}1000} \times 100\%$ = 20% (नाफा प्रतिशत हो ।)	दोस्रो टिसर्टमा, क्रय मूल्य = रु. 1000 विक्रय मूल्य = रु. 950 नोक्सान = रु. 1000 − रु. 950 = रु. 50 अब $\frac{\text{रु.}50}{\text{रु.}1000} \times 100\%$ = 5% (नोक्सान प्रतिशत हो ।)

$$\text{नाफा प्रतिशत} = \frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्र.मू.}} \times 100\%$$

$$\text{नोक्सान प्रतिशत} = \frac{\text{वास्तविक नोक्सान}}{\text{क्र.मू.}} \times 100\%$$

उदाहरण 1

राजेशले रु. 1200 मा किनेको एउटा घडीलाई रु. 1500 मा बेचेछन् । उसलाई नाफा वा नोक्सान के कति भएछ ? प्रतिशतमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ घडीको क्रय मूल्य = रु. 1200

घडीको विक्रय मूल्य = रु. 1500

क्रय मूल्यभन्दा विक्रय मूल्य धेरै छ, त्यसैले नाफा भयो ।

अब नाफा = विक्रय मूल्य − क्रय मूल्य

= रु.1500 − रु. 1200

= रु. 300

$$\text{नाफा प्रतिशत} = \frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्र.मू.}} \times 100\%$$

$$= \frac{\text{रु.}300}{\text{रु.}1200} \times 100\%$$

= 25%

अतः राजेशलाई उक्त घडी बेच्दा 25% नाफा भएछ ।

उदाहरण 2

ज्योतिले रु. 2500 मा किनेको एउटा विद्युतीय हिटरलाई 10% नाफामा बेच्ने सोच गरीन् । उनले उक्त हिटर कतिमा बेच्नुपर्ला ?

समाधान

यहाँ हिटरको क्रय मूल्य = रु. 2500

नाफा प्रतिशत = 10%

हिटरको विक्रय मूल्य = ?

उक्त हिटरको क्रय मूल्य रु. 2500 मा नाफा 10% निकालेर जोड्नु नै विक्रय मूल्य हुन्छ ।

वास्तविक नाफा = रु. 2500 को 10%

$= \text{रु. } 2500 \times \frac{10}{100}$

= रु. 250

अब विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + नाफा

= रु.2500 + रु. 250

= रु. 2750

अतः ज्योतिले 10% नाफा कमाउन उक्त हिटर रु. 2750 मा बेच्नुपर्दछ ।

उदाहरण 3

एउटा मोबाइल पसलेले कुनै मोबाइल रु. 21,000 मा बिक्री गर्दा 5% नाफा भएछ ।

(क) उक्त मोबाइलको क्रय मूल्य कति रहेछ ?

(ख) 10% नाफा गर्न कतिमा बेच्नुपर्ला ?

समाधान

यहाँ मोबाइलको विक्रय मूल्य = रु. 21,000

नाफा प्रतिशत = 5%

मोबाइलको क्रय मूल्य = ?

(क) मोबाइलको क्रय मूल्य = x (मानौँ)

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + नाफा हुन्छ ।

त्यसैले, रु. 21000 = x + x को 5%

अथवा रु. $21000 = x + \frac{x \times 5}{100}$

अथवा रु. $21000 = \frac{100x + 5x}{100}$

अथवा रु. $21000 = \frac{105x}{100}$

अथवा $105x =$ रु. 21000×100

अथवा $x =$ रु. $\frac{21000 \times 100}{105}$

अथवा $x =$ रु. 20,000

अतः उक्त मोबाइल रु. 20,000 मा किनेको रहेछ ।

(ख) 10% नाफा गर्नका लागि बेच्नुपर्ने मूल्य (वि.मू) निकाल्दा,

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + नाफा

= रु. 20,000 + रु. 20,000 को 10%

= रु. 20,000 + रु. $20,000 \times \frac{10}{100}$

= रु. 20,000 + रु. 2,000

= रु. 22,000

अतः 10% नाफा गर्न उक्त मोबाइल रु. 22,000 मा बेच्नु पर्दछ ।

अभ्यास 7.1

1. तल दिइएको अवस्थाहरूमा नाफा वा नोक्सान प्रतिशत के कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

क्रय मूल्य (रु.)	विक्रय मूल्य (रु.)
300	350
550	500
7000	7720
5000	2750
12000	15000

2. अजयले एउटा टेलिभिजन रु. 30,500 मा किनेर रु. 29,000 मा बेच्दा उसलाई कति प्रतिशत नोक्सान हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा साडीलाई रु. 3300 मा बिक्री गर्दा 10% नाफा भएछ भने उक्त साडीको क्रय मूल्य कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा रु. 30,000 मा किनेको मोबाइललाई 10% नाफा हुनेगरी बिक्री गर्दा कतिमा बेच्नुपर्ला ?

5. एउटा फलफूल पसलेले प्रति किलोग्राम रु. 55 का दरले 10 kg सुन्तला किनेछ । प्रति किलोग्राम रु. 60 का दरले सबै सुन्तला बिक्री गर्दा पसलेलाई कति प्रतिशत नाफा हुन्छ ?

6. सुकमानले 50 ओटा बल्बहरू प्रत्येकलाई रु. 40 का दरले किनेछन् । प्याकेट खोलेर हेर्दा 15 ओटा बल्बहरू फुटेका रहेछन् । बाँकी बल्बहरू रु. 160 का दरले बेचेछन् । उनलाई के कति नाफा वा नोक्सान भयो, प्रतिशतमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. एउटा पुस्तक पसलेलाई एउटा किताब रु. 575 मा बेच्दा 15% नाफा भएछ । उक्त किताब कति मूल्यमा किनिएको रहेछ ? वास्तविक नाफा रकम कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. राजेन्द्रले रु. 32500 मा एउटा रेफ्रिजेरेटर किनेछन् । उक्त सामान ल्याउन ढुवानी भाडा रु. 500 खर्च गरेछन् । उनले उक्त रेफ्रिजेरेटरलाई रु. 33500 मा बेचेछन् भने कति प्रतिशत नाफा भएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. आइतमानले पूरानो घर रु. 95,00,000 मा किनेछन् । घर मर्मतका लागि रु. 200,000 खर्च गरेछन् । मर्मतपछि उक्त घर रु. 1,10,00,000 मा बेचेछन् भने उनलाई कति नाफा वा नोक्सान के भएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. बासमतीले प्रति दर्जन रु. 190 का दरले 20 दर्जन केरा किनिछन् । प्याकेट खोल्दा 3 दर्जन केरा बिग्रिएको रहेछ । अब 10% नाफामा बेच्नका लागि बाँकी केरालाई कुन दरमा बेच्नुपर्दछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

फरक फरक दुईओटा पसलबाट कुनै पनि पाँचओटा वस्तुहरूको मूल्य सोधि टिपोट गर्नुहोस् । तपाईंलाई कुन पसलबाट कुन सामान किन्दा कति प्रतिशत नाफा हुँदोरहेछ ? निष्कर्षलाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) नाफा 16.66% (ख) नोक्सान 9.09% (ग) नाफा 10.28%
   (घ) नोक्सान 45% (ङ) नाफा 25%
2. नोक्सान 4.91%
3. रु. 3,000
4. रु. 33,000
5. 9.09%
6. नोक्सान 20%
7. रु. 500, 15%
8. 1.51%
9. नाफा 13.40%
10. प्रति दर्जन रु. 118

पाठ 8

ऐकिक नियम
(Unitary Method)

8.0 पुनरवलोकन (Review)

लक्ष्मीले 30 कोसा केराहरू रु. 225 मा किनेर ल्याइछन् । घरमा पाहुनाहरू आउनुभएकाले केरा नपुग्ने भएछ । फेरि 12 ओटा केराहरू थप्नुपर्ने भएछ ।

(क) उनलाई अब 12 ओटा केराहरू किन्नका लागि कति रकम आवश्यक पर्ला ?

(ख) 1 ओटा केराको मूल्य पत्ता लगाउन के गर्नुपर्दछ ?

(ग) 12 ओटा केराको मूल्य कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

कुनै एक एकाइ वस्तुको मानका आधारमा उस्तै धेरै वस्तुको मान पत्ता लगाउने र उस्तै धेरै वस्तुको मानबाट एउटा वस्तुको मान पत्ता लगाउने गणितीय विधिलाई ऐकिक नियम भनिन्छ ।

8.1 प्रत्यक्ष विचरण (Direct Variation)

क्रियाकलाप 1

तलको तालिकामा कापीको सङ्ख्या र मूल्य दिइएको छ, दिइएका मूल्यका आधारमा तलको तालिकामा मूल्यहरू भर्नुहोस् :

कापीको सङ्ख्या	1	2	3	4	5	6
जम्मा मूल्य (रु.)	50	100	150			

कापीको सङ्ख्या र मूल्यबिच कस्तो सम्बन्ध रहेको छ, छलफल गर्नुहोस् ।

माथिको तालिकाबाट कापीको सङ्ख्या बढ्दै जाँदा मूल्य बढ्दै गएको छ र कापीको सङ्ख्या घट्दा मूल्य पनि घटेको देख्न सकिन्छ । त्यसैले कापीको सङ्ख्या र मूल्य बिच प्रत्यक्ष विचरण भएको भानिन्छ ।

दुईओटा चरहरू ध्ये एउटा चरमा भएको कमी वा वृद्धिले अर्को चरमा पनि त्यही अनुपातमा कमी वा वृद्धि देखिन्छ भने ती चरहरूको सम्बन्धलाई प्रत्यक्ष विचरण भनिन्छ ।

उदाहरण 1

3 ओटा कापीको मूल्य रु. 270 पर्दछ भने 5 ओटाको कापीको मूल्य कति पर्ला ?

3 ओटा कापीको मूल्य थाहा छ भने 5 ओटाको मूल्य कसरी निकाल्ने ?

ल सुन ! पहिला 3 ओटा कापीको मूल्यबाट एउटा कापीको मूल्य निकाल्ने । त्यसपछि जतिओटा कापीको मूल्य पनि निकाल्न सकिन्छ ।

समाधान

यहाँ 3 ओटा कापीको मूल्य = रु. 270

1 ओटा कापीको मूल्य $= \frac{\text{रु. } 270}{3} =$ रु. 90

5 ओटा कापीको मूल्य = रु.90 × 5

= रु. 450

अर्को तरिका

यो समस्यालाई अनुपात प्रयोग गरेर पनि समाधान गर्न सकिन्छ ।

कापीको सङ्ख्या	मूल्य (रु.)
3	270
5	x (मानौँ)

यहाँ कापीको सङ्ख्या र मूल्य बिच प्रत्यक्ष विचरण अएकाले यसलाई अनुपातमा निम्नानुसार लेख्न सकिन्छ ।

त्यसैले, $\frac{3}{5} = \frac{270}{x}$

अथवा $3x = 270 \times 5$

अथवा $x = \frac{270 \times 5}{3}$

$\therefore \quad x = 450$

अत: 5 ओटा कापीको मूल्य रु. 450 पर्दछ ।

प्रत्यक्ष विचरणमा दुवै चरहरू समान अनुपातमा घट्ने वा बढ्ने भएकाले अनुपातलाई $\frac{5}{3} = \frac{x}{270}$ पनि लेख्न सकिन्छ ।

8.2 अप्रत्यक्ष विचरण (Indirect Variation)

क्रियाकलाप 2

तलको तालिकाको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गर्नुहोस् :

कामदार सङ्ख्या	1	2	5
काम पूरा गर्न लाग्ने दिन	10	5	2

कामदार सङ्ख्या र काम पूरा गर्न लाग्ने दिनबिच कस्तो सम्बन्ध छ ?

माथिको तालिकामा कामदारको सङ्ख्या बढाउँदै जाँदा काम पूरा गर्न लाग्ने दिन घट्दै गएको देखिन्छ । अतः कामदारको सङ्ख्या र काम पूरा गर्न लाग्ने दिनका बिचको सम्बन्ध विपरीत हुन्छ । यसलाई अप्रत्यक्ष विचरण भएको मानिन्छ ।

दुईओटा चरहरूमध्ये एउटा चरमा भएको कमी हुँदा अर्को चरमा वृद्धि हुन आउँछ भने ती चरहरूबिचको सम्बन्धलाई अप्रत्यक्ष विचरण भनिन्छ ।

उदाहरण 2

12 जना मानिसले एउटा खेत खन्न 20 दिन लगाउँछन् भने सोही खेत 8 जनाले खन्न कति दिन लगाउँछन् ?

समाधान

यहाँ 12 जना मानिसबाट 8 जना मानिस बनाइएको छ । (मानिसको सङ्ख्या घटाइएको छ । त्यसैले तोकिएका काम सिध्याउन धेरै दिन लाग्छ ।)

12 जना मानिसले 20 दिनमा एउटा खेत खन्न सक्छन्

1 जना मानिसले 20×12 दिनमा एउटा खेत खन्न सक्छन् ।

8 जना मानिसले $\frac{20 \times 12}{8} = 30$ दिनमा एउटा खेत खन्न सक्छन् ।

अतः 12 जना मानिसले 30 दिनमा उक्त खेत खन्न सक्छन् ।

अर्को तरिका

यहाँ

मानिसको सङ्ख्या	काम गर्ने दिन
12	20
8	x (मानौं)

काम गर्ने दिन र मानिसको सङ्ख्याबिच अप्रत्यक्ष विचरण छ । त्यसैले थोरै मानिस भए धेरै दिन र धेरै मानिस भए थोरै दिन चाहिन्छ ।

त्यसैले $\frac{20}{x} = \frac{8}{12}$

अथवा $8x = 20 \times 12$

अथवा $x = \frac{20 \times 12}{8}$

अथवा $x = 30$

अप्रत्यक्ष विचरण भएकाले $\frac{x}{20} = \frac{12}{8}$ पनि लेख्न सकिन्छ ।

अतः 12 जना मानिसले 30 दिनमा उक्त खेत खन्न सक्छन् ।

अभ्यास 8.1

1. तलका तथ्यहरू ठिक भए (√) र बेठिक भए (×) चिह्न लगाउनुहोस् :

(क) कुनै पनि वस्तुको सङ्ख्या बढाउँदै जाँदा मूल्य पनि बढ्दै जानु प्रत्यक्ष विचरण हो ।

(ख) मानिसको सङ्ख्या र काम गर्नका लागि लाग्ने समयबिच प्रत्यक्ष विचरण हुन्छ ।

(ग) एउटा बसलाई निश्चित दूरी पार गर्न लाग्ने समय र बसले पार गर्ने दुरीबिच प्रत्यक्ष विचरण हुन्छ ।

(घ) खानेपानीको पाइपको पानी भर्ने क्षमता र लाग्ने समयबिच अप्रत्यक्ष विचरण हुन्छ ।

(ङ) हात र औँलाको सङ्ख्याबिच प्रत्यक्ष विचरण हुन्छ ।

2. 5 kg चिनीको मूल्य रु. 450 पर्छ भने 3 kg चिनीको मूल्य कति पर्ला ?

3. एउटा मोटरसाइकल 8 / पेट्रोलले 320 km गुड्छ । 50 km यात्रा गर्न कति लिटर पेट्रोलको आवश्यकता पर्ला ?

4. 15 जना मानिसले एउटा खेत खन्न 16 दिन लगाउँछन् भने सोही खेत 8 जनाले खन्न कति दिन लगाउँलान् ?

5. 30 जना मानिसले 17 दिनमा खेतमा बाली लगाउन सक्छन् । अमरले सोही काम 10 दिनमा सक्न चाहन्छन् भने कति जना कामदार आवश्यक पर्ला ?

6. यदि एउटा उद्योगको मेसिनले 3 घण्टामा 6600 ओटा बोतलमा पेय पदार्थ भर्दछ भने 8 घन्टामा कतिओटा बोतल भर्न सक्छ ?

7. रमाले 3 kg दाल र 2 kg चिनी रु.540 मा किनिछन् । यदि 1 kg चिनीको मूल्य रु. 90 पर्छ भने 1 kg दालको मूल्य कति पर्ला ?

8. एक जना साइकल चालकले प्रतिघन्टा 15 किलोमिटर दुरी पार गर्न सक्छ भने उसको गति कति मिटर प्रति मिनेट होला ?

9. एउटा सिबिरमा 50 जना मानिसलाई 54 दिनलाई पुग्ने खाना छ । केहि समयपछि 10 जना मानिस थपिएछन् । अब 60 जनालाई उक्त खानाले कति दिनलाई पुग्ला ?

10. तलको तालिकामा चामलको तौल र मूल्यलाई देखाइएको छ । उक्त तौल र मूल्यका आधारमा खाली ठाउँ भर्नुहोस् । (प्रक्रिया देखाउनुहोस् ।)

क्र.स.	चामलको तौल (kg)	चामलको मूल्य (रु.)
	10	12500
(क)	1	
(ख)		375
(ग)	9	
(घ)		3125

परियोजना कार्य

हाम्रो दैनिक जीवनमा प्रयोग भइरहेका प्रत्यक्ष विचरण र अप्रत्यक्ष विचरण सम्बन्धी पाँच पाँचओटा अवस्थाहरूलाई आफूभन्दा अग्रज वा इन्टरनेटबाट खोजेर लेख्नुहोस् र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. रु. 270	3. 1.25 l	4. 30 दिन	5. 51
6. 17600	7. रु. 120	8. 250 मिनेट	9. 45 दिन
10. (क) रु.125	(ख) 3	(ग) 1125	(घ) 25

मिश्रित अभ्यास

1. तीनओटा फरक फरक ठाउँका सडक पार गर्ने ट्राफिक बत्तीहरू क्रमशः प्रत्येक 48 सेकेन्ड, 72 सेकेन्ड र 108 सेकेन्डमा परिवर्तन भइरहँदा रहेछन् । यदि तिनीहरू सबै एकैसाथ बिहान 9:00 बजे परिवर्तन भए भने पुनः अर्को पटक कहिले सँगै परिवर्तन हुनेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. विमलाले पाँचओटा क्रेटमा 150 ओटा अण्डा किनेर कार्टुनमा राखेर ल्याइछन् । घर मा आएपछि अण्डाको कार्टुन खोलेर हेर्दा 30 ओटा अण्डा फुटेका पाइछन् ।

(क) बाँकी अण्डाहरू प्रत्येकलाई रु. 15 मा बेच्दा उनलाई 10% नोक्सान भएछ भने 150 ओटा अण्डा कतिमा किनेकी रहिछन् ?

(ख) 5% नाफा गर्नका लागि बाँकी अण्डालाई कुन दरमा बेच्नुपर्ला ?

3. एउटा विद्यालयको भवनलाई रङरोगन गर्न लागिएको रहेछ । 6 जना कामदारले 520.2 m पर्खाल एक घण्टामा रङ्ग्याउन सक्दारहेछन् ।

(क) 7 जना कामदारले एक घन्टामा कति मिटर पर्खाल रङ्ग्याउन सक्लान् ?

(ख) 3641.4 मिटर पर्खाल रङ्ग्याउन 7 जनालाई कति घन्टा काममा लगाउनुपर्ला ?

4. a, b र c तीनओटा पूर्णाङ्कहरू हुन् । यदि a = – 25, b = 8 र c = – 4 भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(ख) $a \times (b + c) = ab + ac$

5. कुनै दुईओटा पूर्णाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) जसको योगफल –5 हुन्छ ।

(ख) जसको फरक –7 हुन्छ ।

(ग) जसको फरक 0 हुन्छ ।

6. एन्जलले 200 पूर्णाङ्कको प्रथम त्रैमासिक परीक्षामा 150 अङ्क प्राप्त गरेछन् र एलेक्साले 300 पूर्णाङ्कको परीक्षामा 180 अङ्क प्राप्त गरीछन् । कसको नतिजा राम्रो छ, तुलना गरेर देखाउनुहोस् ।

7. प्रवेश परीक्षामा प्रत्येक सही उत्तरका लागि (+5) र प्रत्येक गलत उत्तरका लागि (–2) र उत्तर दिन नसके (0) दिने नियम रहेछ ।

(क) रामले जम्मा 7 ओटा प्रश्नहरू गरेछन्, जसमध्ये 4 ओटाको सही उत्तर र 3 ओटाको गलत उत्तर लेखेछन् । जम्मा कति अङ्क प्राप्त गर्लान् ?

(ख) रुचिताले जम्मा 8 ओटा प्रश्नहरू गरीछन् । जसमध्ये 4 ओटाको सही उत्तर र 4 ओटाको गलत उत्तर लेखिछन् । जम्मा कति अङ्क प्राप्त गर्ि र्लन् ?

(ग) कसले बढी अङ्क प्राप्त गर्दछन् र कति ले ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. एउटा विद्यालयमा भएको हाजिरी जवाफ प्रतियोगितामा प्रत्येक सही उत्तरका लागि (+5) र प्रत्येक गलत उत्तरका लागि (–2) दिने नियम रहेछ ।

(क) रातो सदन समूहले 30 अङ्क प्राप्त गरेछ जसमा 10 ओटा प्रश्नको उत्तर गलत दिएछ भने कतिओटा प्रश्नको सही जवाफ दिएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) हरियो सदन समूहले (–12) अङ्क प्राप्त गरेछ जसमा 16 ओटा प्रश्नको उत्तर गलत दिएछ भने कतिओटा प्रश्नको सही जवाफ दिएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) कुन समूहले धेरैओटा प्रश्नको सही जवाफ दिएछ ? र कतिले लेख्नुहोस् ।

9. अनुजाले पहिलो दिन एउटा किताबको $\frac{1}{5}$ पेज पढिछन्। दोस्रो दिन 40 पेज पढिछन्। उनीले दुई दिनसम्ममा उक्त किताबको $\frac{7}{10}$ भाग पृष्ठ पढिछन् भने किताबमा जम्मा कति पृष्ठ रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. $\frac{1}{4}$ र $\frac{2}{5}$ को बिचमा पर्ने कुनै दुईओटा आनुपातिक सङ्ख्याहरू लेख्नुहोस् ।

उत्तर

1. 8:7:12 hours	2. (क) Rs. 3000	(ख) Rs. 17.5
3. (क) 606.9m	(ख) 6 hours	4. शिक्षकलाई देखाउने
5. शिक्षकलाई देखाउने	6. एन्जल	
7. (क) 14	(ख) 12	(ग) राम, 2 अङ्क बढी
8. (क) 10	(ख) 4	(ग) रातो सदन, 6 प्रश्न
9. 80	10. $\frac{9}{40}, \frac{19}{80}$	

पाठ 9 परिमिति, क्षेत्रफल र आयतन (Perimeter, Area and Volume)

9.0 पुनरवलोकन (Review)

माथि दिइएका ठोस वस्तुहरू फरक फरक आकारका छन् । यिनीहरूको आकार, भुजाको लम्बाइ, क्षेत्रफल र वरिपरिको घेराको लम्बाइबारे कक्षामा उपयुक्त समूह बनाई तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) प्रत्येक आकृतिको नाम लेख्नुहोस् ।

(ख) प्रत्येक ठोस वस्तुको माथिल्लो सतहको परिमिति निकाल्नुहोस् ।

(ग) प्रत्येक ठोस वस्तुको सतहको क्षेत्रफल कसरी निकाल्न सकिन्छ ?

9.1 त्रिभुजाकार सतहको परिमिति (Perimeter of triangular face)

क्रियाकलाप 1

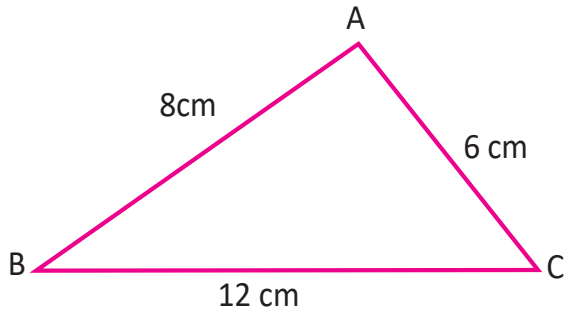
उपयुक्त सङ्ख्यामा समूहमा बस्नुहोस् । तपाईंको ज्यामिति बाकसमा भएको एउटा सेट स्क्वाएरको तीनओटा किनाराको लम्बाइको नाप लिनुहोस् । उक्त सेट स्क्वाएरको परिमिति कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

त्रिभुजको वरिपरिको घेराको कूल नापलाई त्रिभुजको परिमिति (Perimeter) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

दिइएको त्रिभुजको परिमिति निकाल्नुहोस् :

समाधान



यहाँ त्रिभुजको भुजा (AB) = 8 cm

त्रिभुजको भुजा (BC) = 12 cm

त्रिभुजको भुजा (AC) = 6 cm

त्रिभुजको परिमिति (P) = ?

अब P = AB + BC + AC

= 8 cm + 12 cm + 6 cm

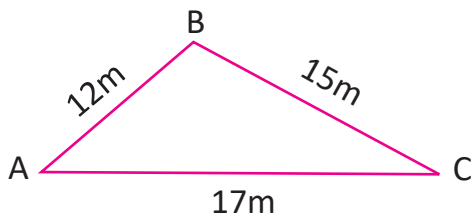
= 26 cm

अत: त्रिभुजको परिमिति (P) = 26 cm

उदाहरण 2

अनुपमाले 15 मिटर, 17 मिटर र 12 मिटर नाप भएका त्रिभुजाकार जग्गा खरिद गरीछिन् भने उनले वरिपरि पर्खाल लगाउँदा कति लम्बाइको पर्खाल लगाउनुपर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान



यहाँ जग्गाको एउटा किनारा (a) = 15 m

जग्गाको दोस्रो किनारा (b) = 17 m

जग्गाको तेस्रो किनारा (c) = 12 m

जग्गाको परिमिति (P) = ?

अब P = a + b + c

= (15 + 17 + 12) m

= 44 m

अत: जग्गाको वरिपरि लागाइएको पर्खालको लम्बाइ 44 m छ ।

उदाहरण 3

वरिपरिको घेराको नाप 400 मिटर रहेको त्रिभुजाकार पार्कको पहिलो किनाराको लम्बाइ 120 मि.र तेस्रो किनाराको लम्बाइ 180 मि. रहेछ भने दोस्रो किनाराको लम्बाइ कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ पार्कको परिमिति (P) = 400 m

पार्कको पहिलो किनारा (a) = 120 m

पार्कको तेस्रो किनारा (c) = 180 m

पार्कको दोस्रो किनारा (b) = ?

अब $p = a + b + c$

अथवा $400 = 120 + b + 180$

अथवा $400 - 300 = b$

$b = 100$

अतः उक्त पार्कको दोस्रो किनाराको लम्बाइ 100 m रहेछ ।

उदाहरण 4

दियाले 10 m, 12 m र 14 m भएको त्रिभुजाकार तरकारी बारीमा बार लगाउँदा 15 पटक घेरा लगाउन प्रतिमिटर रु. 20 पर्ने तार प्रयोग गरीन भने जम्मा कति खर्च गरीन्, निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ तरकारी बारीको पहिलो किनारा (a) = 10 m

तरकारी बारीको दोस्रो किनारा (b) = 12 m

तरकारी बारीको तेस्रो किनारा (c) = 14 m

तरकारी बारीको परिमिति (P) = ?

अब $P = a + b + c$

$= (10 + 12 + 14)$ m

$= 36$ m

एक पटक घेरा लगाउँदा लाग्ने तारको लम्बाइ = 36 m

$\therefore$ 15 पटक घेरा लगाउँदा लाग्ने तारको लम्बाइ $= 36 \times 15$ m $= 540$ m

प्रतिमिटर तारको मूल्य = Rs. 20

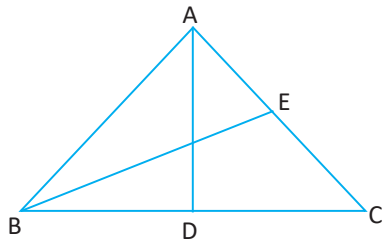
∴ 540 m तारको मूल्य = 540 × 20 = Rs. 10,800

अतः उनले बारीमा तारले घेरा लगाउँदा रु 10,800 खर्च गरीन् ।

उदाहरण 5

सिन्काहरू प्रयोग गरेर चित्रमा दिइएको जस्तो आकृति बनाइएको छ । यसमा AD = BE = 7cm र AB = BC = CA = 7.5cm छ भने सिन्काहरूको जम्मा लम्बाइ निकाल्नुहोस् ।

समाधान



यहाँ AD = BE = 7cm र AB = BC = CA = 7.5cm

सिन्काको जम्मा लम्बाइ = AB + BC + CA + AD + BE

= 7.5 + 7.5 + 7.5 + 7 + 7

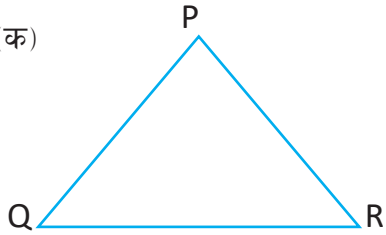
= 36.5 cm

अतः सिन्काको जम्मा लम्बाइ 36.5cm छ ।

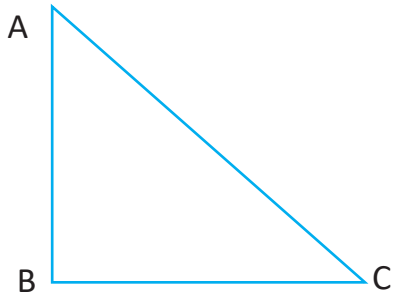
अभ्यास 9.1

1. तलका दिइएका त्रिभुजका भुजाहरू नापी परिमिति पत्ता लगाउनुहोस् :

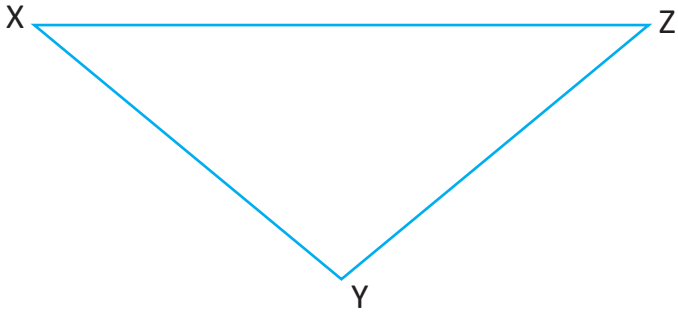
(क)



(ख)

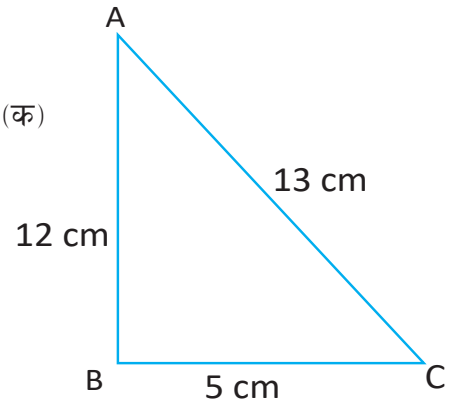


(ग)

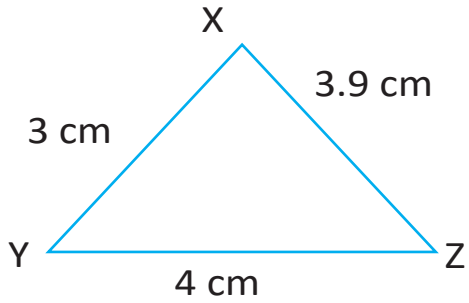


2. तल दिइएका त्रिभुजको परिमिति निकाल्नुहोस् :

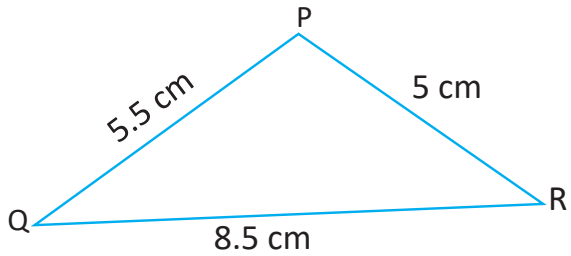
(क)



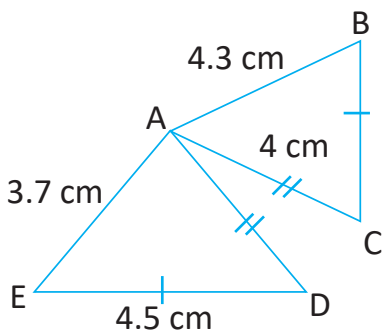
(ख)



(ग)



3. तल दिइएका त्रिभुजहरूको परिमिति निकाल्नुहोस् :

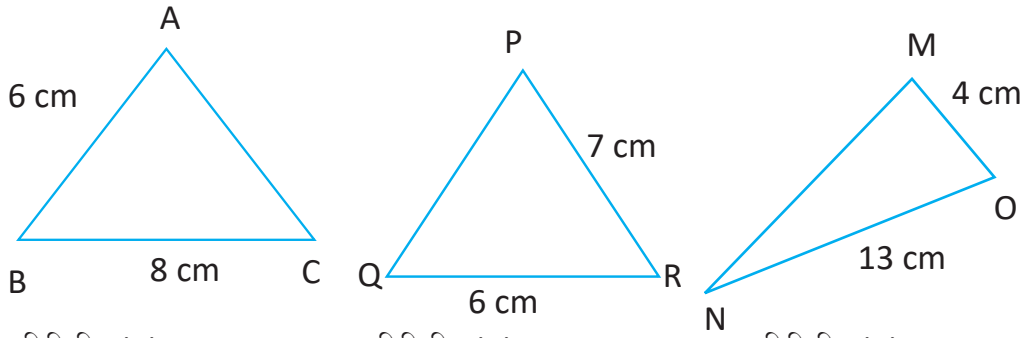


4. रामले वरिपरिको लम्बाइ 40 cm भएको कागजको त्रिभुज बनाउँदा दुई भुजाको लम्बाइ क्रमश 14 cm र 16 cm छ भने तेस्रो भुजाको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. 540 मि. लम्बाइको तारले एउटा 18 m भुजा भएको समबाहु त्रिभुजाकार भएको जग्गालाई घेरा लगाउँदा कति पटक घेरा लगाउँन सकिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. एउटा त्रिभुजाकार फूलबारीको 3 ओटा किनाराहरूमध्ये पहिलो किनाराको लम्बाइ, 12 ft र बाँकी 2 ओटा बराबर नापका किनाराहरूको लम्बाइ 7 ft छ । उक्त त्रिभुजाकार फूलबारीलाई प्रतिफिट 60 पैसा पर्ने प्लास्टिक डोरीले 20 पटक घेरा लगाउँदा जम्मा कति खर्च लाग्छ ?

7. तल दिइएका त्रिभुजको नदिएको भुजाको लम्बाइ निकाल्नुहोस् ।



परिमिति (P) = 19 cm परिमिति (P) = 23 cm परिमिति (P) = 28 cm

परियोजना कार्य

तपाईंको कक्षाकोठामा भएका डेस्क, बेन्च वा टेबुलको माथिल्लो सतहका सबै किनाराको लम्बाइ नाप्नुहोस् र परिमिति पत्ता लगाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउने ।
2. (क) 13 cm (ख) 19 cm (ग) 30 cm
3. 12.2 cm, 12.8 cm
4. 10 cm 5. 10 पटक 6. रु 312
7. (क) 5 cm (ख) 10 cm (ग) 11 cm

9.2 षड्मुखा र घन (Cuboid and Cube)

9.2.1 षड्मुखाको पूरा सतहको क्षेत्रफल (Total surface area of cuboid)

क्रियाकलाप 1

एउटा षड्मुखा लिनुहोस् र यसको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ छुट्याउनुहोस् । उक्त षड्मुखामा बनेका आयताकार सतहहरू कक्षामा छलफल गरी छुट्याउनुहोस् ।

देखाइएको षड्मुखामा रहेका आयताकार सतह क्रमश ABCD, ABGF, ADEF, BCMG, CDEM, GFEM छन् ।

यहाँ आयत ABCD को क्षेत्रफल (A_1) $= CD \times AD$

$= b \times h = bh$

आयत ABGF को क्षेत्रफल (A_2) $= AB \times AF$

$= b \times l = lb$

आयत ADEF को क्षेत्रफल (A_3) $= AD \times AL$

$= h \times l = hl$

आयत BCMG को क्षेत्रफल (A_4) $= BG \times BC$

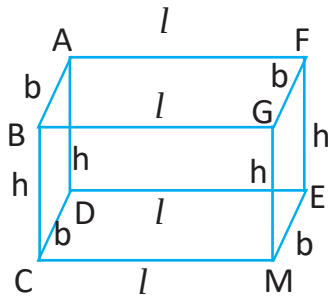
$= l \times h = lh$

आयत CDEM को क्षेत्रफल (A_5) $= CD \times DE$

$= b \times l = bl$

आयत GFEM को क्षेत्रफल (A_6) $= GF \times GA$

$= b \times h = bh$



यो षड्मुखाको जम्मा क्षेत्रफल (A) $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$

$= bh + lb + lh + lh + lb + bh$

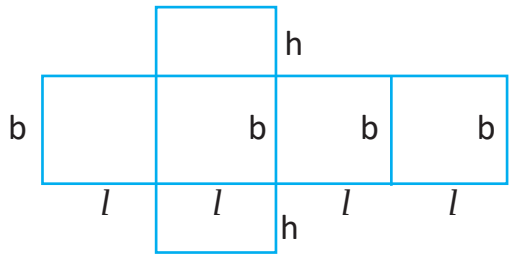
$= 2lb + 2bh + 2lh$

$= 2(lb + bh + lh)$

षड्मुखाको पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + lh)$ हुन्छ ।

क्रियाकलाप 2

एउटा बिस्कुटको कार्टुन लिनुहोस् र यसको लम्बाइ (l), चौडाइ (b) र उचाइ (h) छुट्याउनुहोस् । उक्त कार्टुन खोलेर यसका प्रत्येक भागलाई नाम दिनुहोस् :



अब कक्षामा साथीहरूसँग छलफल गरी प्रत्येक आयताकार सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

अब कार्टुनको भूइँ र माथिको भागको क्षेत्रफल = $lb + lh$

कार्टुनको अगाडि र पछाडिको भागको क्षेत्रफल = $bh + bh$

कार्टुनको छेउको भागको क्षेत्रफल = $lh + lb$

अब सबै आयताकार भागको क्षेत्रफललाई जोड्नुहोस् ।

अतः कार्टुनको पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 2lb + 2bh + 2lh$

$= 2(lb + bh + lh)$

यसरी माथिको बिस्कुटको कार्टुनको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ नापी बास्तबिक क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 3

लम्बाइ 4cm, चौडाइ 3cm र उचाइ 2 cm भएको एउटा षड्मुखाको पूरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

यहाँ लम्बाइ (l) = 4 cm

चौडाइ (b) = 3 cm

उचाइ (h) = 2 cm

पूरासतहको क्षेत्रफल (A) = ?

अब पूरा सतहको क्षेत्रफल (A) = $2(lb + bh + lh)$

$= 2(4 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 2)$

$= 2(12 + 6 + 8$

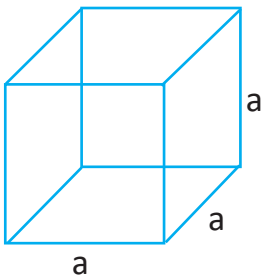
$= 52\ cm^2$

अतः षड्मुखाको पूरा सतहको क्षेत्रफल $52\ cm^2$ छ ।

9.2.2 घनको पूरा सतहको क्षेत्रफल (Total surface area of a cube)

क्रियाकलाप 4

एउटा लुडोको गोटी लिनुहोस् र उक्त गोटीको किनाराको लम्बाइ नाप्नुहोस् । यसका सबै भुजाको लम्बाइ बराबर पाउनुहुने छ ।



यहाँ लम्बाइ (l) = चौडाइ (b) = उचाइ (h) हुन्छ ।

लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ बराबर भएको षड्मुखालाई घन (Cube) भनिन्छ ।

अब $l = b = h = a$ मानौँ

षड्मुखाको सतहको क्षत्रफल $(A) = 2(lb + bh + lh)$

$= 2(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a)$

$= 2(a^2 + a^2 + a^2)$

$= 6a^2$

अत: घनको पूरासतहको क्षेत्रफल $(A) = 6a^2$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

उदाहरण 1

एउटा ज्यामिति बाकसको लम्बाइ (l) = 15 cm, चौडाइ (b) = 7 cm र उचाइ (h) = 3 cm छ भने उक्त बाकसको पूरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस :

समाधान

यहाँ लम्बाइ (l) = 15 cm

चौडाइ (b) = 7 cm

उचाइ (h) = 3cm

ज्यामिति बाकसको क्षेत्रफल (A) = ?

अब सूत्रानुसार क्षेत्रफल $(A) = 2(lb + bh + lh)$

$= 2(15 \times 7 + 7 \times 3 + 15 \times 3)$

$= 2(105 + 21 + 45)$

$= 342\ cm^2$

अत: उक्त बाकसको क्षेत्रफल $342\ cm^2$ छ ।

उदाहरण 2

एउटा बाकसको लम्बाइ 42 cm, उचाइ 28 cm र पूरा सतहको क्षेत्रफल 7812 cm^2 छ भने उक्त बाकसको चौडाइ निकाल्नुहोस ।

समाधान

यहाँ लम्बाइ (l) = 42 cm

चौडाइ (b) = ?

उचाइ (h) = 28 cm

बाकसको क्षेत्रफल (A) = 7812 cm^2

अब सूत्रानुसार क्षेत्रफल (A) = $2(lb + bh + lh)$

अथवा $7812 = 2(42b + 28b + 42 \times 28)$

अथवा $7812 = 2(70b + 1176)$

अथवा $7812 = 140b + 2352$

अथवा $7812 - 2352 = 140b$

अथवा $\frac{5460}{140} = b$

अथवा $39 = b$

अथवा $b = 39$ cm

अतः उक्त बाकसको चौडाइ 39 cm छ ।

उदाहरण 3

एउटा घनाकार कागजको खेलौनाको एउटा किनाराको लम्बाइ 3.5 cm छ । उक्त खेलौनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस ।

समाधान

यहाँ घनको एउटा भुजाको लम्बाइ (a) = 3.5 cm

पूरा सतहको क्षेत्रफल (A) = ?

अब सूत्रानुसार घनको पूरा सतहको क्षेत्रफल (A) = $6a^2$

$= 6 \times (3.5)^2$

$= 6 \times 12.25$

$= 73.50\ cm^2$

अतः उक्त खेलौनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल (A) = $73.50\ cm^2$ छ ।

उदाहरण 4

एउटा घनाकार वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल $54\ m^2$ छ भने उक्त वस्तुको एउटा किनाराको लम्बाइ निकाल्नुहोस :

समाधान

यहाँ घनाकार वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल (A) = $54\ m^2$

एउटा किनाराको लम्बाइ (a) = ?

अब सूत्रानुसार घनको पूरा सतहको क्षेत्रफल (A) = $6a^2$

अथवा $54 = 6a^2$

अथवा $\frac{54}{6} = a^2$

अथवा $9 = a^2$

अथवा $a = \sqrt{9}$

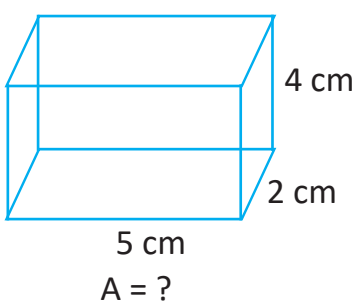
अथवा $a = 3\ m$

अतः उक्त वस्तुको एउटा किनाराको लम्बाइ (a) = 3 m छ ।

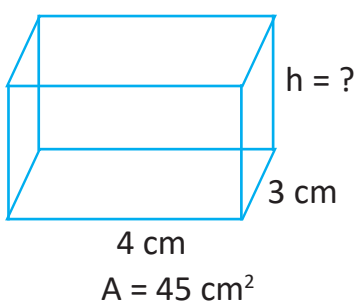
अभ्यास 9.2

1. तलका दिइएका प्रत्येक ठोस वस्तुको थाहा नभएका किनारा वा क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

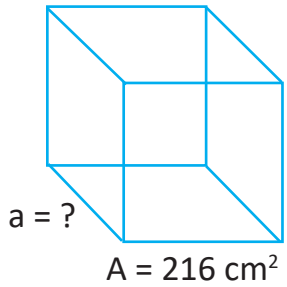
(क)



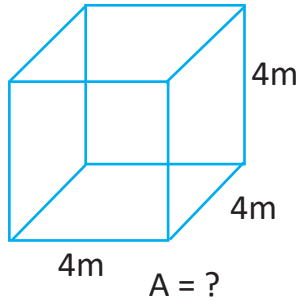
(ख)



(ग)



(घ)



2. (क) एउटा षड्मुखाको लम्बाइ (l) = 10 cm, चौडाइ (b) = 8 cm र पूरा सतहको क्षेत्रफल (A) = 376 cm^2 छ भने उक्त षड्मुखाको उचाइ (h) पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा बिस्कुटको कार्टुनको पूरा सतहको क्षेत्रफल 9400 cm^2 छ । यदि यसको लम्बाइ 50 cm, चौडाइ 30 cm भए उचाइ पत्ता लगाउनुहोस ।

3. (क) एउटा घनाकार वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल 726 m^2 छ भने उक्त वस्तुको एउटा किनाराको लम्बाइ निकाल्नुहोस । उक्त वस्तुलाई भुइँमा राख्दा कति क्षेत्रफल ओगट्थ्यो, पत्ता लगाउनुहोस ।

(ख) एउटा घनाकार वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल 864 cm^2 छ भने उक्त वस्तुको भुजाको लम्बाइ निकाल्नुहोस । यसको बिर्को हटाउँदा यसको बाहिरी भागको कति क्षेत्रफलमा रङ लगाउन सकिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस ?

4. उचाइ 7 cm, चौडाइ 8 cm भएको एउटा डस्टरलाई टेबलमा राख्दा टेबलको 80 cm^2 सतह ढाकेछ भने,

(क) उक्त डस्टरको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) डस्टरको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. तल दिइएका जस्ता षड्मुखाकार तथा घनाकार वस्तुको सतहका किनाराहरूको लम्बाइको नाप लिनुहोस् र उक्त वस्तुका पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क)

(ख)

परियोजना कार्य

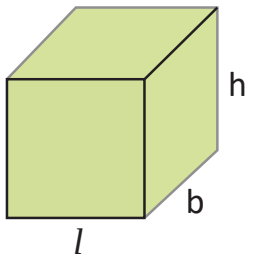
चार्टपेपरबाट एउटा षड्मुखा बनाउनुहोस् । उक्त षड्मुखाको किनाराको नाप लिएर पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) 76 cm^2 (ख) 1.5 cm (ग) 96 cm^2 (घ) 6 cm
2. (क) 6 cm (ख) 40 cm
3. (क) 11 cm, 121 cm^2 (ख) 12 cm, 720 cm^2
4. (क) 10 cm, 412 cm^2
5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

9.4 षड्मुखा र घनको आयतन (Volume of cuboid and cube)

क्रियाकलाप 1



एउटा षड्मुखा आकारको रङ राख्ने भाँडाका किनाराको लम्बाइ (l) = 15 cm चौडाइ (b) = 14 cm र उचाइ (h) = 13 cm छ भने यो रङको भाँडामा कति रङ अटाउँछ कक्षामा साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ लम्बाइ (l) = 15 cm,

चौडाइ (b) = 14 cm

उचाइ (h) = 13 cm

अब यसको आयतन (V) = $l \times b \times h$

= $(15 \times 14 \times 13)$

= 2730 cm^3

अतः यो भाँडामा 2730 cm^3 रङ अटाउँछ ।

क्रियाकलाप 2

एउटा घनाकार चामल राख्ने भाँडोको एउटा किनाराको लम्बाइ 60 cm छ। उक्त भाँडामा कति चामल अटाउँछ कक्षामा साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ घनाकार भाँडाको सबै किनारा बराबर हुने हुनाले लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ प्रत्येक भुजा 60 cm हुन्छ ।

अब यो भाँडाको क्षमता = लम्बाइ × चौडाइ × उचाइ

$= 60 \times 60 \times 60$

$= 216000\ cm^3$

अत: यो भाँडोका आयतल (V) = $216000\ cm^3$ छ ।

अत: घनाकार वस्तुको आयतन (V) = $l \times l \times l$

$V = l^3$

उदाहरण 1

एउटा षड्मुखा आकारको चिनी राख्ने भाँडाको लम्बाइ 3 m, चौडाइ 2 m र उचाइ 1 m छ। उक्त चिनी राख्ने भाँडामा कति चिनी अटाउँछ, पत्ता लगाउनुहोस :

समाधान

यहाँ लम्बाइ (l) = 3 m,

चौडाइ (b) = 2 m

उचाइ (h) = 1 m

भाडाको आयतन (V) = ?

अब सूत्रानुसार (V) = $l \times b \times h$

$= 3 \times 2 \times 1$

$= 6\ m^3$

अत: उक्त भाँडामा $6\ m^3$ चिनी अटाउँछ ।

उदाहरण 2

एउटा षड्मुखा आकारको ट्याङ्कीमा 600 l पानी अटाउँछ । ट्याङ्कीको लम्बाइ 200 cm, उचाइ 50 cm, छ भने चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस :

समाधान

यहाँ आयतन (V) = 600 l

$= \frac{600}{1000} = 0.6\ m^3$ $\quad \left[\because 1\ l = \frac{1}{1000}\ m^3\right]$

लम्बाइ (l) = 200 cm = 2 m

उचाइ (h) = 50 cm = 0.5 m

चौडाइ (b) = ?

अब सूत्रानुसार (V) = $l \times b \times h$

अथवा $0.6 = 2 \times b \times 0.5$

अथवा $0.6 = b$

अथवा $b = \frac{6}{10} = 0.6\ m = 60\ cm$

अथवा $b = 60$

अत: भाँडाका चौडाइ 60 cm छ ।

उदाहरण 3

एउटा षड्मुखाको लम्बाइ चौडाइको तेब्बर छ। यदि यसको उचाइ र आयतन क्रमश 8 cm र 864 cm^3 छ भने पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस :

समाधान

यहाँ आयतन (V) = 864 cm^3

उचाइ (h) = 8 cm

चौडाइ (b) = x cm मानौँ

$\therefore$ लम्बाइ (l) = 3x cm

अब सूत्रानुसार $V = l \times b \times h$

अथवा $864 = 3x \times x \times 8$

अथवा $864 = 24x^2$

अथवा $x^2 = \frac{864}{24} = 36$

अथवा $x = 6$

अथवा $b = 6$ cm

अथवा $l = 3x = 3 \times 6 = 18$ cm

अब पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(18 \times 6 + 6 \times 8 + 18 \times 8)$

$= 2(108 + 48 + 144)$

$= 600\ cm^2$

अतः उक्त षड्मुखाको पूरा सतहको क्षेत्रफल $600\ cm^2$ छ ।

उदाहरण 4

एउटा घनाकार ट्याङ्कीको एउटा किनाराको लम्बाइ 1.5 m छ भने उक्त ट्याङ्कीमा कति लिटर पानी अटाउँछ, पत्ता लगाउनुहोस ।

समाधान

यहाँ घनाकार ट्याङ्कीको किनाराको लम्बाइ (a) = 1.5 m

आयतन (V) = ?

अब सूत्रानुसार $V = a^3$

$= (1.5)^3$

$= 3.375\ m^3$

$= 3.375 \times 1000\ l$ $\quad \because 1\ m^3 = 1000\ l$

अथवा $V = 3375\ l$

अतः उक्त भाँडामा 3375 l पानी अटाउँछ ।

उदाहरण 5

एउटा घनाकार ट्याङ्कीमा 216000 लिटर पानी अटाउँछ भने यसको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस :

समाधान

यहाँ घनको आयतन (V) = 216000 l

$= \frac{216000}{1000}\ m^3 = 216\ m^3$ $\quad \left[\because 1\ l = \frac{1}{1000}\ m^3\right]$

घनको भुजाको लम्बाइ (a) = ?

अब सूत्रानुसार $V = a^3$

$216 m^3 = a^3$

$a = \sqrt[3]{216}$

अथवा $a = 6\ m$

अब पूरा सतहको क्षेत्रफल (A) $= 6a^2$

$= 6 \times 6^2$

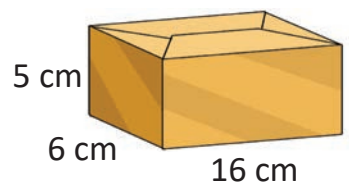
$= 216\ m^2$

अतः उक्त घनको पूरा सतहको क्षेत्रफल $216\ m^2$ छ ।

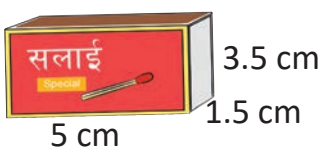
अभ्यास 9.3

1. तल दिइएका ठोस वस्तुको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)

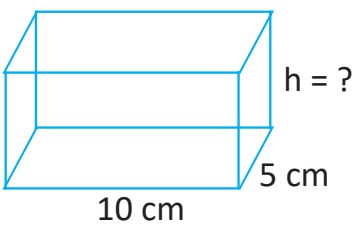


(ख)



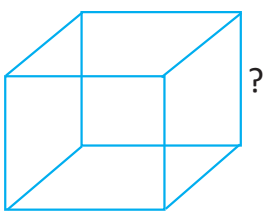
2. तल दिइएका ठोस वस्तुहरूमा थाहा नभएका किनारा पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)



$V = 450\ cm^3$

(ख)



$V = 343\ cm^3$

3. एउटा कोठाको लम्बाइ 5 m, चौडाइ 4 m र उचाइ 3 m छ । उक्त कोठाको आयतन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा बैठक कोठाको लम्बाइ यसको उचाइको दोब्बर छ । उक्त कोठाको चौडाइ 8 m र आयतन 576 m^3 भए कोठाको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा डाइसको एउटा किनाराको लम्बाइ 9 cm छ । उक्त डाइसको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (क) एउटा घनाकार बाकसको आयतन 512 cm^3 छ । उक्त बाकसको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) एउटा घनाकार वस्तुको आयतन 125 cm^3 छ । उक्त वस्तुको एउटा किनाराको लम्बाइ र पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. लम्बाइ 4 cm, चौडाइ 2 cm र उचाइ 1 cm भएको एउटा षड्मुखाकार सुनको टुक्रालाई पगालेर घनाकार बनाइएको छ भने,

   (क) घनाकार सुनको टुक्राको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) घनाकार सुनको टुक्राको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. लम्बाइ 32 cm, चौडाइ 16 cm र उचाइ 8 cm भएको दुधको भाँडो पूर्ण रूपले भरिएको छ । 8 cm लम्बाइ भएको एउटा घनाकार भाँडाले कति पटक झिक्दा उक्त भाँडो खाली हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. (क) एउटा गाँउमा पानीको लागि 64000 *l* पानी अटाउने षड्मुखा ट्याङ्कीको निमार्ण गर्दा लम्बाइ 8 m, चौडाइ 4 m जग्गा खरिद गरेछन भने कति गहिराइको ट्याङ्की खन्नुपर्ला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) कुनै विद्यालयको लागि 216000 *l* पानी अटाउने घनाकार ट्याङ्कीको निर्माण गर्दा उक्त ट्याङ्कीको आधारले कति क्षेत्रफल ओगट्छ ।

परियोजना कार्य

आफ्नो घर वरिपरि भएका घनाकार वस्तुको सङ्कलन गरी तिनीहरूको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् र आफ्नो कार्यको नतिजा कक्षामा छलफल गनुहोस् ।

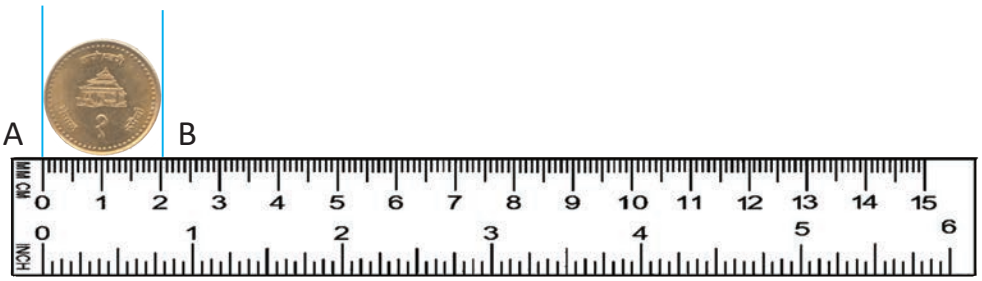
उत्तर

1.	(क)	480 cm^3	(ख)	26.25 cm^3			
2.	(क)	9 cm	(ख)	7 cm			
3.	60 m^3		4.	432 m^2	5.	729 cm^3	
6.	384 cm^2		7.	(क)	8 cm^3	(ख)	24 cm^2
8.	8 पटक		9.	(क)	2 m	(ख)	36 m^2

9.5 वृत्तको परिधि र व्यासको सम्बन्ध र प्रयोग (Relation between circumference and diameter of circle and its uses)

क्रियाकलाप 1

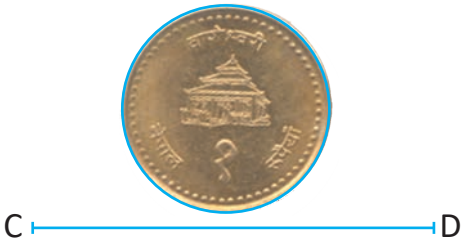
एउटा सिक्का लिनुहोस् र उक्त सिक्कालाई धागाले एक फन्को घुमाउनुहोस् र धागाको लम्बाइ नाप्नुहोस् वा स्केल गरीएको सतहमा एउटा सिक्कालाई एक फन्को घुमाउनुहोस् र यसको दुरी नाप्नुहोस् ।



अब चित्रमा दुई बिन्दु A र B को दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ बिन्दु A र B बिचको दुरी = 2 cm

धागोको लम्बाइ (l) = 6.28 cm



अब धागोका लम्बाइ CD लाई AB ले भाग गर्दा $\frac{6.28}{2} = 3.14$ हुन्छ ।

3.14 भन्नाले यो एक अचर मान हो यसलाई ग्रिक अक्षर 'π' ले जनाइन्छ ।

अत: $\frac{c}{d} = \pi$ हुन्छ ।

क्रियाकलाप 2

चित्र न. १

चित्र न. २

माथि दिइएका जस्तै दुईओटा फरक फरक बेलनाकार वस्तुहरू लिनुहोस् । त्यसको वृत्ताकार सतहलाई चार्टपेपरमा राखेर ट्रेस गर्नुहोस् र कैंचले त्यसको घेराबाट काटेर वृत्ताकार आकृति बनाउनुहोस् । उक्त वृत्ताकार आकृतिलाई ठिक बिचबाट पट्याउनुहोस् र पट्टिएको रेखालाई नाप्नुहोस्, जुन उक्त वृत्तको व्यास हुन्छ । त्यस्तै, एउटा डोरी वा धागोले उक्त वस्तुको वरिपरिको घेराको नाप लिनुहोस् र तलको तालिकामा भर्नुहोस् :

सि. न.	डोरी वा धागोले नाप्दा आएको वरिपरिको लम्बाइ	घेराको व्यासको नाप
चित्र न. १		
चित्र न. २		

माथिको प्रत्येक चित्रबाट वरिपरिको लम्बाइलाई र दुई सिन्काबीचको दुरीले भाग गर्दा के कस्तो नतिजा आउँछ, छलफल गर्नुहोस् ।

अब दुईओटा चित्रबाट आएको नतिजामा सबैको मान लगभग 3.142857 आउँछ । अतः 3.142857 लाई अचर (π) ले जनाउँदा तलको अवस्था आउँछ ।

$$\frac{\text{परिधि (C)}}{\text{व्यास(d)}} = \pi \text{ हुन्छ ।}$$

अथवा $C = \pi d = 2\pi r$ $\quad$ [$\because$ व्यास (d) = 2 अर्धव्यास]

वृत्ताकार वस्तुको परिधि र व्यासको अनुपात (π) हो । व्यासको लम्बाइ अर्धव्यासको दोब्बर हुन्छ । सूत्र $C = \pi d = 2\pi r$

उदाहरण 1

एउटा वृत्तको व्यास 14 cm छ भने उक्त वृत्तको अर्धव्यास र परिधि पत्ता लगाउनुहोस ।

$(\pi = \frac{22}{7})$

समाधान

यहाँ वृत्तको व्यास (d) = 14 cm

$\therefore$ वृत्तको अर्धव्यास (r) $= \frac{d}{2}$ $\quad \boxed{\because d = 2r}$

$= \frac{14}{2}$

$= 7$

फेरि वृत्तको परिधि (c) $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7$

$= 44$ cm

अत: वृत्तको अर्धव्यास 7 cm र परिधिको लम्बाइ = 44 cm छ ।

उदाहरण 2

एउटा गोलाकार सुनको औँठिको परिधि 132 cm छ । उक्त औँठिको व्यास पत्ता लगाउनुहोस । $(\pi = \frac{22}{7})$

समाधान

यहाँ वृत्तको परिधि (c) = 132 cm

वृत्तको व्यास (d) = ?

अब सूत्रानुसार,

$c = \pi d$

अथवा $d = \frac{c}{\pi}$

$= \frac{132}{\frac{22}{7}}$

$= \frac{132 \times 7}{22}$

$= 42$ cm

अत: औँठिको व्यास (d) = 42 cm

उदाहरण 3

एउटा गोलाकार माछा पोखरीको व्यास 56 m छ । यसलाई 10 पटक वरिपरि काँडेतार लगाउन कति तार चाहिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस । ($\pi = \frac{22}{7}$)

समाधान

यहाँ माछा पोखरीको व्यास (d) = 56 m

माछा पोखरीको परिधिको लम्बाइ (c) = ?

सूत्रानुसार,

$$c = \pi d$$

$$= \frac{22}{7} \times 56 \text{ m}$$

$$= 176 \text{ m}$$

काँडेतारले एक पटक घेरा लगाउन चाहिने तार = 176 m

∴ काँडेतारले 10 पटक घेरा लगाउन चाहिने तार = 176 × 10 m

= 1760 m

अतः तारको लम्बाइ 1760 m हुन्छ ।

उदाहरण 4

रामले एउटा साइकलबाट 440 m दुरी पार गर्दा पाङ्ग्रा 100 पटक घुमेछ भने उक्त पाङ्ग्राको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस । ($\pi = \frac{22}{7}$)

समाधान

यहाँ पाङ्ग्रा 100 पटक घुमाउँदा पार गरेको दुरी (c) = 440 m

पाङ्ग्राको अर्धव्यास (r) = ?

पाङ्ग्राको परिधि $= \frac{440}{100} = 4.4 \text{ m} = 4.4 \times 100 \text{ cm} = 440 \text{ cm}.$

अब सूत्रानुसार,

$$c = \pi d$$

अथवा $440 = \frac{22}{7} \times d$

अथवा $d = \frac{440 \times 7}{22}$

अथवा $2r = 140$

अथवा $r = \frac{140}{2} = 70 \text{ cm}$

अतः पाङ्ग्राको अर्धव्यास = 70 cm

अभ्यास 9.4

1. तलका दिइएका नापका आधारमा वृत्तको परिधि पत्ता लगाउनुहोस् : ($\pi = \frac{22}{7}$)

(क) r = 3.5 cm (ख) r = 49 cm (ग) r = 10.5 cm

(घ) d = 70 m (ङ) d = 17.5 cm (च) d = 56 m

2. तलका दिइएका वृत्तको परिधिको लम्बाइबाट वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) c = 176 cm (ख) c = 308 cm (ग) c = 616 cm

(घ) c = 660 m (ङ) c = 242 cm (च) c = 330 m

3. (क) 14 m को लम्बाइको डोरीले बाँधेको बाखो डोरी तन्काएर वरिपरि हिड्छ भने बाखोले 5 पटक घुम्दा कति दुरी हिड्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) 77 m व्यास भएको एउटा कारको पाङ्ग्राले 50 पटक गुड्दा कति मिटर दुरी पार गर्दछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (क) 35 cm अर्धव्यास भएको एउटा साइकलको पाङ्ग्राले 44 m दुरी पार गर्न कति पटक गुड्नुपर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) 140 m व्यास भएको वृत्ताकार पोखरीमा वरिपरि कति पटक दौड्दा 17.6 km दुरी पार गर्न सक्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (क) एउटा बसको पाङ्ग्रा 20 पटक गुड्दा 44 m दुरी पार गर्दछन् भने पाङ्ग्राको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) सीताले एउटा वृत्ताकार पोखरीको वरिपरि 15 पटक हिँड्दा 1 km 980 m दुरी हिडिछन् भने पोखरीको अनुमानित व्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

आफ्नो घर वरिपरि रहेका वृत्ताकार वस्तुहरूको व्यास नापी परिधिको लम्बाइ निकाल्नुहोस् । साथै परिधि र व्यासको अनुपात निकाल्नुहोस् र नतिजा कक्षामा छलफल गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) 22 cm (ख) 308 cm (ग) 66 cm (घ) 220 m
   (ङ) 55 m (च) 176 m
2. (क) 28 cm (ख) 49 m (ग) 98 m (घ) 105 m
   (ङ) 38 m (च) 52.5 m
3. (क) 440 m (ख) 121
4. (क) 20 पटक (ख) 410 पटक
5. (क) 35 cm (ख) 42 cm

मिश्रित अभ्यास

1. रामले 30 ft, 24 ft र 27 ft किनारा भएको त्रिभुजाकार जग्गा खरिद गरेछन भने जग्गाको वरिपरिको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. एउटा समबाहु त्रिभुजको परिमिति 23.25 cm छ भने एउटा भुजाको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. रामले 440 मि. लामो जाली किनेछन् । उनले उक्त जाली प्रयोग गरी आफ्नो त्रिभुजाकार जग्गालाई घेरा लगाएछन् जहाँ जग्गाको तीन किनाराको लम्बाइ क्रमशः 9 m, 8 m र 5 m छ । उनले कति पटक जग्गालाई घेरा लगाएछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. (क) एउटा घनाकार ट्याङ्कीमा 343000 *l* पानी अटाउँछ भने उक्त ट्याङ्कीको पूरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

   (ख) एउटा घनाकार ट्याङ्कीको पूरा सतहको क्षेत्रफल 1776 m^3 छ भने उक्त ट्याङ्कीमा कति पानी अटाउँछ पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. (क) एउटा षड्मुखाको चौडाइको दोब्बर लम्बाइ छ । यदि यसको उचाइ 10 cm र आयतन 8000 cm^3 भए पूरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

   (ख) एउटा कोठाको चौडाइ 8 m र उचाइ 4m छ । उक्त कोठाको पूरा सतहको क्षेत्रफल 304 m^2 भए उक्त कोठाको आयतन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस ।

6. एउटा षड्मुखाको लम्बाइ चौडाइको दोब्बर छ । यदि उक्त षड्मुखाको उचाइ र पूरा सतहको क्षेत्रफल क्रमशः 10 cm र 736 cm^2 भए उक्त षड्मुखाको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. एउटा कोठाको लम्बाइ चौडाइको तेब्बर छ । उक्त कोठाको उचाइ 2 m र आयतन 96 m^3 भए,

(क) कोठाको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) कोठको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस्

8. एउटा 44 m लम्बाइ भएको तारलाई बङ्ग्याएर त्रिभुजाकार बनाइएको छ । यदि दुई किनाराको लम्बाइ 16 m र 17 m भए बाँकी किनाराको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. एउटा घनको पूरा सतहको क्षेत्रफल 600 cm^2 छ भने उक्त घनको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. एउटा घनको आयतन 1728 cm^2 छ । घनको पूरा सतहको क्षेत्रफल एउटा षड्मुखाको पूरा सतहको क्षेत्रफलसँग बराबर छ । यदि षड्मुखाको उचाइ 8 cm र चौडाइ 12 cm भए लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. एउटा घनाकार चाँदीको टुक्राको पूरा सतहको क्षेत्रफल 150 cm^2 छ । यदि यसलाई पगालेर 5 cm लम्बाइ र 4 cm उचाइ भएको षड्मुखा बनाइएको छ भने उक्त षड्मुखाको चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. एउटा ट्रकको पाङ्ग्रा 400 पटक गुड्दा 2.2 km दुरी पार गर्दछन भने पाङ्ग्राको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. लम्बाइ 1 m चौडाइ 90 cm र उचाइ 60 cm को पानीले पुरै भरिएको एउटा षड्मुखा ट्याङ्की को पानी 30 cm किनारा भएको घनाकार भाँडाले कति पटक पानी फाल्दा ट्याङ्की पूर्ण रूपले खाली हुन्छ पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. एउटा कोठाको लम्बाइ 8 m, चौडाइ 6m र उचाइ 2 m छ भने ।

(क) कोठाको पूरा सतहमा प्रति वर्ग मि रु 50 का दरले रङ लगाउँदा कति रकम लाग्दछ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) प्रति विद्यार्थी 0.5 m^2 ठाउँ दिइयो भने उक्त कोठामा कति विद्यार्थी अटाउँछन् पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1.	81 ft	2.	7.75 cm	3.	20 पटक
4.	(क) 294 m^2	(ख) 2744000 l			
5.	(क) 2800 cm^2	(ख) 320 m^3		6.	1280 cm^3
7.	l = 12 m, b = 4 m, h = 2 m र A = 160 m^2				
8.	11 m	9.	1000 m^3	10.	16.8 cm
11.	4.71 cm	12.	87.5 cm	13.	20 पटक
14.	(क) रु. 7600	(ख) 192 जना			

पाठ 10

घाताङ्क
(Indices)

10.0 पुनरवलोकन (Review)

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् ।

तल एउटै सङ्यालाई लगातार गुणन गर्ने ढाँचा दिइएको छ, यसलाई पूरा गर्नुहोस् ।

लगातार गुणन क्रिया	पढ्ने तरीका
3×3	$3^2 = 3$ को घाताङ्क 2
$3 \times 3 \times 3$	$3^3 = 3$ को घाताङ्क 3
$3 \times 3 \times 3 \times 3$	$3^4 = 3$ को घाताङ्क 4
...	...
$a \times a \times a \times a \times \ldots$ n ओटा	$a^n = a$ को घाताङ्क n

3^5 मा आधार 3 र घाताङ्क 5 हो ।

2^3 मा आधार 2 र घाताङ्क 3 हो ।

2^3 —— घाताङ्क
—— आधार

कुनै सख्यालाई त्यही सङ्ख्याले धेरै पटक गुणन गर्ने क्रियालाई जनाउन घाताङ्कको प्रयोग गरीन्छ ।

a^n मा a आधार, n लाई घाताङ्क भएको ठाउँमा र a^n लाई a को घात भनिन्छ ।

10.1 घाताङ्कका नियमहरू (Laws of Indices)

क्रियाकलाप 1

तलको ढाँचा अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

$$a^1 \times a^1 = a^{1+1} = a^2$$

$$a^2 \times a^1 = a^{2+1} = a^3$$

$$a^3 \times a^1 = a^{3+1} = a^4$$

...

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

नियम 1 : एउटै आधार भएका घातहरूको गुणन गर्दा आधार उही रहन्छ र घाताङ्कहरू जोडिन्छन् ।

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

क्रियाकलाप 2

तलको ढाँचा अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

$$2^2 \div 2^1 = \frac{2^2}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 = 2^1 = 2^{2-1}$$

$$3^3 \div 3^1 = \frac{3^3}{3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{3} = 9 = 3^2 = 3^{3-1}$$

$$5^5 \div 5^2 = \frac{5^5}{5^2} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5} = 125 = 5^3 = 5^{5-2}$$

...

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

नियम 2 : एउटै आधार भएका घातहरूको भाग गर्दा आधार उहिरहन्छ र अंशको घाताङ्कबाट हरको घाताङ्क घटाइन्छ ।

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

क्रियाकलाप 3

तलको ढाँचा अध्ययन गर्नुहोस् र खाली ठाउँ भर्नुहोस् :

$$2 \div 2 = \frac{2}{2} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$$

$$3^3 \div 3^3 = \frac{3^3}{3^3} = 3^{3-3} = 3^0 = 1$$

$$4^3 \div 4^3 = \frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0 = 1$$

$5^3 \div 5^3$ = ...

$6^3 \div 6^3$ = ...

...

$a^m \div a^m$ = ...

नियम 3 : शुन्य बाहेकका कुनै पनि सङ्ख्याको घाताङ्क शून्य छ भने त्यसको मान 1 हुन्छ ।

$a^0 = 1$ जहाँ $a \neq 0$ छ ।

उदाहरण 1

तलका गुणनखण्डलाई घाताङ्कमा व्यक्त गर्नुहोस् :

(क) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

समाधान

यहाँ $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 5^5$

(ख) $(-3y) \times (-3y) \times (-3y) \times (-3y) \times (-3y) \times (-3y)$

समाधान

यहाँ $(-3y) \times (-3y) \times (-3y) \times (-3y) \times (-3y) \times (-3y)$

$= (-3y)^6$

उदाहरण 2

गुणनफल निकाल्नुहोस् :

(क) $2^3 \times 2^{-2}$ (ख) $(3a)^4 \times (3a)^3 \times (3a)^{-7}$

समाधान

यहाँ

(क) $2^3 \times 2^{-2}$

$= 2^{3-2}$

$= 2^1$

$= 2$

(ख) $(3a)^4 \times (3a)^3 \times (3a)^{-7}$

$= (3a)^{4+3-7}$

$= (3a)^0$

$= 1$

उदाहरण 3

सरल गर्नुहोस् :

(क) $(a + b)^3 \times (a + b)^5$ (ख) $(3xy)^5 \div 9x^2y^2$ (ग) $\dfrac{10a^4 \times 15a^5}{75a^8}$

समाधान

यहाँ

(क) $(a + b)^3 \times (a + b)^5$

$= (a + b)^{3+5}$

$= (a + b)^8$

(ख) $(3xy)^5 \div 9x^2y^2$

$= \dfrac{3^5x^5y^5}{9x^2y^2}$

$= \dfrac{3^5}{9} \times \dfrac{x^5}{x^2} \times \dfrac{y^5}{y^2}$

$= 3^{5-2}\, x^{5-2}\, y^{5-2}$

$= 3^3\, x^3\, y^3$

$= 27\, x^3\, y^3$

(ग) $\dfrac{10a^4 \times 15a^5}{75a^8}$

$= \dfrac{2 \times 5 \times a^4 \times 3 \times 5 \times a^5}{3 \times 5 \times 5 \times a^8}$

$= \dfrac{2 \times 3 \times 5^2 \times a^4 \times a^5}{3 \times 5^2 \times a^8}$

$= 2 \times 3^{1-1} \times 5^{2-2} \times a^{4+5-8}$

$= 2 \times 3^0 \times 5^0 \times a^{9-8}$

$= 2 \times 1 \times 1 \times a^1$

$= 2a$

उदाहरण 4

यदि $a + b + c = 0$ भए $x^{a-b} \times x^{a+b} \times x^{b+c} \times x^{b-c} \times x^{c+a} \times x^{c-a}$ को मान निकाल्नुहोस् :

समाधान

$x^{a-b} \times x^{a+b} \times x^{b+c} \times x^{b-c} \times x^{c+a} \times x^{c-a}$

$= x^{a-b+a+b} \times x^{b+c+b-c} \times x^{c+a+c-a}$

$= x^{2a} \times x^{2b} \times x^{2c}$

$= x^{2a+2b+2c}$

$= x^{2(a+b+c)}$

$= x^{2\times 0}$

$= x^0$

$= 1$

अभ्यास 10

1. तलका तलका लगातार गुणन क्रियालाई घाताङ्कको रूपमा लेख्नुहोस् :

(क) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

(ख) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

(ग) $x \times x \times x \times x$

(घ) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

(ङ) $(-2a) \times (-2a) \times (-2a) \times (-2a) \times (-2a)$

(च) $(-\frac{1}{a}) \times (-\frac{1}{a}) \times (-\frac{1}{a}) \times (-\frac{1}{a})$

2. तलका प्रत्येक घातलाई लगातार गुणन क्रियामा व्यक्त गर्नुहोस् :

(क) 3^3 (ख) $(-2)^4$ (ग) $(3x)^5$ (घ) $(\frac{1}{2})^6$

3. तलका सङ्ख्याहरूको रूढ गुणनखण्डहरू पत्ता लगाई घातका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् :

(क) 128 (ख) 243 (ग) 625

(घ) 343 (ङ) $\frac{1}{10000}$ (च) $\frac{1}{1728}$

4. मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) 3×2^2 (ख) $5^2 \times 3^3$ (ग) $7^2 \times 2^3$

(घ) $(-5)^3 \times (-2)^4$ (ङ) $(a^4) \times (a^{-4})$ (च) $\frac{2^4}{2^3}$

5. सरल गर्नुहोस् :

(क) $p^{b-c} \times p^{a-b} \times p^{c-a}$

(ख) $(m^{a-b}) \times m^{a+b} \times (m^{b+c} \times m^{b-c}) \times m^{c+a} \times m^{c-a}$

6. यदि x = 1, y= 2 र z = –1 भए तलका पदहरूको मान निकाल्नुहोस् :

(क) x^3 (ख) y^x ग) $z^{(xy)}$ (घ) $(xy)^{-2}$

(ङ) $3^x \times 2^y$ (च) $(xyz)^{-1}$ (छ) $3y^xz^2$

उत्तर

1. (क) 3^5 (ख) 4^6 (ग) x^4

   (घ) $(\frac{1}{3})^7$ (ङ) $(-2a)^5$ (च) $(-\frac{1}{a})^4$

2. (क) $3 \times 3 \times 3$ (ख) $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

   (ग) $3x \times 3x \times 3x \times 3x \times 3x$

   (घ) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

3. (क) 2^7 (ख) 3^5 (ग) 5^4

   (घ) 7^3 (ङ) $\frac{1}{2^4 \times 5^4}$ (च) $\frac{1}{3^3 \times 2^6}$

4. (क) 12 (ख) 675 (ग) 392

   (घ) –2000 (ङ) 1 (च) 2

5. (क) 1 (ख) $m^{2a+2b+2c}$

6. (क) 1 (ख) 2 (ग) 1 (घ) $\frac{1}{4}$

   (ङ) 12 (च) $\frac{1}{2}$ (छ) 6

पाठ 11

बीजीय अभिव्यञ्जक
(Algebraic Expression)

11.0 पुनरवलोकन (Review)

तल दिइएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) $(3x^2 + 3x)$ मा कतिओटा पदहरू छन् ?

(ख) $(3x + 7x)$ मा भएका पदहरू सजातीय वा बिजातीय कस्ता पदहरू हुन् ?

(ग) $(3x + 9)$ मा 9 ले केलाई प्रतिनिधित्व गर्दछ ?

(घ) $3x^2$ मा 3, x र 2 ले के केलाई जनाउछ ?

1. चल वा अचल राशिका बिचमा गणितीय क्रिया सूचक चिह्नहरू प्रयोग गरी गणितीय सङ्केतमा लेखिएका भनाइलाई बीजीय अभिव्यञ्जक भनिन्छ ।
2. एउटै आधार र घाताङ्क भएका पदहरूलाई सजातीय पदहरू (like terms) र फरक फरक आधार र घाताङ्क भएका पदहरूलाई बिजातीय पदहरू (unlike terms) भनिन्छ ।
3. सजातीय पदहरूलाई जोड्न वा घटाउन सकिन्छ । गुणन क्रिया गर्दा सजातीय पदका चलराशिका घाताङ्कलाई जोडिन्छ र गुणाङ्कलाई गुणन गरी चलराशिको अगाडि राखिन्छ ।

त्यस्तै एउटै आधार भएका घातहरूको भाग गर्दा आधार उहिरहन्छ र अंशको घाताङ्कबाट हरको घाताङ्क घटाइन्छ ।

बीजीय अभिव्यञ्जकमा प्रयोग हुने केही आधारभूत शब्दहरू तल दिइएका छन् ।

अचल राशि (Constant) : एउटा मात्र मान हुने राशिलाई अचल राशि भनिन्छ ।

चल राशि (Variable) : कुनै राशिको फरक फरक मान भए त्यसलाई चलराशि भनिन्छ ।

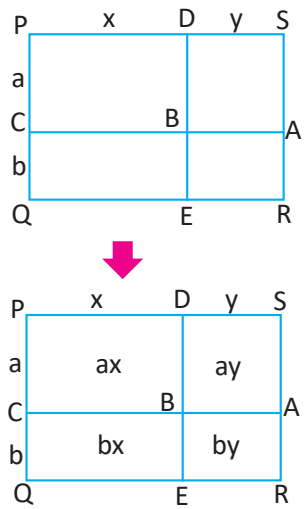
पदहरू (Terms) : चल राशि वा अचल राशि वा दुवैलाई गुणन र भाग चिह्न द्वारा संयोजन गरीएमा त्यसलाई पद भनिन्छ ।

गुणाङ्क (Coefficient) : कुनै पदमा चलराशिलाई गुणा गर्ने राशिलाई गुणाङ्क भनिन्छ ।

11.1 द्विपदीय अभिव्यञ्जकलाई द्विपदीय अभिव्यञ्जकले गुणन (Multiplication of binomial expression by binomial algebraic expression)

क्रियाकलाप 1

चित्रमा दिइएको आयत PQRS को लम्बाइ (x + y) एकाइ र चौडाइ (a + b) एकाइ छ । समूहमा छलफल गरी आयत PQRS को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



यहाँ आयत PQRS को क्षेत्रफल = आयत PCBD + आयत DBAS + आयत CQEB + आयत BERA

आयत PQRS को क्षेत्रफल = (ax + ay + bx + by) वर्ग एकाइ

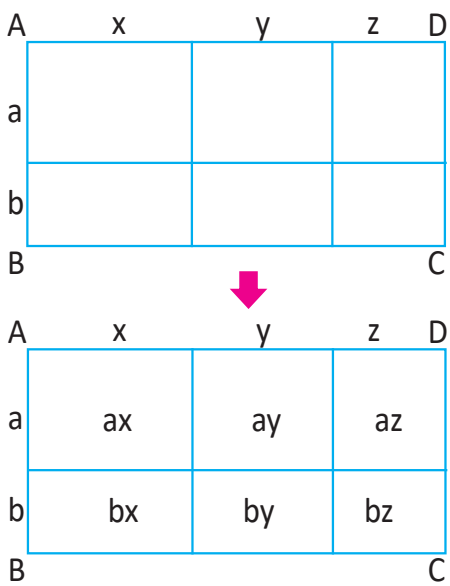
अतः (a + b) (x + y) = (ax + ay + bx + by)

दुई पदीय अभिव्यञ्जकले दुई पदीय अभिव्यञ्जकलाई गुणन गर्दा पहिलो अभिव्यञ्जकको प्रत्येक पदले दोस्रो अभिव्यञ्जकको प्रत्येक पदलाई क्रमशः गुणन गरी जोड्नुपर्दछ ।

11.2 त्रिपदीय अभिव्यञ्जकलाई द्विपदीय अभिव्यञ्जकले गुणन (Multiplication trinomial expression by binmial algebric expression)

क्रियाकलाप 2

दिइएको चित्रमा लम्बाइ (x + y + z) एकाइ र चौडाइ (a + b) एकाइ भएको एउटा आयत खिचिएको छ । उक्त आयतको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।



यहाँ आयत ABCD को क्षेत्रफल

= लम्बाइ × चौडाइ

= (x + y + z) × (a + b) वर्ग एकाइ

अब आयत ABCD को क्षेत्रफल

= 6 ओटा टुक्रा आयतको क्षेत्रफल

= $(ax + ay + az + bx + by + bz)$ वर्ग एकाइ

अतः $(a + b)(x + y + z) = (ax + ay + az + bx + by + bz)$

दुई पदीय अभिव्यञ्जकले त्रिपदीय अभिव्यञ्जकलाई गुणन गर्दा द्विपदीयका प्रत्येक पदले त्रिपदीयको प्रत्येक पदलाई क्रमश गुणन गर्नुपर्दछ र जोड्नु पर्दछ ।

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस् :

$$3x(x + y) - 2y(x - y) + 4(xy - x^2)$$

समाधान

यहाँ $3x(x + y) - 2y(x - y) + 4(xy - x^2)$

$= 3x^2 + 3xy - 2xy + 2y^2 + 4xy - 4x^2$

$= -x^2 + 5xy + 2y^2$

उदाहरण 2

लम्बाइ $(x + 2y)$ m र चौडाइ $(3x - y)$ m भएको एउटा आयताकार जग्गाको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ जग्गाको लम्बाइ $(l) = (x + 2y)$ m

जग्गाको चौडाइ $(b) = (3x - y)$ m

जग्गाको क्षेत्रफल $= l \times b$

$= (x + 2y) \times (3x - y)$

$= x(3x - y) + 2y(3x - y)$

$= 3x^2 - xy + 6xy - 2y^2$

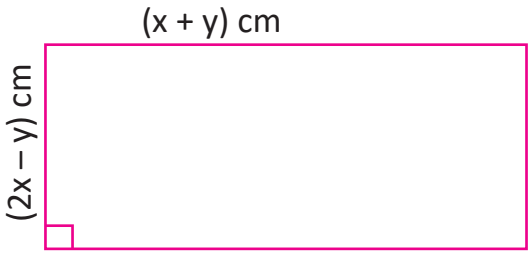
$= (3x^2 + 5xy - 2y^2)$ m^2

∵ पहिलो अभिव्यञ्जकको प्रत्येक पदले दोस्रो अभिव्यञ्जकको प्रत्येक पदलाई क्रमश गुणन गर्दा

अतः उक्त जग्गाको क्षेत्रफल $(3x^2 + 5xy - 2y^2)$ m^2 हुन्छ ।

उदाहरण 3

दिइएको चित्रको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :



समाधान

यहाँ लम्बाइ $(l) = (x + y)$ cm

चौडाइ $(b) = (2x - y)$cm

क्षेत्रफल $= l \times b$

$= (x + y) \times (2x - y)$

$= x(2x - y) + y(2x - y)$

$= 2x^2 - xy + 2xy - y^2$

$= (x^2 + xy - y^2)$ cm^2

उदाहरण 4

गुणन गर्नुहोस् :

(a) $(5x - 2y) \times (7x - 2y)$

(b) $(2x - y) \times (x + 2y - 3z)$

समाधान

यहाँ

(a) $(5x - 2y) \times (7x - 2y)$

$= 5x(7x - 2y) - 2y(7x - 2y)$

$= 35x^2 - 10xy - 14xy + 4y^2$

$= 35x^2 - 24xy + 4y^2$

(b) $(2x - y) \times (x + 2y - 3z)$

$= 2x(x + 2y - 3z) - y(x + 2y - 3z)$

$= 2x2 + 4xy - 6xz - xy - 2y^2 + 3yz$

$= 2x^2 + 3xy - 6xz - 2y^2 + 3yz$

उदाहरण 5

एउटा आयताकार बगैँचाको लम्बाइ (2a – b + c) m र चौडाइ (a + 2b) m छ भने त्यसको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ बगैँचाको लम्बाइ $(l) = (2a - b + c)$ m

बगैँचाको चौडाइ $(b) = (a + 2b)$ m

अब सूत्रानुसार बगैँचाको क्षेत्रफल $= l \times b$

$= (2a - b + c) \times (a + 2b)$

$= a(2a - b + c) + 2b(2a - b + c)$

$= 2a^2 - ab + ac + 4ab - 2b^2 + 2bc$

$= (2a^2 + 3ab + 2bc + ac - 2b^2)$ m^2

अतः उक्त बगैँचाको क्षेत्रफल $(2a^2 + 3ab + + 2bc + ac - 2b^2)$ m^2 हुन्छ ।

उदाहरण 6

(5x – 3) र (3x + 4) को गुणनफल निकाल्नुहोस् ? यदि x = 2 भए, उक्त गुणनफलको मान कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ $(5x - 3)$ र $(3x + 4)$ को गुणनफल $= (5x - 3)\ (3x + 4)$

$= 5x\ (3x + 4) - 3\ (3x + 4)$

$= 15x^2 + 20x - 9x - 12$

$= 15x^2 + 11x - 12$

अब $x = 2$ राख्दा

$15x^2 + 11x - 12$

$= 15(2)^2 + 11 \times 2 - 12$

$= 60 + 22 - 12$

$= 82 - 12$

$= 70$

उदाहरण 7

एउटा आयताकार चउरको लम्बाइ (3a + 2b) m र चौडाइ (2a – b + 3c) m छ भने,

(क) चउरको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि a = 2, b = 2 र c = 1 भए चउरको वास्तविक क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ

(क) चउरको लम्बाइ (l) = (3a + 2b) m

चउरको चौडाइ (b) = (2a – b + 3c) m

चउरको क्षेत्रफल (A) = ?

सूत्रानुसार, चउरको क्षेत्रफल (A) = $l \times b$

$= (3a + 2b) \times (2a - b + 3c)$

$= 3a\,(2a - b + 3c) + 2b\,(2a - b + 3c)$

$= 6a^2 - 3ab + 9ac + 4ab - 2b^2 + 6bc$

$= (6a^2 + ab + 9ac + 6bc - 2b^2)\ m^2$

(ख) a = 2, b = 2 र c = 1 छ ।

क्षेत्रफल $= (6a^2 + ab + 9ac + 6bc - 2b^2)$

$= 6 \times 2^2 + 2 \times 2 + 9 \times 2 \times 1 + 6 \times 2 \times 1 - 2 \times 2^2$

$= 24 + 4 + 18 + 12 - 8$

$= 54 - 8$

$= 46\ m^2$

अत: चउरको वास्तविक क्षेत्रफल = 46 m^2

अभ्यास 11.1

1. सरल गर्नुहोस् :

(क) $3x(x + 3) - 2x(2x + 1) + 8x(x - 1)$

(ख) $a(3a^2 - 2) - 5a^2(a + 1) - 3(a^3 - 1)$

(ग) $a^2(b^2 - c^2) + b^2(c^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2)$

(घ) $\frac{a}{3}(a + 2) - \frac{a}{2}(a - 1) - 2a + 3$

2. गुणन गर्नुहोस् :

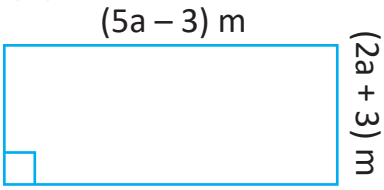
(क) $(3x - 2y)(4x + 3y)$ (ख) $(2y - 1)(3 + 2y)$

(ग) $(7x + 2y)(7x - 2y)$ (घ) $(x - y + z)(x + y)$

(ङ) $(3x + 2)(x^2 - 2x + 1)$ (च) $(x^2 - 2x)(3x^2 + 2x + 3)$

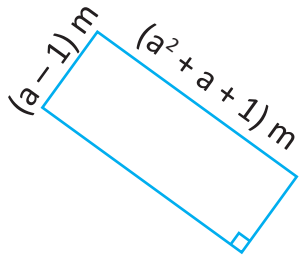
3. तल दिइएका आयतको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

(क)



(ख)

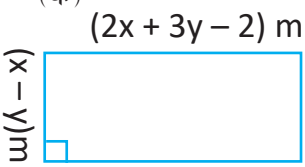
(ग)



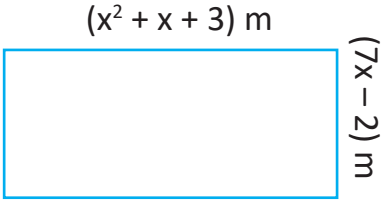
4. (क) एउटा आयताकार जग्गाको लम्बाइ र चौडाइ क्रमशः $(3x + 2)$ m र $(2x - 7)$ m भए उक्त जग्गाको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

(ख) एउटा खेलकुद मैदानको लम्बाइ $(3x - 2y)$ m र चौडाइ $(x - y + 3)$ m छ । उक्त मैदानको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस ।

(क)

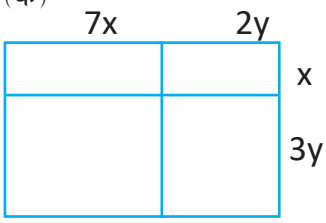


(ख)

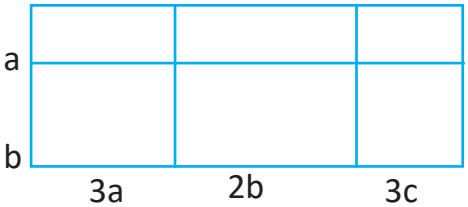


5. तल दिइएका प्रत्येक चित्रका आधारमा आयताकार वस्तुको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

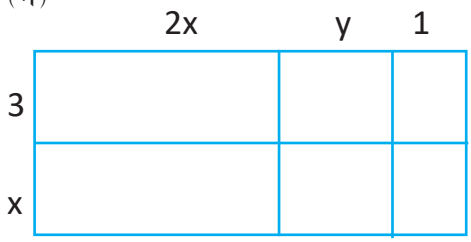
(क)



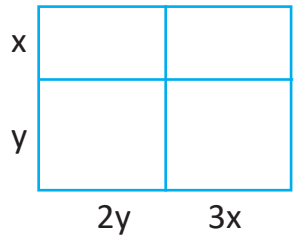
(ख)



(ग)



(घ)



6. $(3x + 2)$ र $(2x - 1)$ को गुणनफल पत्ता लगाउनुहोस् । यदि $x = 20$ भए गुणनफलको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. $(7x - 5y)$ र $(x + y - 2)$ को गुणनफल पत्ता लगाउनुहोस् । यदि $x = 10$ र $y = 5$ भए गुणनफलको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) $7x^2 - x$ (ख) $-5a^3 - 5a^2 - 2a + 3$
   (ग) 0 (घ) $\frac{-a^2}{6} + \frac{19a}{6} + 3$
2. (क) $12x^2 + x - 6$ (ख) $4y^2 + 4y - 3$
   (ग) $49x^2 - 4y^2$ (घ) $x^2 - y^2 + 2x + 2y$
   (ङ) $3x^3 - 4x^2 - x + 2$ (च) $3x^4 - 54x^3 - x^2 - 6x$
3. (क) $(10a^2 + 9a - 9)cm^2$ (ख) $(5a^2 + 7a - 6)\ cm^2$
   (ग) $(a^3 - 1)m^2$ (घ) $2x^2 + xy - 2x + 2y - 3y^2$
   (ङ) $(7x^3 + 5x^2 + 19x - 6)\ m^2$
4. (क) $(6x^2 - 17x - 14)m^2$ (ख) $(3x^2 - 5xy + 9x - 6y + 2y^2)\ m^2$
5. (क) $(7x^2 + 23xy + 6y^2)$ (ख) $3a^2 + 5ab + 3bc + 3ac + 2b^2$
   (ग) $2x^2 + 9x + 9$ (घ) $3x^2 + 5xy + 2y^2$
6. $(6x^2 + x - 2)$, 2418
7. $7x^2 + 2xy - 14x + 10y - 5y^2)$, 835

11.3 द्विपदीय वा त्रिपदीय अभिव्यञ्जकलाई द्विपदीय अभिव्यञ्जकले भाग गर्ने (Division of binomial or trinomial by binomial algebraic expression)

क्रियाकलाप 1

क्षेत्रफल $(4x^2 - y^2)$ cm^2 र चौडाइ $(2x - y)$ **cm** भएको आयताकार सतहको लम्बाइ कति होला, छलफल गर्नुहोस् ।

$(A) = (4x^2 - y^2)$ cm^2 $(2x - y)$ cm

यहाँ आयताकार सतहको क्षेत्रफल (A) $= (4x^2 - y^2)$ cm^2

चौडाइ (b) $= (2x - y)$ cm

लम्बाइ (l) = ?

अब क्षेत्रफल र चौडाइ दिइएको हुनाले लम्बाइ कसरी निकाल्न सकिन्छ, कक्षाकोठामा छलफल गर्नुहोस् ।

अब

$$A = l \times b$$

अथवा $l = \frac{A}{b} = \frac{4x^2 - y^2}{2x - y}$

$4x^2 - y^2$ लाई $2x - y$ ले भाग गर्दा,

$$\begin{array}{l} 2x - y \,\big)\, \overline{4x^2 - y^2} \,(\, 2x + y \\ \quad\; \underline{-\,4x^2 \mp 2xy} \\ \qquad\quad 2xy - y^2 \\ \qquad\quad \underline{-\,2xy \mp y^2} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

चरण १ : 2x लाई $4x^2$ बनाउन 2x ले गुणन गर्नुहोस् ।

चरण २ : 2x ले $(2x - y)$ लाई गुणन गर्नुहोस र घटाउनुहोस् ।

चरण ३ : 2x लाई 2xy बनाउन y ले गुणन गर्नुहोस् ।

चरण ४ : y ले $(2x - y)$ लाई गुणन गरी घटाउनुहोस् ।

जाँचेर हेर्दा,

$(2x - y)(2x + y)$

$= 2x(2x + y) - y(2x + y)$

$= 4x^2 + 2xy - 2xy - y^2$

$= 4x^2 - y^2$

अतः उक्त आयताकार सतहको लम्बाइ $(2x + y)$ cm हुन्छ ।

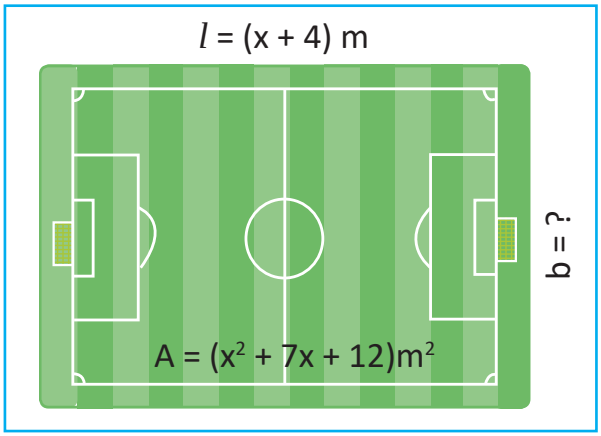
क्रियाकलाप 2

एउटा आयताकार फुटबल मैदानको क्षेत्रफल $(x^2 + 7x + 12)\ m^2$ र लम्बाइ $(x + 4)$ m छ भने चौडाइ कति होला ? छलफल गरी चित्र बनाउनुहोस् र पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ क्षेत्रफल (A) $= (x^2 + 7x + 12)m^2$

लम्बाइ (l) $= (x + 4)$ m

चौडाइ (b) = ?



अब

$$A = l \times b$$

अथवा $b = \dfrac{A}{l}$ हुन्छ

$$b = \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 4}$$

$(x + 4)$ ले $(x^2 + 7x + 12)$ लाई भाग गर्दा,

$$\begin{array}{l} x + 4 \,\overline{)\, x^2 + 7x + 12 \,(}\; x + 3 \\ \underline{-\, x^2 \pm 4x} \\ \quad 3x + 12 \\ \underline{-\, 3x \pm 12} \\ \qquad 0 \end{array}$$

चरण १ : x लाई x^2 बनाउन x ले गुणन गरी घटाउनुहोस् ।

चरण २ : x लाई 3x बनाउन 3 ले गुणन गर्नुहोस र घटाउनुहोस् ।

जाँचेर हेर्दा,

$(x + 3)(x + 4)$

$= x(x + 4) + 3(x + 4)$

$= x^2 + 4x + 3x + 12$

$= x^2 + 7x + 12$

अत: उक्त फुटबल मैदानको चौडाइ $(x + 3)$ m हुन्छ ।

क्रियाकलाप 3

$(2x^2 - 3x + 7)$ लाई $(2x - 1)$ ले भाग गरेको क्रिया अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ $(2x^2 - 3x + 7) \div (2x - 1)$

$$
\begin{array}{r|l}
2x - 1 & \cancel{2x^2} - 3x + 7 \;(\; x - 1 \\
 & \underline{\cancel{2x^2} - x} \\
 & \quad -\qquad + \\
 & \quad -2x + 7 \\
 & \quad \underline{-2x + 1} \\
 & \quad + \qquad - \\
 & \qquad\qquad 6
\end{array}
$$

जाँचेर हेर्दा,

$(x - 1)(2x - 1) + 6$

$= x(2x - 1) - 1(2x - 1) + 6$

$= 2x^2 - x - 2x + 1 + 6$

$= 2x^2 - 3x + 7$

$\therefore$ भागफल (Quotient) $= (x - 1)$, भाजक (Divisor) $= (2x - 1)$

भाज्य (devidend) $= (2x^2 - 3x + 7)$ र शेष (Remainder) $= 6$

भाज्य (dividend) = भाजक (Divisor) × भागफल (Quotient) + शेष (Remainder)

उदाहरण 1

$(x^2 + 7x + 10)$ लाई $(x + 2)$ ले भाग गर्नुहोस् र जाँचेर पनि हेर्नुहोस् :

समाधान

$(x^2 + 7x + 10) \div (x + 2)$

$$
\begin{array}{r|l}
x + 2 & \cancel{x^2} + 7x + 10 \;(\; x + 5 \\
 & \underline{\cancel{x^2} + 2x} \\
 & \quad - \quad - \\
 & \quad 5x + 10 \\
 & \quad \underline{5x + 10} \\
 & \quad - \quad - \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

चरण १ : x लाई x^2 बनाउन x ले गुणन गर्नुपर्छ । त्यसैले $x + 2$ लाई x ले गुणन गरी भाज्यबाट घटाउनु पर्दछ ।

चरण २ : x लाई 5x बनाउन 5 ले गुणन गर्नुहोस र घटाउनुहोस् ।

जाँचेर हेर्दा,

$(x + 2)(x + 5)$

$= x(x + 5) + 2(x + 5)$

$= x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x^2 + 7x + 10$

अतः भागफल $= (x + 5)$, भाजक $= (x + 2)$, भाज्य $= x^2 + 7x + 10$ र शेष $= 0$

उदाहरण 2

$(x^2 + 7x + 25)$ लाई $(x + 3)$ ले भाग गर्दा कति हुन्छ ? यदि $x = 40$ भए भाज्य र भागफलको वास्तविक मान कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ $(x^2 + 7x + 25)$ लाई $(x + 3)$ ले भाग गर्दा,

$$
\begin{array}{r|l}
x + 3 & x^2 + 7x + 25 \;(\; x + 4 \\
 & \underline{-\,x^2 \pm 3x} \\
 & \quad 4x + 25 \\
 & \quad \underline{-\,4x \pm 12} \\
 & \qquad\quad 13
\end{array}
$$

$x = 40$ हुँदा,

भाज्यको वास्तविक मान $= (x^2 + 7x + 25)$

$= 40^2 + 7 \times 40 + 25 = 1905$

भागफलको वास्तविक मान $= x + 4 = 40 + 4 = 44$

उदाहरण 3

$(16x^2 + 24xy + 9y^2)$ लाई $(4x + 3y)$ ले भाग गर्नुहोस् :

समाधान

यहाँ $(16x^2 + 24xy + 9y^2) \div (4x + 3y)$

$$
\begin{array}{r|l}
4x + 3y & 16x^2 + 24xy + 9y^2 \;(\; 4x + 3y \\
 & \underline{-\,16x^2 \pm 12xy} \\
 & \quad 12xy + 9y^2 \\
 & \quad \underline{-\,12xy \pm 9y^2} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

अत: भागफल $= 4x + 3y$

उदाहरण 4

$(x^3 - y^3)$ लाई $(x - y)$ ले भाग गर्नुहोस् :

समाधान

यहाँ $(x^3 - y^3) \div (x - y)$

$$
\begin{array}{l}
x - y \,\big)\, \cancel{x^3} - y^3 \quad (\, x^2 + xy + y^2 \\
\quad - \cancel{x^3} \quad \mp x^2y \\
\hline
\quad \cancel{x^2y} - y^3 \\
\quad - \cancel{x^2y} \quad - xy^2 \\
\quad\quad\quad + \\
\hline
\quad xy^2 - \cancel{y^3} \\
\quad - \cancel{xy^2} - y^3 \\
\quad\quad + \\
\hline
\quad\quad \times
\end{array}
$$

$\because -x^2y$ को सजातीय पद नभएकाले छुट्टै राख्ने

$\because$ x को डिग्रीलाई घट्दोक्रममा राख्ने

अतः भागफल = $(x^2 + xy + y^2)$ हुन्छ ।

अभ्यास 11.2

1. भाग गर्नुहोस् :

(क) $(4a^2 + 12a) \div (2a + 6)$

(ख) $(4x^2 - 9) \div (2x + 3)$

(ग) $(2a^2 - 7a + 6) \div (2a - 3)$

(घ) $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

(ङ) $(15x^2 + 5xy - 4y^2) \div (3x + 2y)$

(च) $(35a^2 - ab - 12b^2) \div (5a - 3b)$

(छ) $(x^3 - 27y^3) \div (x - 3y)$

(ज) $(8x^3 + 27y^3) \div (2x + 3y)$

(झ) $(6x^4 - 5x^2y^2 - 6y^4) \div (3x^2 + 2y^2)$

(ञ) $(a^4 - b^4) \div (a - b)$

2. तल दिइएका आयतको थाहा नभएको भुजाको नाप पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) चौडाइ = $(x - y)m$ क्षेत्रफल = $(x^2 - y^2)m^2$

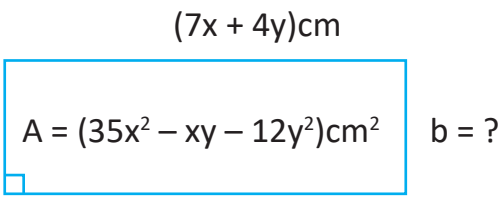
(ख) लम्बाइ = $(2x + 5y)m$ क्षेत्रफल = $(2x^2 + 3xy - 5y^2)m^2$

(ग) चौडाइ = $(2a - b)m$ क्षेत्रफल = $(2a^2 + 5ab - 3b^2)m^2$

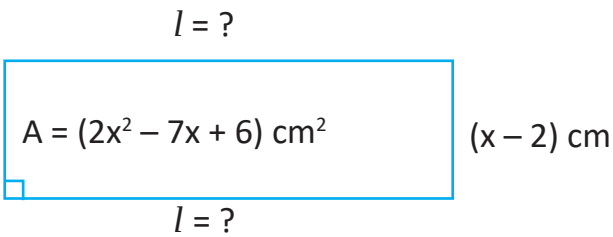
(घ) लम्बाइ = $(a + 3)m$ क्षेत्रफल = $(a^3 + 27)m^2$

3. तल दिइएका चित्रमा थाहा नभएको भुजाको नाप पत्ता लगाउनुहोस् :

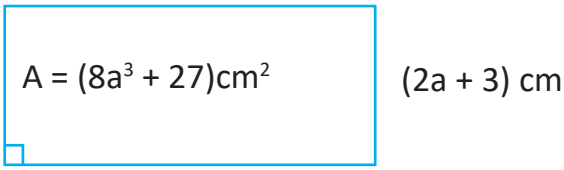
(क)



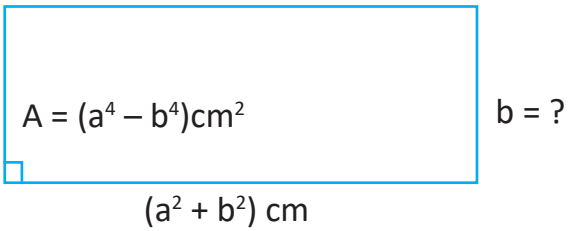
(ख)



(ग)



(घ)



4. (क) दुई सङ्ख्याहरूको गुणनफल $(2a^2 + 13a + 24)$ छ । यदि एउटा सङ्ख्या $(a + 8)$ भए अर्को सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् :

(ख) $(9x^4 - 4y^4)$ लाई $(3x^2 - 2y^2)$ ले भाग गर्दा कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा पूजा कोठाको भुइँको क्षेत्रफल $(15y^2 + 4xy - 4y^2)$ m^2 छ। उक्त कोठाको चौडाइ $(5x - 2y)$ m भए,

(क) कोठाको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $x = 1$ र $y = 2$ भए कोठाको वास्तविक लम्बाइ, चौडाइ र क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. $(x^2 + 19x + 54)$ लाई $(x + 3)$ ले भाग गर्दा कति हुन्छ ? यदि $x = 1$ भए भाज्य, भाजक र भागफलको वास्तविक मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. तल दिइएअनुसार भाग गर्नुहोस् र "भाज्य = भागफल × भाजक + शेष"को सम्बन्ध परीक्षण गर्नुहोस् ।

(क) $(a^2 + 7a + 13) \div (a + 3)$

(ख) $(2a^2 - 5a + 23) \div (2a - 3)$

उत्तर

1. (क) $2a$ (ख) $(2x - 3)$ (ग) $(x + 2)$

   (घ) $(a - 2)$ (ङ) $(5x - 2y)$ (च) $(7a + 4b)$

   (छ) $x^2 + 3xy + 9y^2$ (ज) $4x^2 - 6xy + 9y^2$

   (झ) $(2x^2 - 3y^2)$ (ञ) $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

2. (क) $(x + y)$cm (ख) $(x - y)$m

   (ग) $(a + 3b)$m (घ) $(a^2 - 3a + 9)$

3. (क) $(5x - 3y)$cm (ख) $(2x - 3)$m (ग) $(4a^2 - 6a + 9)$m

   (घ) $(a^2 - b^2)$cm 4. (क) $(2a - 3)$ (ख) $(3x^2 + 2y^2)$m

5. (क) $(3x + 2y)$m (ख) 7m, 1m, $7m^2$

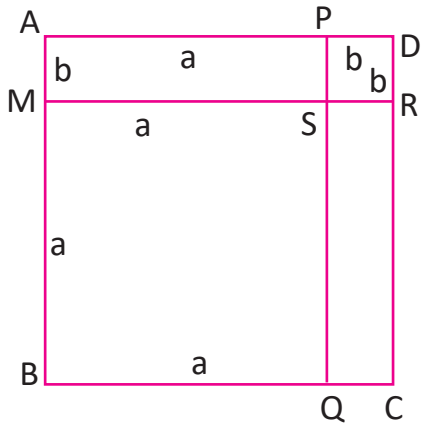
6. भागफल $= x + 16$, शेष $= 6$, भाज्य, भाजकर भागफलको वास्तविक मान क्रमशः 74, 4, 17

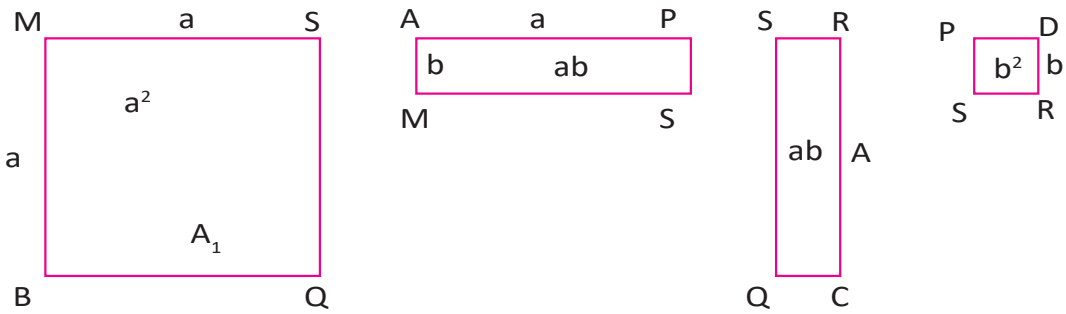
7. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

11.4 $(a + b)^2$ को ज्यामितीय धारणा र प्रयोग (Geometrical concept and application of $(a + b)^2$)

क्रियाकलाप 1

चित्रमा दिइएअनुसार चार्ट पेपरमा ABCD वर्ग खिच्नुहोस् । बिन्दु A बाट 'a' एकाइ AD मा, b एकाइ AB मा चिह्न लगाउनुहोस् । त्यसैगरी PD = SR = QC = b हुने गरी चिह्न लगाउनुहोस् । अब PQ र MR लाई कैंचीले काट्नुहोस र प्रत्येक टुक्राको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।





अब वर्गाकार कागजलाई काट्दा बनेका टुक्राहरूको क्षेत्रफलको योग केसँग बराबर हुन्छ, साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् ।

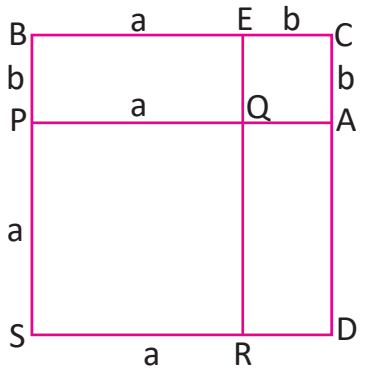
अब वर्ग ABCD को क्षेत्रफल = वर्ग MBQS + आयत AMPS + आयत SRCQ + वर्ग PSRD

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

अतः $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

क्रियाकलाप 2

चित्रमा दिइएको (a + b) एकाइ लम्बाइ भएको वर्गको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? समूहमा छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।



यहाँ PQRS र QECA वर्गहरू हुन अनि PBCA र ECDR आयतहरू हुन ।

अत: वर्ग PQRS को क्षेत्रफल $(A_1) = a \times a = a^2$

वर्ग QECA को क्षेत्रफल $(A_2) = b \times b = b^2$

आयत PBCA को क्षेत्रफल $(A_3) = a \times b = ab$

आयत ECDR को क्षेत्रफल $(A_4) = b \times a = ab$

आयत BCDS को क्षेत्रफल $(A) = (a + b) \times (a + b) = (a + b)^2$

वर्ग BCDS को क्षेत्रफल $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab$

$\therefore (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ हुन्छ

गुणन गरेर हेर्दा,

$(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b)$

$= a(a + b) + b(a + b)$

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

11.5 $(a - b)^2$ को ज्यामितीय धारणा (Geometrical concept of $(a - b)^2$)

क्रियाकलाप 3

चित्रमा दिइएको (a – b) एकाइ लम्बाइ भएको वर्गको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? समूहमा छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

अब वर्ग PQRS को क्षेत्रफल $= a \times a = a^2$

वर्ग BCDS को क्षेत्रफल $= b \times b = b^2$

आयत PACD को क्षेत्रफल = PD × PA

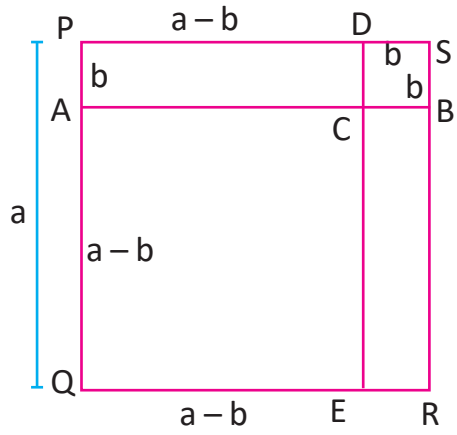
$= (a - b) \times b = ab - b^2$

आयत CBRE को क्षेत्रफल = BR × ER

$= (a - b) \times b = ab - b^2$

वर्ग AQEC को क्षेत्रफल = $(a - b) \times (a - b)$

$= (a - b)^2$



अब वर्ग AQEC को क्षेत्रफल

= Area PQRS – आयत PACD – वर्ग BSDC – आयत CBRE

$(a - b)^2 = a^2 - (ab - b^2) - b^2 - (ab - b^2)$

अथवा $(a - b)^2 = a^2 - ab + b^2 - b^2 - ab + b^2$

अथवा $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

अतः $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ हुन्छ ।

सूत्रहरू

(a) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a + b)^2 - 4ab$

(b) $(a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$

(c) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a - b)^2 + 4ab$

(d) $(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$

उदाहरण 1

(x + 2) को वर्गलाई विस्तारित रूपमा लेख्नुहोस ।

(क) सूत्र प्रयोग नगरीकन

(ख) सूत्र प्रयोग गरी

(ग) ज्यामितीय चित्रबाट

समाधान

यहाँ

(क) $(x + 2)$ को वर्ग $= (x + 2)^2$

$= (x + 2)(x + 2)$

$= x(x + 2) + 2(x + 2)$

$= x^2 + 2x + 2x + 4$

$= x^2 + 4x + 4$

(ख) $(x + 2)$ को वर्ग $= (x + 2)^2$

$= x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2$

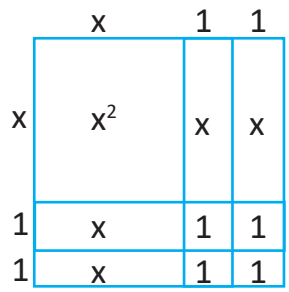
$= x^2 + 4x + 4$

$\because (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ग) $(x + 2)$ को वर्ग ज्यामितीय चित्रबाट

$(x + 2)^2 = x^2 + x + x + x + x + 1 + 1 + 1 + 1$

$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$



उदाहरण 2

$(a + b)^2$ र $(a - b)^2$ को प्रयोग गरी तलका सङ्ख्याहरूको वर्ग निकाल्नुहोस :

(क) 12 (ख) 88

समाधान

यहाँ,

(क) 12

$= (10 + 2)^2$

$= 10^2 + 2 \times 10 \times 2 + 2^2$

$= 100 + 40 + 4$

$= 144$

(ख) 88

$= (90 - 2)^2$

$= 90^2 - 2 \times 90 \times 2 + 2^2$

$= 8100 - 360 + 4$

$= 7744$

उदाहरणघ 3

तल दिइएका अभिव्यञ्जकको वर्ग निकाल्नुहोस :

(क) $(2x - \frac{1}{3x})$ (ख) $(3x + \frac{1}{3})$ (ग) $(a - b + c)$ (घ) $(x + y + z)$

समाधान

यहाँ

(क) $(2x - \frac{1}{3x})$ को वर्ग $= (2x - \frac{1}{3x})^2$

$= (2x)^2 - 2 \times 2x \times \frac{1}{3x} + (\frac{1}{3x})^2$

$= 4x^2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{9x^2}$

(ख) $(3x + \frac{1}{3})$ को वर्ग

$= (3x + \frac{1}{3})^2$

$= (3x)^2 + 2 \times 3x \times \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2$

$= 9x^2 + 2x + \frac{1}{9}$

(ग) $(a - b + c)$ को वर्ग $= (a - b + c)^2$

$= (a - b)^2 + 2(a - b)c + c^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2$

(घ) $(x + y + z)$ को वर्ग $= (x + y + z)^2$

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

उदाहरण 4

सरल गर्नुहोस :

$$(2a + b)^2 - (2a - b)^2$$

समाधान

यहाँ $(2a + b)^2 - (2a - b)^2$

$= (2a)^2 + 2 \times 2a \times b + b^2 - \{(2a)^2 - 2 \times 2a \times b + b^2\}$

$= 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 + 4ab - b^2$

$= 8ab$

उदाहरण 5

यदि $x + \frac{1}{x} = 6$ भए मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $(x^2 + \frac{1}{x^2})$ (ख) $(x - \frac{1}{x})^2$

समाधान

यहाँ

(क) $(x + \frac{1}{x}) = 6$

अथवा $(x + \frac{1}{x})^2 = 6^2$ [∵ दुवैतिर वर्ग गर्दा]

अथवा $x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + (\frac{1}{x})^2 = 36$ $[\because (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$

अथवा $x^2 + 2 + (\frac{1}{x^2}) = 36$

अथवा $x^2 + \frac{1}{x^2} = 36 - 2$

अथवा $x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$

(ख) $(x + \frac{1}{x}) = 6$

अथवा $(x + \frac{1}{x})^2 = 6^2$ [∵ दुवैतिर वर्ग गर्दा]

अथवा $(x - \frac{1}{x})^2 + 4 \times x \times \frac{1}{x} = 36$ $[\because (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab]$

अथवा $(x - \frac{1}{x})^2 = 36 - 4$

अथवा $(x - \frac{1}{x})^2 = 32$

उदाहरण 6

यदि $(a + b) = 8$, $ab = 12$ भए मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $a^2 + b^2$ (ख) $(a - b)$

समाधान

यहाँ

(क) $a + b = 8$

$(a + b)^2 = 8^2$ $\quad$ [∵ दुवैतिर वर्ग गर्दा]

$a^2 + 2ab + b^2 = 64$

$a^2 + b^2 = 64 - 2ab$

$= 64 - 2 \times 12$ $\quad$ [∵ $ab = 12$]

$= 64 - 24$

$= 40$

(ख) $(a + b) = 8$

अथवा $(a + b)^2 = 8^2$ $\quad$ [∵ दुवैतिर वर्ग गर्दा]

अथवा $(a - b)^2 + 4ab = 64$

अथवा $(a - b)^2 + 4 \times 12 = 64$

अथवा $(a - b)^2 = 64 - 48$

अथवा $(a - b)^2 = 4^2$

अथवा $(a - b) = 4$

उदाहरण 7

यदि यदि $a - \frac{1}{a} = 15$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $(a^2 + \frac{1}{a^2}) = 227$ $\quad$ (ख) $(a + \frac{1}{a})^2 = 229$

समाधान

यहाँ,

(क) $(a - \frac{1}{a}) = 15$

अथवा $(a - \frac{1}{a})^2 = 15^2$ $\quad$ [∵ दुवैतिर वर्ग गर्दा]

अथवा $a^2 - 2 \times a \times \frac{1}{a} + (\frac{1}{a})^2 = 225$

अथवा $a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} = 225$

अथवा $a^2 + \frac{1}{a^2} = 225 + 2$

अथवा $a^2 + \frac{1}{a^2} = 227$ प्रमाणित भयो ।

(ख) $(a - \frac{1}{a}) = 15$

अथवा $(a - \frac{1}{a})^2 = 15^2$ [∵ दुवैतिर वर्ग गर्दा]

अथवा $(a + \frac{1}{a})^2 - 4 \times a \times \frac{1}{a} = 225$

अथवा $(a + \frac{1}{a})^2 = 225 + 4$

अथवा $(a + \frac{1}{a})^2 = 229$ प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 11.3

1. तलका अभिव्यञ्जकहरूको सूत्र प्रयोग गरी, नगरी र ज्यामितीय चित्रबाट वर्ग निकाल्नुहोस् :

(क) $(x + 3)$ (ख) $(x - 1)$ (ग) $(a + 4)$

(ख) $(a - 5)$

2. तल दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको वर्ग निकाल्नुहोस् :

(क) $(3x^2 + 2)$ (ख) $(5x - 2y)$ (ग) $(3x^2 - \frac{1}{3y})$

(घ) $(x^2 + \frac{1}{2x})$ (ङ) $(x - y + z)$ (च) $(x^2 + y^2 + z^2)$

3. तलका सङ्ख्याहरूको सूत्र प्रयोग गरी वर्ग निकाल्नुहोस् :

(क) 98 (ख) 102 (ग) 999

4. तलका अभिव्यञ्जकहरूलाई वर्गमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$ (ख) $4x^2 - 20xy + 25y^2$

(ग) $9x^2 + 12xy + 4y^2$ (घ) $9a^4 + 72a^2b^2 + 16b^4$

(ङ) $a^2b^2 + \frac{10ab}{xy} + \frac{25}{x^2y^2}$

5. सरल गर्नुहोस् :

(क) $(2c - 5d)^2 - (5d - 2c)^2$ (ख) $(3x - 2y)^2 + (3y - 2x)^2$

(ग) $(x - \frac{1}{x})^2 - (x + \frac{1}{x})^2$ (घ) $(c + \frac{1}{d})^2 - (c - \frac{1}{d})^2$

6. यदि $a + \frac{1}{a} = 10$ भए मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $a^2 + \frac{1}{a^2}$ (ख) $(a - \frac{1}{a})^2$

7. यदि $m - \frac{1}{m} = 6$ भए मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $m^2 + \frac{1}{m^2}$ (ख) $(m + \frac{1}{m})^2$

8. यदि $(x + y) = 9, xy = 8$ भए मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $x^2 + y^2$ (ख) $(x - y)$

9. यदि $a^2 + b^2 = 17$ र $ab = 4$ भए $(a + b)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. यदि $p^2 + \frac{1}{p^2} = 7$ भए $p + \frac{1}{p}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

$(a \pm b)^2$ को सूत्रहरूलाई कार्टुनको प्रयोग गरी कैचीले काटी सूत्र प्रमाणित गर्ने मोडेल तयार गर्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) $x^2 + 6x + 9$ (ख) $x^2 - 2x + 1$

   (ग) $a^2 + 8a + 16$ (घ) $a^2 - 10a + 25$

2. (क) $9x^4 + 12x^2 + 4$ (ख) $25x^2 - 20xy + 4y^2$

   (ग) $9x^4 - \frac{2x^2}{y} + \frac{1}{9y^2}$ (घ) $x^4 + x + \frac{1}{4x^2}$

	(ङ)	$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx$				
	(च)	$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2$				
3.	(क)	99604	(ख)	10404	(ग)	998001
4.	(क)	$(x - \frac{1}{x})^2$	(ख)	$(2x - 5y)^2$	(ग)	$(3x + 2y)^2$
	(घ)	$(9a^2 + 4b^2)^2$	(ङ)	$(ab + \frac{5}{xy})$		
5.	(क)	0	(ख)	$13x^2 - 24xy + 13y^2$		
	(ग)	-4	(घ)	$\frac{4c}{d}$		
6.	(क)	98	(ख)	96		
7.	(क)	38	(ख)	40		
8.	(क)	65	(ख)	7		
9.	5		10.	3		

पाठ 12 समीकरण, असमानता र ग्राफ (Equation, inequality and graph)

12.0 पुनरवलोकन (Review)

1. तलका प्रश्नहरू अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् ।

(क) 5 र 7 को योगफल 11 हुन्छ :

(ख) यदि $x - 3 = 5$ भए x को मान कति हुन्छ ?

(ग) यदि $3a = 18$ हुन a को मान कति हुनुपर्छ ?

(घ) यदि $\frac{3x}{5} = 12$ भए x को मान कति हुन्छ ?

(ङ) x र 10 को योगफल 18 भए x को मान कति हुन्छ ?

(च) के $-10 > -15$ सत्य हो ?

(छ) $x - 4 < 8$ भए x को समाधान समूह कति हुन्छ ?

माथिका गणितीय वाक्यको बारेमा आपसमा छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

12.1 दुई चलयुक्त समीकरणका समस्याहरू (Probem of linear equation on two variables)

क्रियाकलाप 1

हरि र गीता बजारमा तरकारी किन्न गएका थिए । हरिले x kg आलु किनेछन् र गीताले y kg प्याज किनिछन् । उनीहरूले किनेको आलु र प्याजको जम्मा तौल 30 kg रहेछ भने तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) दुवै जनाले किनेको आलु र प्याजको परिमाणको योगफललाई समीकरणमा कसरी लेख्नुहुन्छ ?

(ख) यदि आलु 20 kg थियो भने प्याज कति किलोग्राम होला ?

यहाँ हरिले किनेको आलुको परिमाण र गीताले किनेको प्याजको परिमाण बराबर दुवैले किनेको आलु र प्याजको जम्मा परिमाण हुन्छ ।

अथवा $x + y = 30$ kg हुन्छ ।

त्यस्तै आलु 20 kg थियो भने प्याजको परिमाण माथिको समीकरणमा आलुको परिमाणलाई प्रतिस्थापन गरेर पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

अथवा $y = 30 - 20 = 10$ kg हुन्छ ।

क्रियाकलाप 2

एउटा विद्यालयले आफ्नो जग्गाको वरिपरि तारजालीको कम्पाउन्ड लगाउने निर्णय गरेछ। उक्त जग्गाको लम्बाइ x मिटर र चौडाइ y मिटर छ। यदि वरिपरि एक फन्को लगाउँदा 300 मि. तार लागेछ भने,

(क) यसलाई समीकरण कसरी बनाउन सकिन्छ ? कक्षामा छलफल गरी समाधान गर्नुहोस्।

(ख) समीकरणमा भएका चलराशि कुन कुन हुन् ?

(ग) अचल राशि कुन कुन हो ?

दुइओटा चलराशि भएको तथा घाताङ्क 1 र बराबर चिह्न भएको समीकरणलाई दुई चलयुक्त रेखीय समीकरण भनिन्छ।

उदाहरण 1

एउटा कोठाको लम्बाइ र चौडाइको योगफल 22 m भए,

(क) समीकरण बनाई लेख्नुहोस्।

(ख) यदि कोठाको लम्बाइ 15 m भए चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

मानौँ कोठाको लम्बाइ = x m

कोठाको चौडाइ = y m

(क) प्रश्नअनुसार

$$x + y = 22$$

अतः समीकरण $x + y = 22$ हुन्छ।

(ख) यहाँ $x = 15$ m भए y को मान निकाल्दा,

$$x + y = 22$$

अथवा $15 + y = 22$

अथवा $y = 22 - 15$

अथवा $y = 7$ m

अतः कोठाको चौडाइ 7 m छ।

उदाहरण 2

रामसँग सिसाकलम र कलम गरी जम्मा 17 ओटा छन भने,

(क) सिसाकलम र कलमको सङ्ख्या जनाउने समीकरण लेख्नुहोस् ।

(ख) यदि कलम 5 ओटा भए सिसाकलमको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ कलमको सङ्ख्या = x

सिसाकलमको सङ्ख्या = y

जम्मा सिसाकलम र कलमको सङ्ख्या = 17

(क) प्रश्नअनुसार

$$x + y = 17$$

अत: आवश्यक समीकरण $x + y = 17$ हुन्छ ।

(ख) यहाँ कलमको सङ्ख्या (x) = 5

सिसाकलमको सङ्ख्या (y) = ?

अब $x + y = 17$

अथवा $5 + y = 17$

अथवा $y = 17 - 5$

अथवा $y = 12$

जाँचेर हेर्दा $x + y = 17$

अथवा $5 + 12 = 17$

अथवा $17 = 17$

अत: सिसाकलमको सङ्ख्या 12 ओटा छ ।

उदाहरण 3

रमाको उमेरको दुई गुणा र उनका बुबाको उमेरको योग 60 बर्ष भए,

(क) रमा र उनको बुबाको उमेर जनाउने समीकरण लेख्नुहोस् ।

(ख) रमा 10 बर्षकी भए उनको बुबा कति बर्षका छन ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं रमाको हालको उमेर = x बर्ष

रमाको बुबाको हालको उमेर = y बर्ष

(क) प्रश्नअनुसार

$$2x + y = 60$$

अतः आवश्यक समीकरण $2x + y = 60$ बर्ष हुन्छ ।

(ख) यहाँ रमाको उमेर (x) = 10 बर्ष

बुबाको उमेर (y) = ?

अब $x = 10$ समीकरण $2x + y = 60$ मा राख्दा,

$$2 \times 10 + y = 60$$

अथवा $20 + y = 60$

अथवा $y = 60 - 20$

अथवा $y = 40$

अतः रमाको उमेर 10 बर्ष भए बुबाको उमेर 40 बर्ष हुन्छ ।

अभ्यास 12.1

1. तल दिइएका वाक्यहरू सत्य वा असत्य के हुन छुट्याउनुहोस् ।

(क) $x + 4 = 8$ दुई चल राशि भएको समीकरण हो ।

(ख) $2x = 3y$ दुई चल राशि भएको समीकरण हो ।

(ग) बराबर चिह्न र दुई चलराशि भएको समीकरणलाई दुई चलराशिका समीकरण भनिन्छ ।

(घ) $3x = 12$ भएको समीकरण दुई चलयुक्त समीकरण हो ।

2. एउटा जग्गाको लम्बाइ x m र चौडाइ y m छ । यदि उक्त जग्गाको परिमिति 240 m भए,

(क) उक्त जग्गाको परिमिति जनाउने समीकरण लेख्नुहोस् ।

(ख) यदि उक्त जग्गाको लम्बाइ 70 m भए चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा आयताकार पोखरीको वरिपरि 5 m को बाटो छ । बाटोसहित पोखरीको परिमिति 210 मि. भए,

(क) उक्त पोखरीको लम्बाइ र चौडाइ जनाउने समीकरण लेख्नुहोस् ।

(ख) यदि पोखरीको चौडाइ 45 m भए लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. यदि दुईओटा क्रमैसँग आउने बिजोर सङ्ख्याहरूको योगफल 56 भए समीकरण बनाई ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. यदि एउटा कक्षामा भएका 75 जना विद्यार्थीमा केटाको सङ्ख्या केटीको सङ्ख्याको दोब्बर भए केटा र केटीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. शुभाषा र सुप्रिमको वर्तमान उमेरको योगफल 40 वर्ष छ । शुभाषाको उमेर सुप्रीमको उमेरको तेब्बर भए तिनीहरूको वर्तमानको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. एउटा कक्षामा 42 जना विद्यार्थीहरू छन् भने,

(क) सबै विद्यार्थीलाई जनाउने समीकरण लेख्नुहोस् ।

(ख) केटा र केटीको सङ्ख्या कति कति हुन सक्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) बेठिक (ख) ठिक (ग) ठिक (घ) ठिक
2. (क) $x + y = 120$ (ख) 50 m
3. (क) $x + y = 95$ (ख) 50 m
4. 27 र 29
5. 30 बर्ष र 10 बर्ष
6. रु. 50 र रु. 300
7. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6. 50 र 25

12.2 असमानतालाई सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्ने (Representation of inequality in number line)

राम र गीताको तलको कुराकानीको आधारमा छलफल गर्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 1

यदि x र y दुई ओटा पूर्णाङ्कहरू छन् । यी सङ्ख्यालाई गणितीय वाक्यमा कसरी प्रस्तुत गर्न सकिन्छ, आपसमा छलफल गर्नुहोस् ।

(क) के x र y बराबर छन ?

(ख) के $x < y$ हुन्छ ?

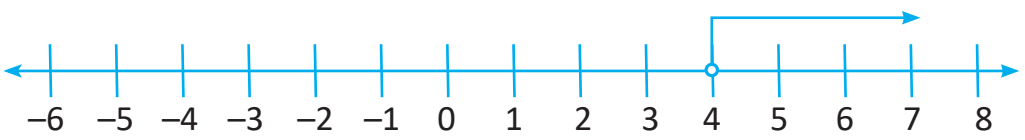
(ग) के $x > y$ हुन्छ ?

माथिका प्रश्नहरूका बारेमा थाहा पाउन x र y का मानहरू पूर्णाङ्कमा लिनुहोस, जस्तैः x को मान 4 लिँदा र 4 भन्दा ठुला पूर्णाङ्कहरू 5, 6, 7, ... हुन्छन् र $4 < 5, 4 < 6, 4 < 7$ र $4 < 8$, ... हुन्छन् । यसलाई गणितीय वाक्यमा लेख्दा $x > 4$ लेखिन्छ ।

क्रियाकलाप 2

$x > 4$ लाई सङ्ख्या रेखामा कसरी देखाउन सकिन्छ ? समूहमा छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

यहाँ 4 भन्दा ठुला सङ्ख्याहरू मात्रै x का मानहरू हुने भएकाले x को समाधान समूह $x = \{5, 6, 7, ...\}$ हुन्छ । त्यसैले, $x > 4$ लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,



x को मानहरूको समूहमा 4 नपर्ने भएकाले गोलो घेरा (O) मात्र लगाइएको हो ।

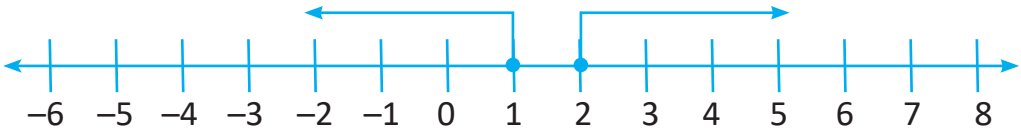
क्रियाकलाप 3

समूहमा छलफल गरी $x \geq 2$ र $x \leq 1$ लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् ।

यहाँ $x \geq 2$ को समाधान समूह $= \{2, 3, 4, ...\}$ हुन्छ र

$x \leq 1$ को समाधान समूह $= \{1, 0, -1, -2, ...\}$ हुन्छ ।

अब $x \geq 2$ र $x \leq 1$ लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,



[$x \geq 2$ को समाधान समूहमा 2 पनि पर्ने र $x \leq 1$ को समाधान समूहमा 1 पनि पर्ने भएकाले गोलो घेरा (●) लाई रङ लगाइएको हो ।]

असमानताका केही नियमहरू

१. यदि x र y दुई ओटा पूर्णाङ्कहरू छन जसमा $x > y$ र z अर्को पूर्णाङ्क छ भने,

(क) $x + z > y + z$ (जोड तथ्य)

(ख) $x - z > y - z$ (घटाउ तथ्य)

(ग) $xz > yz$ (गुणन तथ्य z धनात्मक सङ्ख्या)

(घ) $\frac{x}{z} > \frac{y}{z}$ (भाग तथ्य z धनात्मक सङ्ख्या)

(ङ) $xz < yz$ (गुणन तथा भाग तथ्य z ऋणात्मक सङ्ख्या)

ट्रिकोटोमीमा <, ≤, >, ≥ समावेश भएका गणितीय वाक्यको दुवैतिर ऋणात्मक सङ्ख्याले गुणन तथा भाग गर्दा वाक्यमा रहेका चिह्नहरू बदलिन्छन् ।

उदाहरण 1

$x + 2 > 5$ हल गरी सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ $x + 2 > 5$

अजथा $x + 2 - 2 > 5 - 2$ दुवैतिर 2 घटाउँदा

अथवा $x > 3$

यसलाई सङ्ख्यामा देखाउँदा,

अतः x को सम्भावित समाधान समूह = {4, 5, 6, ...} हुन्छ ।

उदाहरण 2

$3x - 2 \leq -11$ हल गरी सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ $3x - 2 \leq -11$

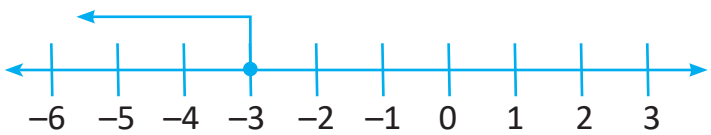
अथवा $3x - 2 + 2 \leq -11 + 2$ — दुवैतिर 2 जोड्दा

अथवा $3x \leq -9$

अथवा $\frac{3x}{3} \leq -\frac{9}{3}$ — दुवैतिर 3 ले भाग गर्दा

अथवा $x \leq -3$

यसलाई सङ्ख्यामा देखाउँदा,



अतः असमानताको सम्भावित समाधान समूह = {–3, –4, –5, ...}

उदाहरण 3

$3 - 2x \leq 9$ हल गरी सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ $3 - 2x \leq 9$

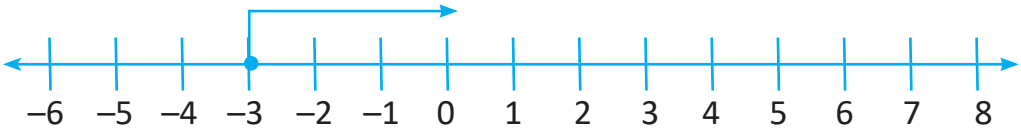
अथवा $-3 + 3 - 2x \leq 9 - 3$ — दुवैतिर 3 घटाउँदा

अथवा $-2x \leq 6$

अथवा $\frac{-2x}{-2} \leq \frac{6}{-2}$ — दुवैतिर -2 ले भाग गर्दा

अथवा $x \geq -3$

यसलाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,

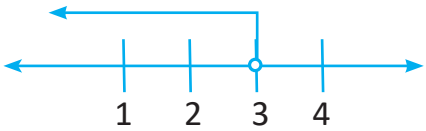


अतः असमानताको सम्भावित समाधान समूह = {–3, –2, –1, ...}

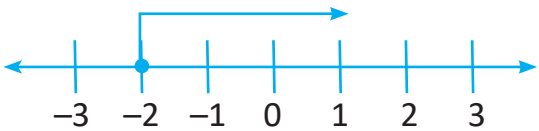
उदाहरण 4

तल दिइएका सङ्ख्या रेखाका आधारमा असमानता लेख्नुहोस् :

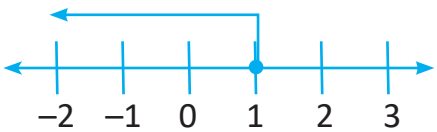
(क)



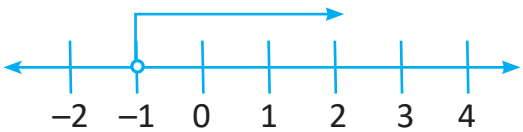
(ख)



(ग)



(घ)



समाधान

यहाँ

(क) 3 मा गोलो घेरामात्र लगाएको छ र यसको Arrow बायाँतिर लगाइएको छ अतः $x < 3$ हुन्छ ।

(ख) – 2 मा गोलो घेरामा रङ लगाएको छ र यसको Arrow दायाँतिर लगाइएको छ अतः $x \geq -2$ हुन्छ ।

(ग) 1 मा गोलो घेरामा रङ लगाएको छ र यसको Arrow बायाँतिर लगाइएको छ अतः $x \leq 1$ हुन्छ ।

(घ) –1 मा गोलो घेरा लगाएको छ र यसको Arrow दायाँतिर लगाइएको छ अतः $x > -1$ हुन्छ ।

अभ्यास 12.2

1. यदि 1, 2 र –3 पूर्णाङ्कहरू हुन भने तल दिइएका ट्रिकोटोमीका नियमानुसार ठिक छन् वा छैनन् छुट्याउनुहोस् :

(क) $1 + (-3) = 2 + (-3)$ (ख) $(2) - 3 < 1 + (2)$

(ग) $2 - (1) > -3 - (1)$ (घ) $(1) - 3 < (1) + 2$

(ङ) $\frac{1}{-3} > \frac{2}{-3}$ (च) $(-3) \times 1 \geq 2 \times (-3)$

2. तलका प्रत्येक असमानतालाई हल गरी सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् :

(क) $x + 1 > 2$ (ख) $x - 3 \leq 4$ (ग) $x + 2 < 4$

(घ) $x - 2 \leq 3$ (ङ) $3 - x \geq 1$ (च) $4 - 2x \geq 6$

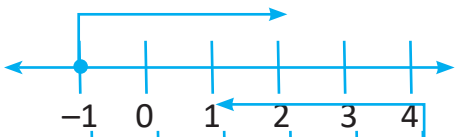
(छ) $3x + 2 \geq x - 6$ (ज) $5x - 3 \geq 12$ (झ) $7x - 4 \leq 17$

(झ) $5x - 7 \leq 2x + 5$

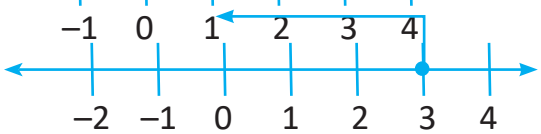
3. तल दिइएका सङ्ख्या रेखाका आधारमा असमानता लेख्नुहोस् :

(क)

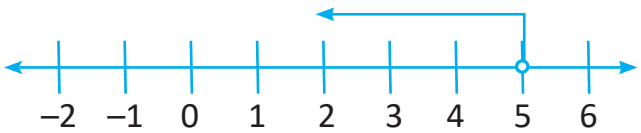
(ख)



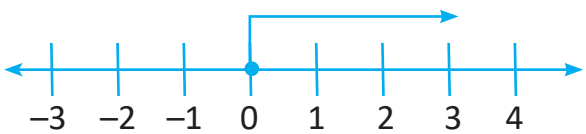
(ग)



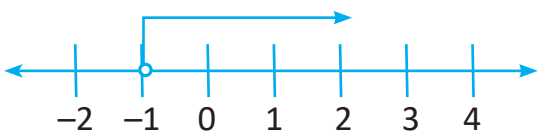
(घ)



(ङ)



(च)



4. तल दिइएका समस्यालाई हल गरी सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् :

(क) एउटा सङ्ख्याको एक चौथाइलाई 3 बाट घटाउँदा फरक 2 भन्दा ठुलो वा बराबर आउँछ भने उक्त वाक्यको असमानतालाई हल गरी सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् ।

(ख) एउटा सङ्ख्याको दोब्बरलाई 13 बाट घटाउँदा 3 भन्दा कमी आउँछ भने उक्त वाक्यको असमानता हल गरी सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् ।

(ग) कुनै सङ्ख्याको चारगुणाबाट 9 घटाउँदा फरक –3 भन्दा सानो वा बराबर आउँछ भने उक्त वाक्यको असमानता हल गरी सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् ।

(घ) कुनै सङ्ख्याको तीनगुणामा 7 जोड्दा योगफल 13 भन्दा सानो आउँछ भने उक्त वाक्यको असमानता हल गरी सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

12.3 दुई चलयुक्त रेखीय समीकरणको लेखाचित्र (Graph of linear equation in two variable)

क्रियाकलाप 1

एउटा विद्यालयको प्रध्यापकले केहि भलिबल र केहि फुटबल किनेर ल्याएछन् । यदि उनले जम्मा 11 ओटा बलहरू किनेका रहेछन् भने,

(क) उक्त गणितीय वाक्यलाई समीकरणमा लेख्नुहोस् ।

(ख) उक्त समीकरणमा चलराशिका मानहरू कम्तीमा 3/3 ओटा लिनुहोस् ।

(ग) उक्त चलराशिका मानहरूलाई दिइएको लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

अब कक्षामा एकआपसमा माथिका प्रश्नहरूको चलराशिको मान कसरी निकाल्नेबारे आपसमा छलफल गर्नुहोस् ।

कक्षामा छलफल गरेपछि तलको अवस्थासँग मिल्न गयो वा गएन जाँच गर्नुहोस् ।

(क) मानौँ भलिबलको सङ्ख्या = x

फुटबलको सङ्ख्या = y

जम्मा बलको सङ्ख्या = 11

प्रश्नअनुसार,

समीकरणमा लेख्दा $x + y = 11$ हुन्छ ।

(ख) रेखाको समीकरण $x + y = 11$ बाट चलराशिका मानहरू निकाल्नुहोस् ।

$x + y = 11$

$y = 11 - x$ ..... (i)

समीकरण (i) बाट, x लाई विभिन्न मानहरू दिएर y का मानहरू पत्ता लगाई तालिकामा देखाउँदा,

x	0	2	4	6
y	11	9	7	5

(ग) माथिका तालिकाबाट क्रमजोडाहरू (0, 11), (2, 9), (4, 7) र (6, 5) लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरेर देखाउनुहोस् ।

लेखाचित्रमा माथिका क्रमजोडालाई प्रस्तुत गर्दा सबै क्रमजोडाहरू एउटै सरल रेखामा पर्दछन् ।

उदाहरण 1

समीकरण $y = \frac{3x-1}{2}$ बाट बन्ने x र y का मानहरू तलको तालिकामा भर्नुहोस् :

x	–1	1	3	–3	5	–5
y						

समाधान

यहाँ दिइएको समीकरण $y = \frac{3x-1}{2}$

दिइएका x का मानहरू समीकरणमा राखी y को मान पत्ता लगाई तालिकामा भर्दा,

x	–1	1	3	–3	5	–5
y	–2	1	4	–5	7	–8

उदाहरण 2

दुइ चल राशियुक्त समीकरण 3x + y = 6 लाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् :

समाधान

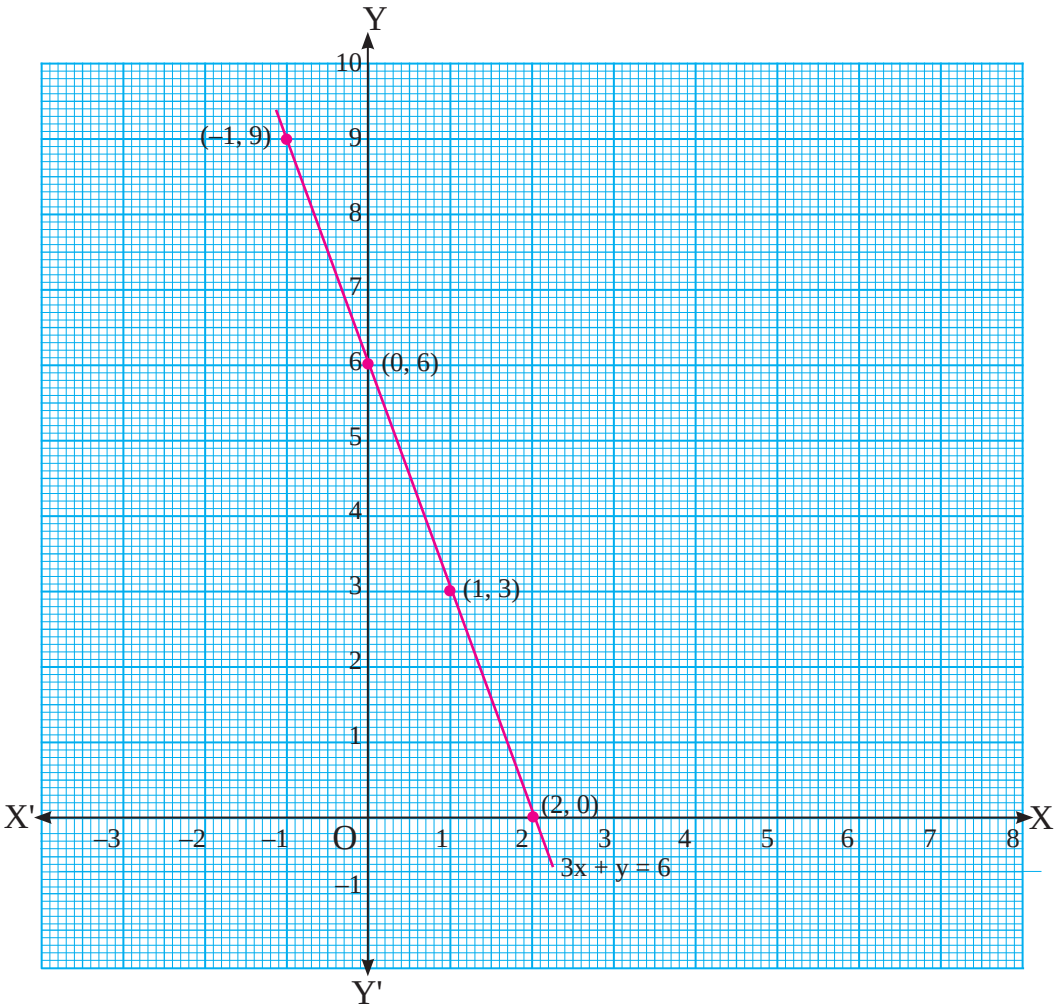
$3x + y = 6$

अथवा $y = 6 - 3x$ ... (i)

समीकरण (i) बाट, x लाई विभिन्न मानहरू दिएर y को मानहरू पत्ता लगाई तालिकामा देखाउँदा,

x	0	1	–1	2
y	6	3	9	0

अब क्रमजोडाहरू (0, 6), (1, 3), (–1, 9) र (2, 0) लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,



अभ्यास 12.2

1. तल दिइएका समीकरणबाट x र y का मानहरूको तालिका बनाउनुहोस् :

(क) $3x + y = 6$ (ख) $x + y = 4$ (ग) $3x - y = 7$

2. तल दिइएका समीकरणको लेखाचित्र बनाउनुहोस् :

(क) $2x + y = 8$ (ख) $3x + 2y = 6$ (ग) $x + y + 3 = 0$

(घ) $x + 2y = 10$ (ङ) $y = 4x - 1$ (च) $2x + y - 3 = 0$

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास

1. तलका गुणन क्रियालाई घाताङ्कमा बदल्नुहोस् :

(क) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ (ख) $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$

2. यदि $a = 1, b = 2$ र $c = -3$ भए, मान निकाल्नुहोस् :

(क) $(xyz)^{a+b+c}$ (ख) $(a + b + c)^{100}$ (ग) $\frac{x^c}{x^{-a} \times x^{-b}}$ (घ) $(z)^a \times (z)^b \times (z)^c$

3. यदि $a = 3, b = 1$ र $c = -4$ भए तलका मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $2a^2 + 3b - 4bc$ (ख) $a^2 + b^2 - c^2$

(ग) $\frac{a + b}{c}$ (घ) $\frac{a + b - c}{2ab}$

4. भाग गर्नुहोस् :

(क) $(x^2 - 7x + 12)$ by $(x - 3)$ (ख) $(x^4 - 81y^4)$ by $(x^2 - 9y^2)$

(ग) $(15x^2 + 11x - 12) \div (3x + 4)$

5. एउटा क्रिकेट रङ्गशालाको लम्बाइ $(2x + y)$ m र चौडाइ $(x - 2y)$ m छ भने उक्त रङ्गशालाको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

6. एउटा बैठकहलको क्षेत्रफल $(2x^2 - 7x + 6)$ वर्ग मि. छ । उक्त बैठक हलमा $(x - 2)$ m चौडाइ भएको कार्पेट बिच्छाउँदा,

(क) कति मिटर लम्बाइको कार्पेट किन्नु पर्दछ निकाल्नुहोस् ।

(ख) यदि $x = 50$ भए कार्पेटको लम्बाइ, चौडाइ, वास्तबिक क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि प्रति वर्ग मि. कार्पेटको रु. 400 भए कार्पेट किन्न लाग्ने खर्च पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. $(56x^2 + 106x - 30)$ लाई $(7x + 15)$ ले भाग गर्दा कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. तलका अभिव्यञ्जकको सूत्र प्रयोग गरी, नगरी र ज्यामितीय चित्रबाट वर्ग निकाल्नुहोस् :

(क) $(y + 4)$ (ख) $(y + 5)$ (ग) $(b - 2)$

9. तलका सङ्ख्याहरूलाई दुईओटा सङ्ख्याहरूको जोड र घटाउबाट वर्ग निकाल्नुहोस् :

(क) 28 (ख) 296 (ग) 502

10. सरल गर्नुहोस् :

(क) $(2a - 3b)^2 - (2a + 3b)^2$ (ख) $(\frac{1}{a} + a)^2 + (a - \frac{1}{a})^2$

(ग) $(m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2$

11. यदि $p + \frac{1}{p} = 12$ भए मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $p^2 + \frac{1}{p^2}$ (ख) $(p - \frac{1}{p})^2$

12. यदि $x + y = 15$ र $xy = 8$ भए मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $x^2 + y^2$ (ख) $(x - y)^2$

13. यदि $b - \frac{1}{b} = 8$ भए मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $b^2 + \frac{1}{b^2}$ (ख) $(b - \frac{1}{b})^2$

14. तल दिइएका समीकरणबाट x र y का मानहरूको तालिका बनाउनुहोस् :

(क) $x + y = 2$ (ख) $2x - y = 4$

15. तल दिइएका समीकरणको लेखाचित्र बनाउनुहोस् ।

(क) $2x + y = 5$ (ख) $4x + 3y = 6$ (घ) $3x - 2y = 7$

उत्तर

1. (क) $(\frac{2}{3})^5$ (ख) $(\frac{a}{b})^6$ 2. (क) 1 (ख) 0 (ग) 1

(घ) 1 3. (क) 69 (ख) –6 (ग) –1 (घ) $\frac{4}{3}$

4. (क) $(x - 4)$ (ख) $x^2 + 9y^2$ (ग) $(5x - 3)$

5. (क) $2x^2 - 3xy - 2y^2$ वर्ग मि. (ख) 140 m, 1000 m^2

6. (क) $(2x - 3)$ मि. (ख) 97 m, 48m, 4656 m^2

7. $(8x - 2)$ 8. (क) $y^2 + 8y + 16$ (ख) $y^2 + 10y + 25$

(ग) $b^2 - 4b + 4$ 9. (क) 784 (ख) 87616 (ग) 252004

10. (क) –24ab (ख) $2(a^2 + \frac{1}{a^2})$ (ग) $4m^2n^2$

11. (क) 142 (ख) 140 12. (क) 209 (ख) 191

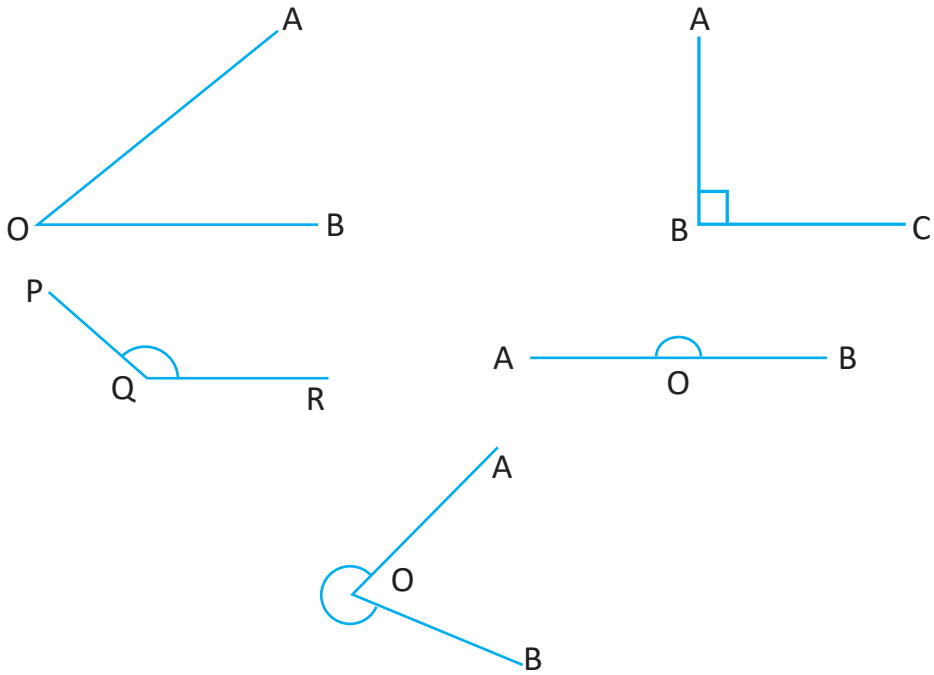
13. (क) 66 (ख) 68 14 – 15. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 13

रेखा र कोणहरू
(Lines and angles)

13.0 पुनरवलोकन (Review)

तल दिइएका कोणहरू नाप्नुहोस र न्यूनकोण (Acute angle), समकोण (Right angle), अधिककोण (Obtuse angle), सिधाकोण (Straight angle), बृहत्कोण (Reflect angle) छुट्याउनुहोस् ।



तल दिइएका कोणहरू चाँदको प्रयोग गरी खिच्नुहोस् :

(क) 65° (ख) 110° (ग) 90°

तल दिइएका कोणहरू सेटस्क्वाएरको प्रयोग गरी खिच्नुहोस् :

(क) 30° (ख) 45° (ग) 60° (घ) 90°

तल दिइएका कोणहरू कम्पासको प्रयोग गरी खिच्नुहोस् :

(क) 30° (ख) 60° (ग) 120°

13.1 कम्पासको प्रयोगद्वारा कोणहरूको रचना (Construction of angle by using compass)

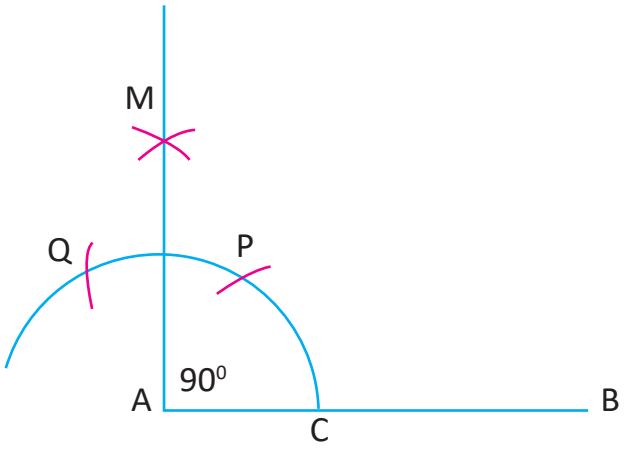
क्रियाकलाप 1

तल दिइएअनुसार कम्पासको प्रयोग गरी 90° को कोणको रचना गर्नुहोस् :

तरिका

(क) एउटा रेखाखण्ड AB खिच्नुहोस् ।

(ख) बिन्दु A मा कम्पासको चुच्चो (सियो) राखी AC अर्धव्यास बराबरको नाप लिएर चाप खिच्नुहोस् र उक्त अर्धव्यास बराबरको नापले बिन्दु C बाट चाप काट्नुहोस् र काटिएको बिन्दुको नाम P दिनुहोस् । उहि नापको अर्धव्यास लिएर P बाट चाप काट्नुहोस् र काटिएको बिन्दुको नाम Q दिनुहोस् ।



(ग) बिन्दु P र Q बाट कुनै नापको अर्धव्यास लिई बिन्दु P र Q बाट एउटै बिन्दुमा काटिने गरी चाप काट्नुहोस् र काटिएको बिन्दुको नाम M दिनुहोस् । A र M लाई जोड्नुहोस् र चाँदको प्रयोग गरी ∠MAB नाप्नुहोस् ।

अतः ∠MAB = 90° तयार भयो ।

क्रियाकलाप 2

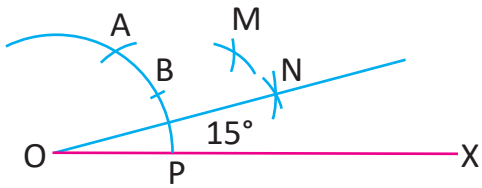
तल दिइएअनुसार कम्पासको प्रयोग गरी 15° को कोणको रचना गर्नुहोस् :

तरिका

(क) एउटा रेखाखण्ड OX खिच्नुहोस् ।

(ख) बिन्दु O मा कम्पासको सियो राखी OP अर्धव्यास बराबरको नाप लिएर चाप खिच्नुहोस् ।

(ग) बिन्दु P बाट उही नापको अर्धव्यास लिएर पहिलेको चापमा काट्नुहोस र काटिएको बिन्दुको नाम A दिनुहोस् । जहाँ 60° को कोण बन्दछ ।



(घ) बिन्दु A र P बाट कुनै नापको अर्धव्यास लिएर एउटै बिन्दुमा काटिने गरी चाप काट्नुहोस् र काटिएको बिन्दुको नाम M दिनुहोस् ।

(ङ) रुलरले सिधा पारी चाप AP मा चिह्न B दिनुहोस ।

(च) बिन्दु B र P बाट कुनै नापको अर्धव्यास लिएर एउटै बिन्दुमा काटिने गरी चाप काट्नुहोस् र काटिएको बिन्दुको नाम N दिनुहोस् ।

(छ) अब बिन्दु N र O जोड्नुहोस् र चाँदको प्रयोग गरी ∠NOP नाप्नुहोस् ।

अतः ∠NOP = 15° तयार भयो ।

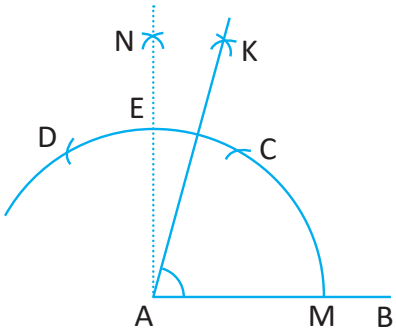
क्रियाकलाप 3

तल दिइएअनुसार कम्पासको प्रयोग गरी 75° को कोणको रचना गर्नुहोस् :

तरिका

(क) एउटा रेखाखण्ड AB खिच्नुहोस् ।

(ख) बिन्दु A मा कम्पासको चुच्चो (सियो) राखी AM को नाप बराबरको अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस् । उक्त अर्धव्यास बराबर हुने गरी बिन्दु M बाट बिन्दु C र बिन्दु C बाट बिन्दु D मा चाप खिच्नुहोस् जहाँ 60° र 120° को कोण बन्दछ ।



(ग) बिन्दु C र D बाट कुनै चाप लिई बिन्दु N मा काट्नुहोस् र बिन्दु N र A लाई जोड्नुहोस यसरी जोड्दा चापलाई बिन्दु E मा काट्छ ।

(घ) बिन्दु E र C बाट कुनै चाप लिई बिन्दु K मा काट्नुहोस् र बिन्दु A र K लाई जोड्नुहोस र चाँदको प्रयोग गरी ∠KAB नाप्नुहोस् ।

अतः ∠KAB = 75° तयार भयो ।

क्रियाकलाप 4

तल दिइएअनुसार कम्पासको प्रयोग गरी 105° को कोणको रचना गर्नुहोस् :

तरिका

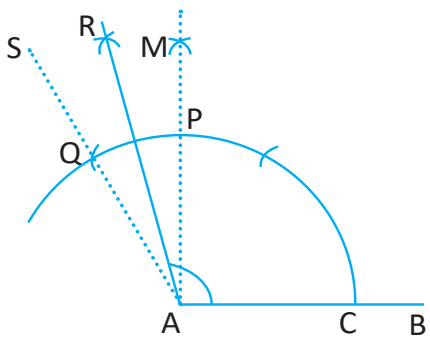
(क) एउटा रेखाखण्ड AB खिच्नुहोस् ।

(ख) बिन्दु A मा ∠SAB = 120° र ∠MAB = 90° का कोणहरू खिच्नुहोस् ।

(ग) बिन्दु P र Q बाट O मा कुनै नापको अर्धव्यास लिएर बिन्दु R मा चाप काट्नुहोस् ।

(घ) बिन्दु R र A लाई जोड्नुहोस र चाँदको प्रयोग गरी ∠RAB नाप्नुहोस् ।

अतः ∠RAB = 105° तयार भयो ।



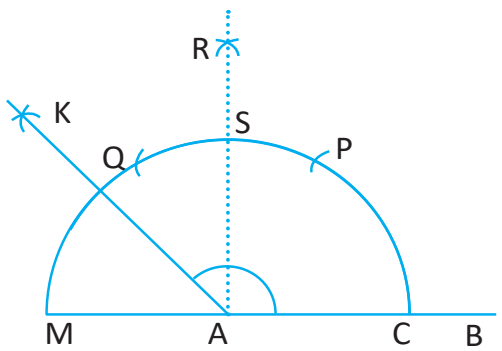
क्रियाकलाप 5

तल दिइएअनुसार कम्पासको प्रयोग गरी 135° को कोणको रचना गर्नुहोस् :

तरिका

(क) एउटा रेखाखण्ड MAB खिच्नुहोस् ।

(ख) बिन्दु A मा कम्पासको चुच्चो (सियो) राखि AC अर्धव्यास बराबरको नाप लिएर चाप खिच्नुहोस् र उक्त अर्धव्यास बराबरको नापले बिन्दु C बाट चाप काट्नुहोस् र काटिएको बिन्दुको नाम P दिनुहोस् । उही नापको अर्धव्यास लिएर P बाट चाप काट्नुहोस् र काटिएको बिन्दुको नाम Q दिनुहोस् ।



(ग) बिन्दु Q र P बाट कुनै नापको अर्धव्यास लिएर एउटै बिन्दुमा काटिने गरी चाप काट्नुहोस् र काटिएको बिन्दुको नाम R दिनुहोस् । अतः R र A लाई जोड्दा ∠RAC = ∠SAM = 90° बन्दछ ।

(घ) बिन्दु S र M बाट एउटै नापको अर्धव्यास लिई एउटै बिन्दुमा काटिने गरी चाप काट्नुहोस् र काटिएको बिन्दुको नाम K दिनुहोसु ।

अब बिन्दु K र A लाई जोड्नुहोस र चाँदको प्रयोग गरी ∠KAC नाप्नुहोस् ।

अतः ∠KAC = 135° तयार भयो ।

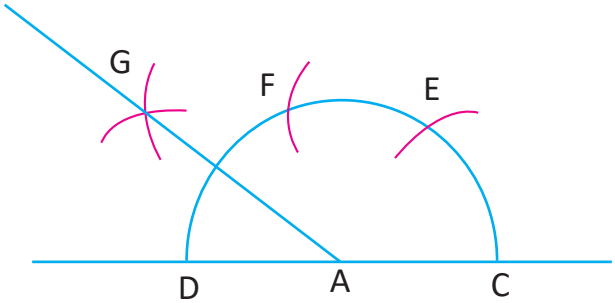
क्रियाकलाप 6

तल दिइएअनुसार कम्पासको प्रयोग गरी 150° को कोणको रचना गर्नुहोस् :

तरिका

(क) एउटा रेखाखण्ड DAC खिच्नुहोस् ।

(ख) बिन्दु C बाट AC को नाप बराबरको अर्धव्यास लिएर बिन्दु C बाट E मा र E बाट F मा चाप काट्नुहोस् ।



(ग) कुनै नापको अर्धव्यास लिएर बिन्दु F र D बाट चाप काट्नुहोस् । ती चापहरू काटिएको बिन्दुको नाम G दिनुहोसु ।

(घ) अब बिन्दुहरू G र A लाई जोड्नुहोस् र चाँदको प्रयोग गरी ∠GAC नाप्नुहोस् ।

अतः ∠GAC = 150° तयार भयो ।

अभ्यास 13.1

1. कम्पास र रुलरको सहायताले तल दिइएका नापका कोणहरू खिच्नुहोस् ।

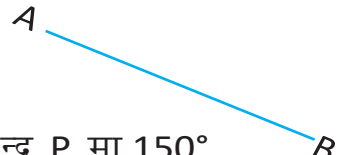
(क) 1 5° (ख) 45° (ग) 60° (घ) 75°

(ङ) 105° (च) 135° (छ) 150°

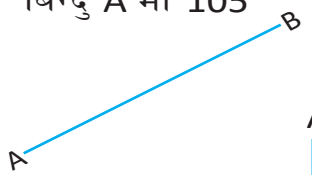
2. तलका रेखाहरू कापीमा खिची दिइएका बिन्दुहरूमा कोणहरू खिच्नुहोस् :

(क) बिन्दु Q मा 135°

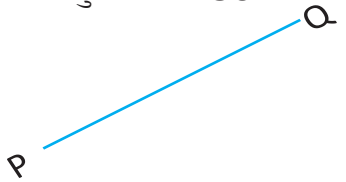
(ख) बिन्दु B मा 75°



(ग) बिन्दु A मा 105°



(घ) बिन्दु P मा 150°



(घ) बिन्दु B मा 120°

3. कम्पासको सहायताले 150° को कोण खिची त्यसलाई आधा गर्नुहोस् र उक्त कोण चाँदले नापेर हेर्नुहोस् ।

4. रेखाखण्ड AB को बिन्दु A र B मा क्रमशः 105° र 30° को कोण बनाउनुहोस् । कोणहरू बनाएको रेखाखण्डहरू काटिएको बिन्दुलाई C नाम दिनुहोस् । ∠ACB लाई चाँपले नापी कति डिग्रीको कोण भयो लेख्नुहोस् ।

5. रेखा PQ = 6cm खिची बिन्दु P र Q का क्रमशः 135° र 15° को कोणहरू बनाउनुहोस् । कोणहरू बनाएको रेखाहरू काटिएको बिन्दुलाई R नाम दिनुहोस् अब ∠PRQ चाँपले नापी कति डिग्रीको कोण भयो लेख्नुहोस् ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

13.2 कम्पासको प्रयोगबाट बराबर कोणको रचना (Construction of equal angle using campass)

क्रियाकलाप 1

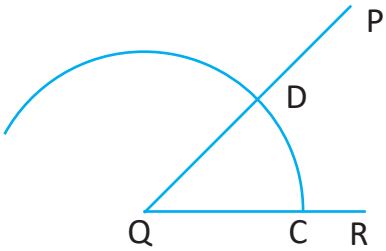
रुलरको सहायताले एउटा कोण खिच्नुहोस । तल दिइएअनुसार उक्त कोणसँग बराबर हुने गरी कम्पासको सहायताले अर्को कोणको रचना गर्नुहोस् :

तरिका

(क) रुलरले एउटा कोण ∠PQR खिच्नुहोस् ।

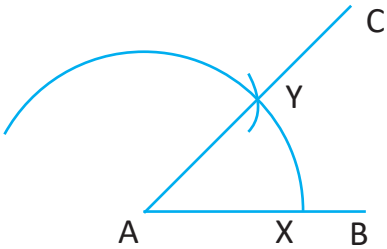
(ख) एउटा सिधारेखा AB खिच्नुहोस् ।

(ग) बिन्दु Q मा कम्पासको चुच्चो (सियो) राखी QC को नाप बराबरको अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस् र त्यो चापले ∠PQR लाई बिन्दु C र D काट्छ ।



(घ) कम्पासको चुच्चो बिन्दु A मा राखी पहिलेकै अर्धव्यास बराबरको नाप लिएर चाप खिच्नुहोस् ।

(ङ) बिन्दु C र D बिचको लम्बाइ कम्पासको सहायताले नाप्नुहोस र बिन्दु X मा राखी Y बिन्दुमा काट्नुहोस् । अब बिन्दु A र Y लाई जोडि बिन्दु C सम्म पुऱ्याउनुहोस् ।



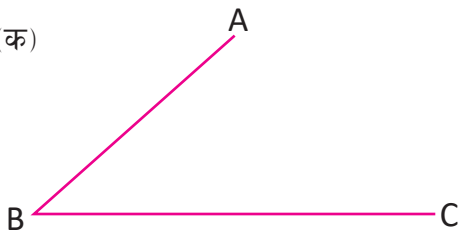
(च) अब ∠PQR र ∠CAB चाँदको सहायताले नापी बराबर भए नभएको तुलना गर्नुहोस् ।

अतः ∠PQR सँग बराबर हुने ∠CAB को रचना भयो ।

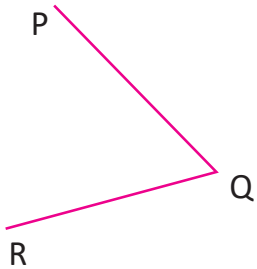
अभ्यास 13.2

1. तल दिइएका कोणहरू आफ्नो कापीमा ट्रेसिङ गर्नुहोस् । उक्त कोणहरूसँग बराबर हुने कोणको रचना गर्नुहोस् :

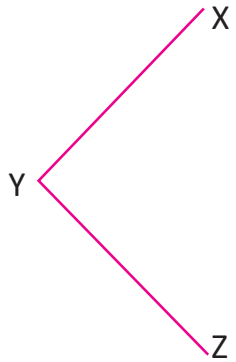
(क)



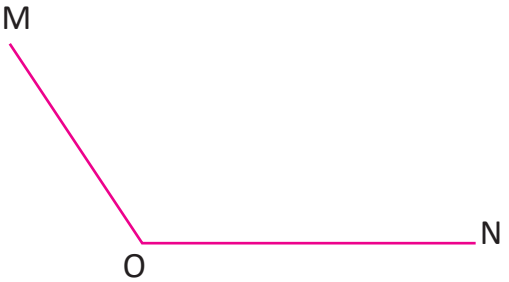
(ख)



(ग)



(घ)



2. तल दिइएका नाप भएका कोणहरू चाँदको सहायताले खिच्नुहोस् उक्त कोणसँग बराबर हुने गरी कम्पासको सहायताले कोणहरू खिच्नुहोस् :

(क) 35° (ख) 50° (ग) 95° (घ) 130° (ङ) 160°

उत्तर

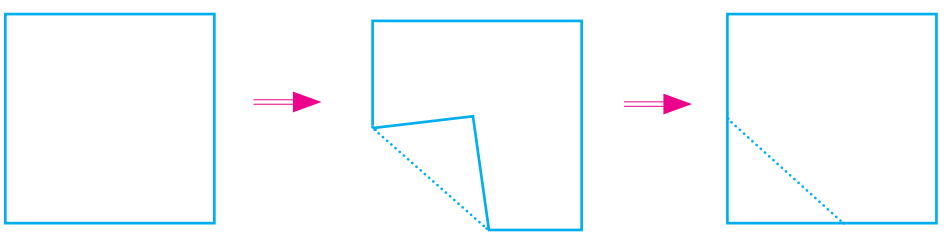
शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

13.3 जोडा कोणहरूको परिचय (Introduction of pair of angles)

13.3.1 आसन्न कोणहरू (Adjacent angles)

क्रियाकलाप 1

एउटा कापीको पाना लिनुहोस् । उक्त कापीको पानालाई कुनै एक किनाराबाट पट्याउनुहोस् । यसरी पट्याएको कापीको भागलाई खोल्नुहोस् । पट्टिएको भाग र किनारामा सिधा रेखाहरू खिच्नुहोस् । अब साथीहरूसँग तलका प्रश्नहरूबारे छलफल गर्नुहोस् :



(क) चित्रमा कतिओटा सिधा रेखाहरू छन् ?

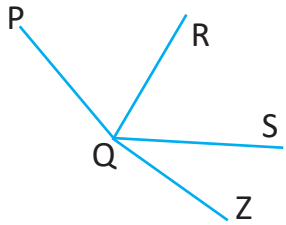
(ख) चित्रमा कतिओटा कोणहरू र शीर्षबिन्दुहरू छन् ?

(ग) ती कोणहरूको कुनै भाग साझा छ ?

क्रियाकलाप 2

शिर्ष बिन्दु Q बाट QS, QR, QP र QZ रेखाहरू खिच्नुहोस् ।

यसरी रेखाहरू खिच्दा चित्रमा कुन कुन कोणहरू बन्दछन्, छलफल गर्नुहोस् ।



साथै ∠PQR र ∠RQS, ∠RQS र ∠SQZ, ∠PQR र ∠RQZ मा के के कुरा साझा छन छलफल गर्नुहोस् ?

अब ∠PQR र ∠RQS मा साझा भुजा QR छ ।

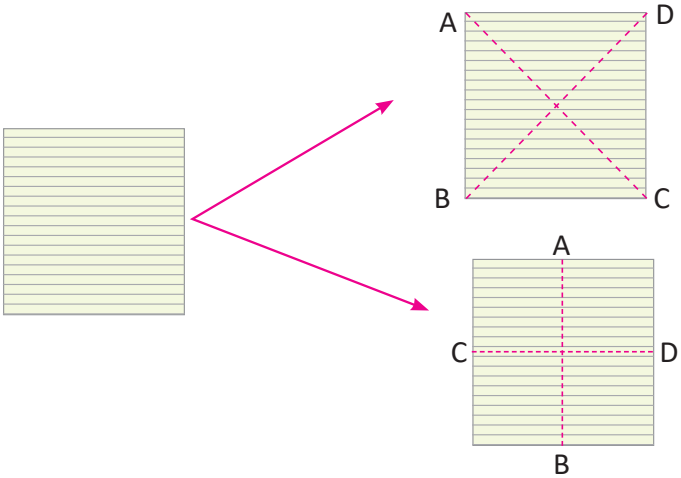
∠RQS र ∠SQZ मा साझा भुजा QS छ ।

∠PQR र ∠RQZ मा साझा भुजा QR छ ।

एउटै शीर्षबिन्दु र साझा भुजाको दुवैतिर पर्ने कोणहरूलाई आसन्न कोणहरू (Adjacent angles) भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 3

एउटा कापीको पाना लिनुहोस् । उक्त कापीको पानालाई तलको चित्रमा देखाए जस्तै गरी पट्याउनुहोस् । यसरी पट्याएको कापीको पानालाई खोल्नुहोस् जसमा किनारा र पट्टिएको भाग बिचमा दुई सिधा रेखाहरू एउटा बिन्दुमा काटिएको देख्नुहुन्छ । देखिएका भागमा रेखाखण्ड खिच्नुहोस् र कक्षामा छलफल गर्नुहोस् ।



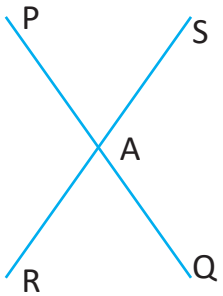
(क) कापीको किनारा पट्टिएको भागको बिचमा कतिओटा कोणहरू बन्दछ, छलफल गर्नुहोस् ।

(ख) ती बनेका कोणहरूमा के साझा छ, छलफल गर्नुहोस् ।

13.3.2 शीर्षाभिमुख कोणहरू (Vertically opposite angles)

क्रियाकलाप 4

दुईओटा सिधा रेखाहरू PQ र RS परस्पर काटिने गरी खिच्नुहोस् र काटिएको बिन्दुको नाम A दिनुहोस् । अब दुई रेखाहरूबिच बनेका कोणहरू क्रमशः ∠PAS,∠RAQ, ∠PAR र ∠QAS लाई नाप्नुहोस् र कुन कुन कोणहरू बराबर छन कक्षामा छलफल गर्नुहोस् ।



यहाँ कोणहरू ∠PAS, ∠RAQ, ∠PAR र ∠QAS नाप्दा बराबर नाप भएका कोणहरू विपरीत दिशामा बनेका कोणहरू छन् । विपरीत दिशामा बनेका कोणहरू शीर्षाभिमुख कोणहरू हुन् ।

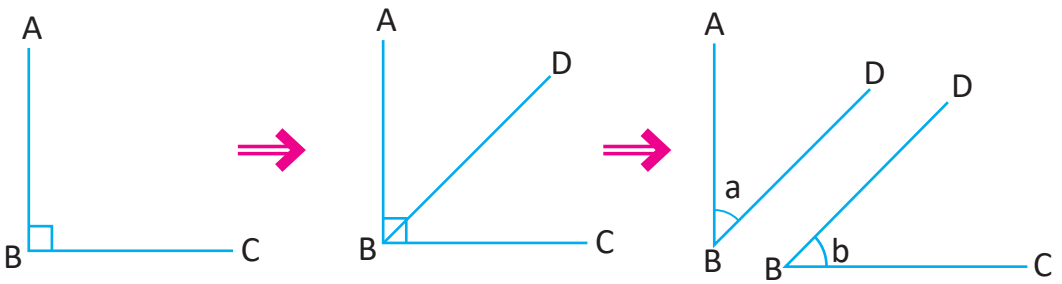
अतः ∠PAS = ∠RAQ र ∠PAR = ∠QAS जोडा शिर्षाभिमुख कोणहरू हुन् ।

दुईओटा सिधा रेखाहरू आपसमा काटिँदा विपरीत दिशातिर बनेका कोणहरूलाई शीर्षाभिमुख कोणहरू (Vertically Opposite Angles) भनिन्छ । यिनीहरू एकआपसमा अनासन्न हुन्छन् ।

13.3.3 समपूरक कोणहरू (Complementary angles)

क्रियाकलाप 5

सेट स्क्वाएरको सहायताले एउटा 90° को कोण खिच्नुहोस् । उक्त कोणको बिन्दु B बाट अर्को सिधारेखा BD खिच्नुहोस् । चाँदको प्रयोग गरी ∠ABD र ∠DBC को नाप लिनुहोस् ।



अब ∠ABD र ∠DBC को नापको योगफल निकाल्नुहोस् । ∠ABD र ∠DBC को योग 90° हुन्छ । यसरी दुई कोणहरूको योगफल 90° भए ती कोणहरू एकअर्काका समपूरक कोणहरू हुन्छन् ।

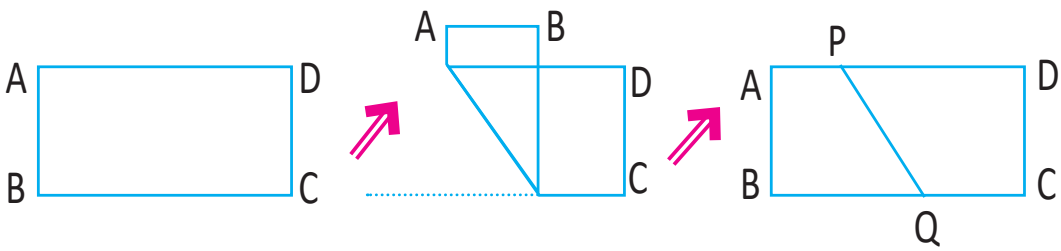
सगैको चित्रमा दिइएका कोणहरू a° र b° को योग पनि 90° हुन्छ । अतः यी कोणहरू समपूरक कोणहरू हुन् ।

यदि दुईओटा कोणहरूको योगफल 90° (एक समकोण) छ भने ती कोणहरूलाई एक अर्काको समपुरक कोणहरू (Complementary angles) भनिन्छ ।

13.3.4 परिपूरक कोणहरू (Supplementary angles)

क्रियाकलाप 6

एउटा कापीको पाना लिनुहोस् र चित्रमा देखाए जस्तै गरी ABCD नामाकरण गर्नुहोस् । अब उक्त पेपरलाई लम्बाइतिरबाट पट्याउनुहोस् र पट्याउँदा बनेको ठाउँलाई P र Q नामाकरण गरी PQ रेखाखण्ड खिच्नुहोस् ।



∠BQP + ∠PQC र ∠BQC को नाप लिनुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

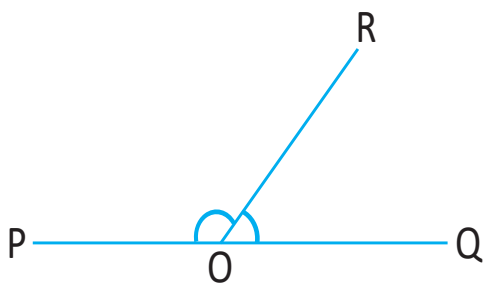
अब ∠BQC = 180° हुनाले भित्रि कोणहरू ∠BQP र ∠PQC को योगफल 180° हुन्छ ।

क्रियाकलाप 7

एउटा सिधारेखा PQ खिच्नुहोस् र रेखा PQ मा कुनै बिन्दु O लिनुहोस् र OR रेखा खिच्नुहोस् ।

अब ∠POR र ∠ROQ नापेर हेर्नुहोस् ।

∠POR र ∠ROQ लाई जोड्दा कति डिग्री हुन्छ पत्ता लगाउनुहोस् ।

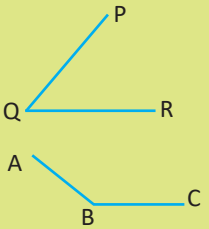


यहाँ ∠POR + ∠ROQ = 180° हुन्छ । अतः ∠POR र ∠ROQ परिपूरक कोणहरू हुन ।

दुईओटा कोणहरूको योगफल दुई समकोण वा 180° हुन्छ भने ती दुईओटा कोणहरूलाई एकअर्काका परिपूरक कोणहरू भनिन्छ ।

सँगैको चित्रमा दुई कोण ∠PQR = 70° र ∠ABC = 110° छ । यी दुई कोणहरूको जोड पनि 180° हुन्छ ।

अतः ∠PQR को परिपूरक कोण ∠ABC हो ।



उदाहरण 1

दिइएको चित्रमा AB र CD बिन्दु O मा काटिएका छन् भने :

(क) ∠AOD र ∠AOC का शीर्षाभिमुख कोणहरू लेख्नुहोस् ।

(ख) ∠AOD को आसन्न कोणहरू कुन कुन हुन्, लेख्नुहोस् ।

(ग) ∠BOD र ∠BOC को योगफल कति डिग्री हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

(घ) ∠AOC सँग बराबर हुने कोण कुन हो, लेख्नुहोस् ।

(ङ) ∠BOC को परिपूरक कोण लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ,

(क) ∠AOD को शीर्षाभिमुख कोण ∠BOC र ∠AOC को शीर्षाभिमुख कोण ∠BOD हुन् ।

(ख) ∠AOD को आसन्न कोणहरू क्रमशः ∠AOC र ∠BOD हुन् ।

(ग) ∠BOD र ∠BOC को योगफल 180° हुन्छ ।

(घ) ∠AOC सँग बराबर हुने कोण ∠BOD हो ।

(ङ) ∠BOC को परिपूरक कोणहरू ∠AOC र ∠BOD दुवै हुन् ।

उदाहरण 2

दिइएको चित्रमा PQ, QR र RS बिन्दु Q बाट खिचिएका छन् जसमा $\angle PQR = 90°$ छ भने,

(क) $\angle PQS$ को आसन्न कोण लेख्नुहोस् ।

(ख) $\angle SQR$ को समपूरक कोण लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ (क) $\angle PQS$ को आसन्न कोण $\angle SQR$ हो ।

(ख) $\angle SQR$ को समपूरक कोण $\angle PQS$ हो ।

उदाहरण 3

33° कोणको समपूरक र परिपूरक कोणहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ दिइएको कोण = 33°

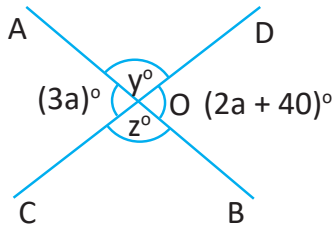
अथवा 33° कोणको समपूरक = (90° – 33°) = 57°

अथवा 33° कोणको परिपूरक = (180° – 33°) = 147°

अत: 33° को समपूरक कोण 57° र परिपूरक कोण 147° हो ।

उदाहरण 4

दिइएको चित्रबाट x, y र a को मानहरू निकाल्नुहोस् :



समाधान

यहाँ

(i) $\angle AOC = \angle BOD$ [∵ शीर्षाभिमुख कोणहरू]

अथवा $3a = 2a + 40°$

अथवा $a = 40°$

(ii) $\angle AOD + \angle AOC = 180°$ [∵ सिधा रेखामा बनेका कोण]

अथवा $y + 3a = 180°$

अथवा $y + 3 \times 40 = 180°$ $\quad$ [$\because a = 40°$]

अथवा $y = 180° - 120°$

अथवा $y = 60°$

(iii) $\angle BOC = \angle AOD$ $\quad$ [$\because$ शीर्षाभिमुख कोणहरू]

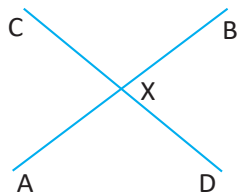
अथवा $z = y$

अथवा $z = 60°$

अत: $a = 40°$, $y = 60°$ र $z = 60°$

अभ्यास 13.3

1. दिइएको चित्रमा $\angle AXC$ सँग तलका सम्बन्ध रहेका कोणहरू लेख्नुहोस् :



(क) दुईओटा आसन्न कोणहरू

(ख) दुईओटा परिपूरक कोणहरू

(ग) एउटा शीर्षाभिमुख कोण

2. दिइएको चित्रमा $\angle AOB = 90°$ छ ।

(क) $\angle AOC$ को आसन्न कोण लेख्नुहोस् ।

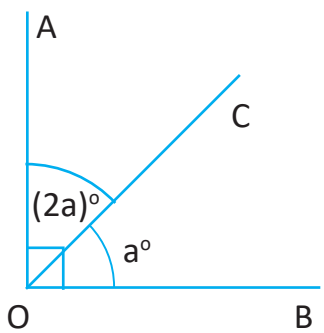
(ख) $\angle BOC$ को समपुरक कोण लेख्नुहोस् ।

3. तल दिइएका कोणको समपूरक र परिपूरक कोणहरू लेख्नुहोस् :

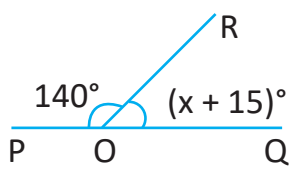
(क) 150° $\quad$ (ख) 45° $\quad$ (ग) 78° $\quad$ (घ) 87°

4. तल दिइएका चित्रबाट x, y र a को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

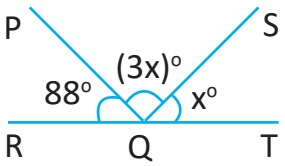
(क)



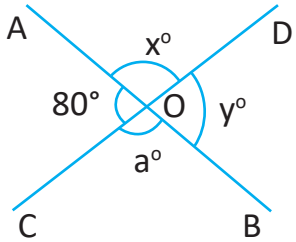
(ख)



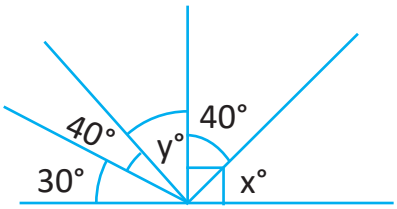
(ग)



(घ)



(ङ)



परियोजना कार्य

दुईओटा सिधा रेखाहरू एकआपसमा प्रतिच्छेदन हुँदा बन्ने सम्भावित जोडा कोणहरूका बारेमा छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) ∠BXC र ∠AXD (ख) ∠AXD र ∠CXB (ग) ∠BXD
2. (क) ∠BOC र ∠AOC (ख) ∠AXD र ∠CXB
3. (क) 75° , 165° (ख) 45° , 135°

(ग) 12° , 102° (घ) 3° , 93°

4. (क) 30° (ख) 25° (ग) 25°

(घ) 100° , 80°, 100° (ङ) 50°, 20°

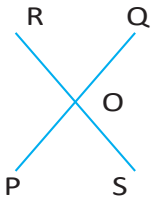
13.4 कोणहरूको प्रयोगात्मक परीक्षण (Experimental Verification of Angles)

तल दिइएका बिभिन्न कोणहरूको प्रयोगात्मक परीक्षण गर्नुहोस् :

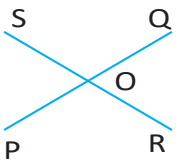
परीक्षण 1

दुईओटा सिधारेखाहरू एक आपसमा काटिँदा बन्ने शीर्षाभिमुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

यहाँ,



चित्र 1



चित्र 2

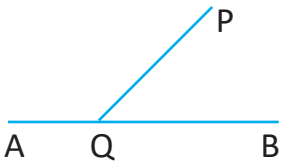
दुई सिधा रेखाहरू PQ र RS लाई बिन्दु O मा काटिने गरी खिच्नुहोस् । अब प्रोट्याक्टरका सहायताले कोणहरू क्रमशः ∠ROQ, ∠QOS, ∠ROP र ∠POS लाई नाप्नुहोस् र तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	∠ROP	∠QOS	∠ROQ	∠POS	परिणाम
1					
2					

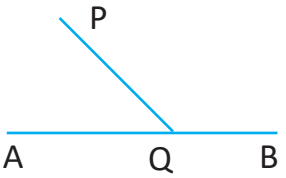
निष्कर्षः दुईओटा सिधारेखाहरू एक आपसमा काटिँदा बन्ने शीर्षाभिमुख कोणहरू बराबर हन्छ ।

परीक्षण 2

एउटा सिधारेखाले अर्को सिधारेखासँग एकैतिर बनाएका आसन्न कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ ।



चित्र 1



चित्र 2

माथिको चित्रमा AB सिधा रेखाखण्डमा कुनै बिन्दु Q बाट QP रेखाखण्ड खिची फरक

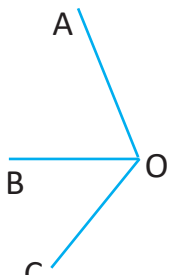
फरक दुईओटा चित्रहरू खिच्नुहोस् । अब चाँदको सहायताले कोणहरू क्रमशः ∠PQA र ∠PQB लाई नाप्नुहोस् र तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र नं.	∠PQA	∠PQB	परिणाम
1			
2			

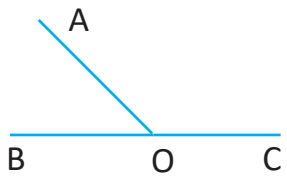
निष्कर्ष : एउटा सिधारेखाले अर्को सिधारेखासँग एकैतिर बनाएका आसन्न कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ ।

परीक्षण 3

कुनै बिन्दुको वरिपरि एक परिक्रमणमा बनेका कोणहरूको योगफल 360° हुन्छ ।



चित्र 1



चित्र 2

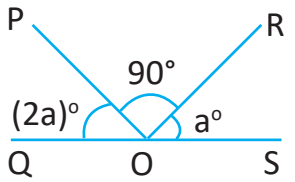
माथिको जस्तै आफ्नो कापीमा दुईओटा चित्रहरू खिच्नुहोस् र ∠AOB, ∠BOC वृहत् कोण ∠AOC लाई नाप्नुहोस् र तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	∠AOB	∠BOC	∠AOC	∠AOB + ∠BOC + ∠AOC	परिणाम
1					
2					

निष्कर्ष : कुनै बिन्दुको वरिपरि एक परिक्रमणमा बनेका कोणहरूको योगफल 360° हुन्छ ।

उदाहरण 1

सगै दिइएको चित्रबाट a को मान पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ $\angle POQ + \angle POR + \angle ROS = 180°$

अथवा $2a + 90 + a = 180°$

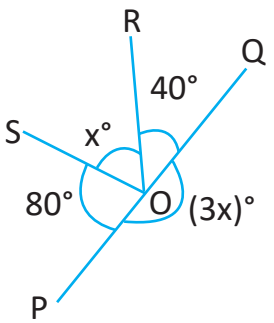
अथवा $3a = 90°$

अथवा $a = 30°$

∵ सिधा रेखामा बनेका आसन्न कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ ।

उदाहरण 2

दिइएको चित्रबाट x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ $\angle POQ + \angle ROQ + \angle ROS + \angle SOP = 360°$

अथवा $3x + 40° + x + 80° = 360°$

अथवा $4x + 120° = 360°$

अथवा $4x = 360° - 120°$

अथवा $4x = 240$

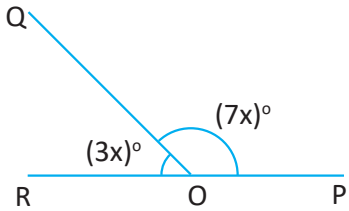
अथवा $x = \frac{240}{4}$

अथवा $x = 60°$

∵ कुनै बिन्दुमा वरिपरि बनेका कोणहरूको योगफल 360° हुन्छ ।

उदाहरण 3

दिइएको चित्रबाट ∠POQ र ∠QOR को नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

यहाँ ∠POQ + ∠QOR = 180°

अथवा $7x + 3x = 180$

अथवा $10x = 180$

अथवा $x = \frac{180}{10} = 18$

अब ∠POQ = 7x = 7 × 18 = 126°

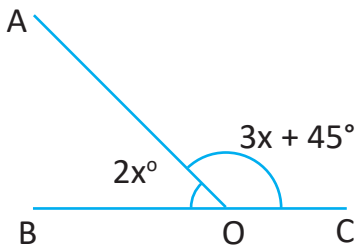
र ∠QOR = 3x = 3 × 18 = 54°

अतः ∠POQ = 126° र ∠QOR = 54°

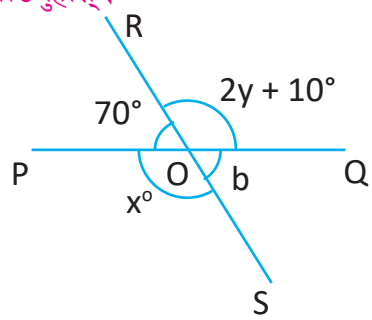
अभ्यास 13.4

1. तल दिइएका चित्रबाट x, y र b को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

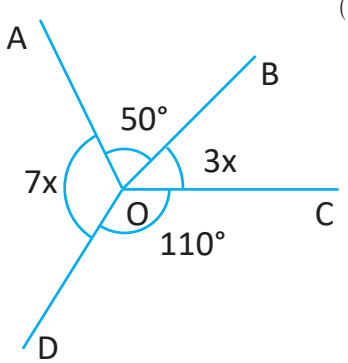
(क)



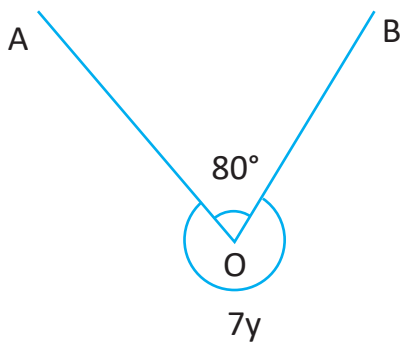
(ख)



(ग)



(घ)



2. तल दिइएका तथ्यहरूको परीक्षणद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(क) दुईओटा सिधारेखाहरू एकआपसमा काट्दा बन्ने शीर्षाभिमुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

(ख) सिधा रेखाको कुनै बिन्दुमा एकैतिर बनेका आसन्न कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ ।

(ग) कुनै बिन्दुको वरिपरि एक परिक्रमणमा बनेका कोणहरूको योगफल 360° हुन्छ ।

उत्तर

1. (क) 27° (ख) $y = 50°, x = 110°, b = 70°$

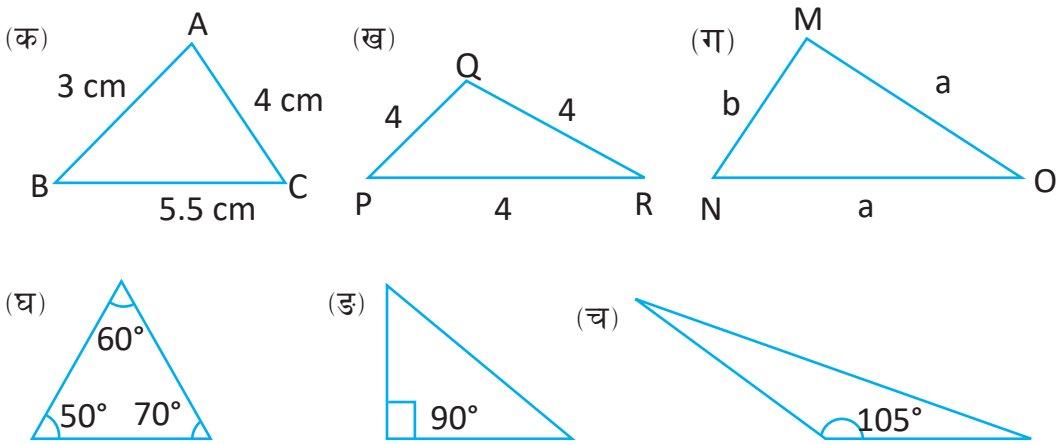
   (ग) $x = 20°$ (घ) 40°

2. सबै प्रश्नको समाधान कक्षामा छलफल गर्नुहोस् ।

पाठ 14 समतलीय आकृतिहरू (Plane figures)

14.0 पुनरवलोकन (Review)

तल दिइएका त्रिभुजहरू (समबाहु, बिषमबाहु, न्यूनकोणी, समकोणी, अधिकोणी कुन प्रकारका हुन्, कक्षामा छलफल गर्नुहोस् ।



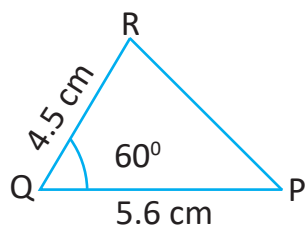
14.1 त्रिभुजको रचना (Construction of triangle)

14.1.1 दुईओटा भुजाहरू र तिनीहरू बिचको कोण दिइएमा त्रिभुजको रचना

क्रियाकलाप 1

तल दिइएका चरणहरू अपनाई PQ = 5.6 cm, QR = 4.5 र ∠PQR = 60° भएको एउटा त्रिभुज PQR को रचना गर्नुहोस् :

सर्वप्रथम खेस्रा चित्र खिच्नुहोस् ।



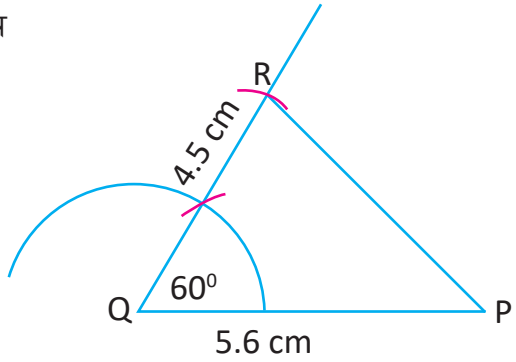
चरणहरू

1. PQ = 5.6 cm को रेखा खण्ड खिच्नुहोस् ।
2. बिन्दु Q मा कम्पासका सहायताले 60° को कोण खिच्नुहोस् ।

3. बिन्दु Q बाट QR = 4.5 cm को नाप लिएर काट्नुहोस् ।

४. बिन्दु R र P लाई जोड्नुहोस् ।

अत: आवश्यक त्रिभुज PQR हो ।

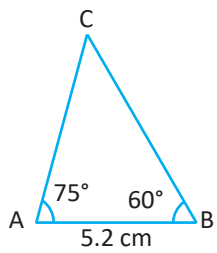


14.1.2 कुनै एउटा भुजा र त्यसमा बनेका दुईओटा कोणहरू दिइएमा त्रिभुजको रचना

क्रियाकलाप 2

तल दिइएका चरणहरू अपनाई ΔABC को रचना गर्नुहोस्, जसमा $AB = 5.2$ cm, $\angle A = 75°$ र $\angle B = 60°$ छ ।

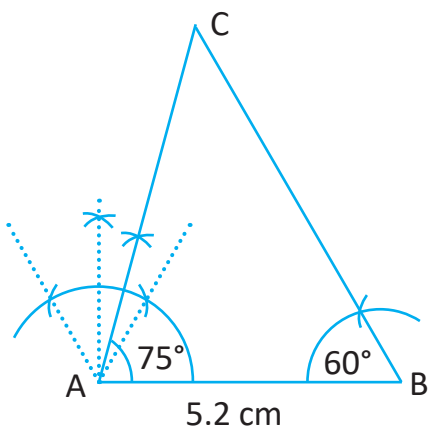
सर्वप्रथम खेस्रा चित्र खिच्नुहोस् ।



चरणहरू

1. AB = 5.2 cm को एउटा रेखाखण्ड खिच्नुहोस् ।
2. बिन्दु A मा कम्पासका सहायताले 75° को कोण खिच्नुहोस् ।
3. बिन्दु B मा कम्पासका सहायताले 60° को कोण खिच्नुहोस् ।
4. यसरी 75° र 60° बनाएका रेखाहरू काटिएको बिन्दुको नाम C दिनुहोस् ।

   अब आवश्यक त्रिभुज ΔABC हो ।



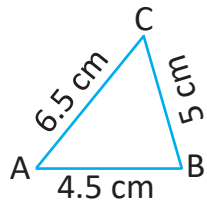
14.1.3 तीनओटै भुजा दिइएमा त्रिभुजको रचना

क्रियाकलाप 3

तल दिइएका चरणहरू अपनाई AB = 4.5 cm, BC = 5 cm र CA = 6.5 cm भएको त्रिभुज ABC को रचना गर्नुहोस् :

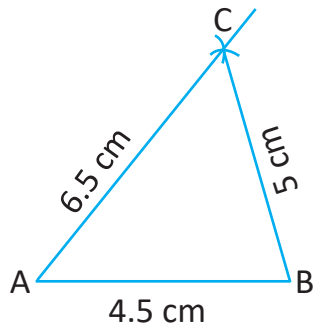
सर्वप्रथम खेस्रा चित्र खिच्नुहोस् ।

चरणहरू



1. AB = 4.5 cm को एउटा रेखा खण्ड खिच्नुहोस् ।
2. बिन्दु A बाट 6.5 cm नापको अर्धव्यास र बिन्दु B बाट 5 cm नापको अर्धव्यास लिनुहोस् र एउटै बिन्दुमा काटिने गरी चाप काट्नुहोस् ।
3. ती दुईओटा चाप काटिएको बिन्दुको नाम C दिनुहोस् ।
4. रेखा A र C तथा B र C जोड्नुहोस् ।

   अब आवश्यक त्रिभुज ABC को रचना हो ।



अभ्यास 14.1

1. तल दिइएका अवस्थामा ΔPQR को रचना गर्नुहोस् :

(क) PQ = 4.8 cm, QR = 5 cm र ∠PQR = 75°

(ख) PR = 5 cm, ∠PRQ = 45° र QR = 5.8 cm

(ग) PQ = 6.2 cm, ∠QPR = 60° र RQ = 6.6 cm

2. तल दिइएका अवस्थामा ΔABC को रचना गर्नुहोस् :

(क) ∠ABC = 60°, ∠ACB = 45° र BC = 6 cm

(ख) AB = 6.8 cm, ∠BAC = 75° र ∠ABC = 30° cm

(ग) CA = 5.2 cm, ∠ACB = 45° र ∠BAC = 75° cm

3. तल दिइएका अवस्थामा ΔDEF को रचना गर्नुहोस् :

(क) DE = 4.5 cm, EF = 4 cm र DF = 5 cm

(ख) EF = 6.6 cm, DF = 6 cm र DE = 7 cm

(ग) DE = EF = 5.5 cm, DF = 5.2 cm

4. उपयुक्त सङ्ख्यामा समूहमा छलफल गरी तल दिइएअनुसारका भागको नाप लिएर त्रिभुजको रचना गर्नका लागि प्रश्नहरू निर्माण गर्नुहोस् र रचना गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(क) दुईओटा भुजाहरू र तिनीहरूबिचको कोणको नाप

(ख) तीनओटा भुजाहरूको लम्बाइको नाप

(ग) एउटा भुजा र त्यस भुजामा बनेका दुईओटा कोणको नाप

उत्तर

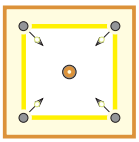
शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

14.2 समानान्तर चर्तुभुज, आयत र वर्गका गुणहरूको पहिचान र परीक्षण (Identification and verification of the properties of parallelogram, rectangle and square)

क्रियाकलाप 1

एउटा किताब, क्यारेमबोर्ड र छड्के काटेको कपडाको टुक्रा लिनुहोस् र ती ठोस वस्तुका सतहका आकारहरू के कस्ता छन्, कक्षामा छलफल गर्नुहोस् ।

१. किताब



२. क्यारेमबोर्ड

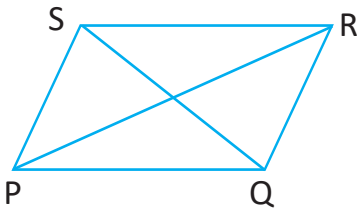
३. कपडा

ती सतहका किनारा र कुनामा बनेका कोणहरू नाप्नुहोस् । किनारा र कोणहरूका आधारमा चर्तुभुजको गुणबारे कक्षामा छलफल गर्नुहोस् ।

14.2.1 समानान्तर चर्तुभुजका गुणहरूको पहिचान (Identification of the properties of parallelogram)

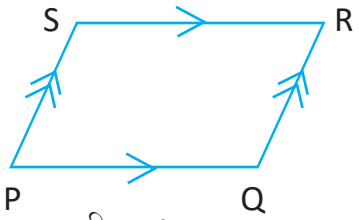
क्रियाकलाप 2

दिइएका समानान्तर चर्तुभुज PQRS का सबै भुजाहरू, कोणहरू विकर्णका भागहरू नाप्नुहोस् । अब भुजाहरूको सम्बन्ध, कोणहरूको सम्बन्ध र विकर्णका भागहरूका सम्बन्ध के कस्तो देख्नुभयो कक्षामा साथीहरूसँग छलफल गरी समानान्तर चर्तुभुजका गुणहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

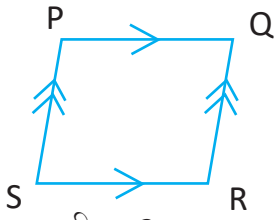


परीक्षण 1

समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् भनी परीक्षण गर्नुहोस् ।



चित्र 1



चित्र 2

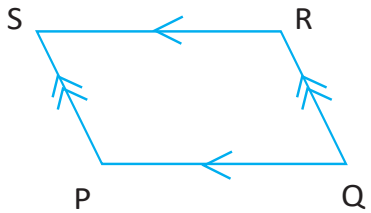
दिइएका दुईओटा समानान्तर चतुर्भुज PQRS का सबै कोणहरूका नाप लिएर तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	∠QPS	∠PQR	∠QRS	∠RSP	परिणाम
1					
2					

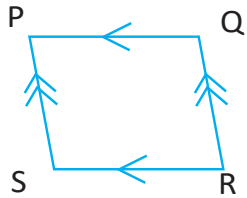
निष्कर्ष : समानान्तर चर्तुभुजको सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

परीक्षण 2

समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् भनी परीक्षण गर्नुहोस् ।



चित्र 1



चित्र 2

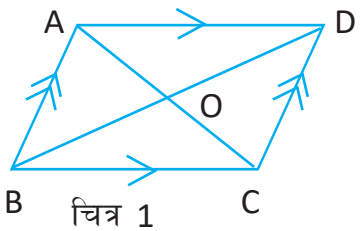
दिइएका दुईओटा समानान्तर चतुर्भुज PQRS का सबै भुजाहरूको नाप लिएर तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	PQ	QR	RS	SP	परिणाम
1					
2					

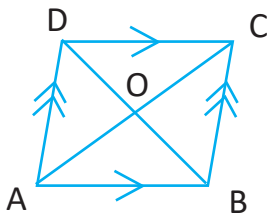
निष्कर्ष : समानान्तर चर्तुभुजको सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।

परीक्षण 3

समानान्तर चर्तुभुजको विकर्णहरू समद्विभाजन हुन्छन् ।



चित्र 1



चित्र 2

दिइएका दुईओटा समानान्तर चर्तुभुजमा विकर्णहरू AC र BD बिन्दु O मा काटिएका छन् । अब विकर्णका भागहरूको लम्बाइ नापी तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	AO	OC	BO	OD	परिणाम
1					
2					

निष्कर्ष : समानान्तर चर्तुभुजको विकर्णहरू समद्विभाजन हुन्छन् ।

समानान्तर चतुर्भुजका गुणहरू

(क) समानान्तर चर्तुभुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छ ।

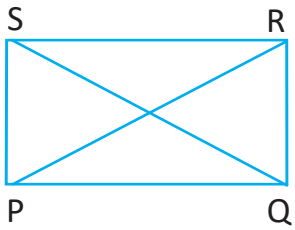
(ख) समानान्तर चर्तुभुजका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छ ।

(ग) समानान्तर चर्तुभुजका विर्कणहरू परस्पर समद्विभाजन हुन्छन् ।

14.2.2 आयतका गुणहरूको पहिचान (Identification of the properties of Rectangle)

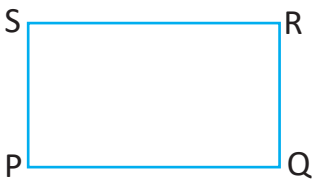
क्रियाकलाप 3

एउटा कापीको पाना लिनुहोस् र यसका सम्मुख किनाराहरू र कुनामा भएका कोणहरू र विकर्णहरूका लम्बाइ नाप्नुहोस् । यसरी नाप्दा के गुण पत्ता लाग्दछ, कक्षामा साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् ।

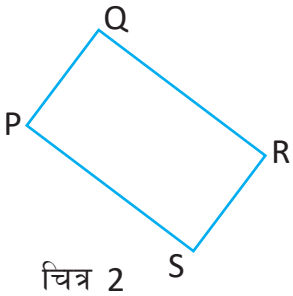


परीक्षण 1

आयतका सबै कोणहरू 90° का हुन्छन् ।



चित्र 1



चित्र 2

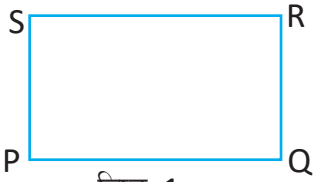
दिइएका दुईओटा आयत PQRS का प्रत्येक कोणहरू नापी तल दिएको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	∠QPS	∠PQR	∠QRS	∠RSP	परिणाम
1					
2					

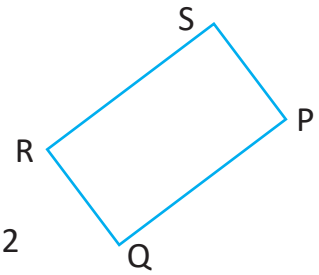
निष्कर्ष : आयतका सबै कोणहरू 90° का हुन्छन् ।

परीक्षण 2

आयतका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।



चित्र 1



चित्र 2

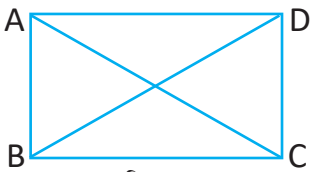
दिइएका दुईओटा आयत PQRS का सबै भुजाहरू नापी तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् र तिनीहरूबिचको सम्बन्ध पत्ता लगाउनुहोस् ।

चित्र	PQ	QR	RS	SP	परिणाम
1					
2					

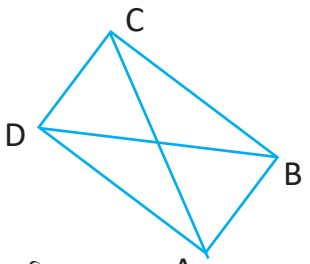
निष्कर्ष : आयतका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।

परीक्षण 3

आयतका बिर्कणहरू बराबर हुन्छन् ।



चित्र 1



चित्र 2

दिइएका दुईओटा आयत ABCD का विकर्णहरू AC र BD का नाप लिई तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	AC	BD	परिणाम
१			
२			

निष्कर्ष : आयतका बिर्कणहरू बराबर हुन्छन् ।

आयतका गुणहरू

(क) आयतका सबै कोणहरू 90° का हुन्छन् ।

(ख) आयतका सम्मुख भुजाहरूहरू बराबर हुन्छन् ।

(ग) आयतका विकर्णहरूको लम्बाइ बराबर हुन्छन् ।

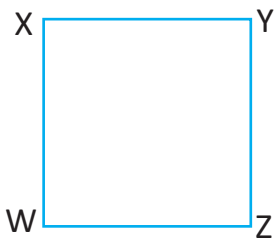
14.2.3 वर्गका गुणहरूको पहिचान (Identification of the properties of Square)

क्रियाकलाप 4

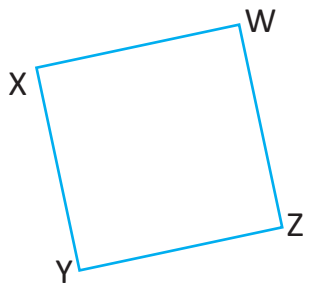
एउटा मिनी चेसको बोर्ड वा वर्गाकार सतह भएको ठोस वस्तु लिनुहोस् र उक्त चेसको बोर्ड वा ठोस वस्तुहो वर्गाकार सतहलाई कापीमाथि राखी वरिपरि घेरा लगाउनुहोस् र विकर्णहरू जोड्नुहोस् । यसरी बनेको चर्तभुजको सबै भुजाहरू, कोणहरू, विकर्णको लम्बाइ, विकर्णबिचको कोण, विकर्णका भागहरू र शीर्षकोणका विभाजित कोणहरू नाप्नुहोस् । यसरी नाप्दा के कस्ता परिणामहरू पत्ता लाग्छ कक्षामा साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् ।

परीक्षण 1

वर्गका सबै कोण र भुजा बराबर हुन्छन् ।



चित्र 1



चित्र 2

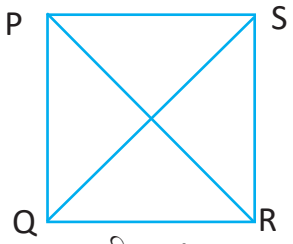
दिइएका दुईओटा वर्ग WXYZ का सबै भुजा र कोण नापी तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	∠X	∠Y	∠Z	∠W	XY	WX	YZ	ZW	परिणाम
1									
2									

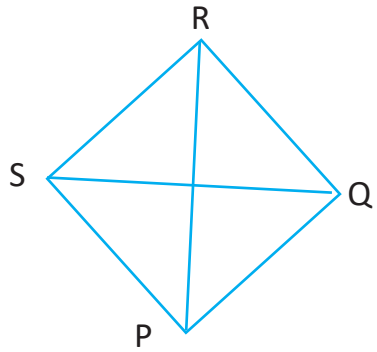
निष्कर्ष : वर्गका सबै कोण 90° र सबै भुजाको लम्बाइ बराबर हुन्छ ।

परीक्षण 2

वर्गका विकर्णहरूको लम्बाइ बराबर हुन्छन् ।



चित्र 1



चित्र 2

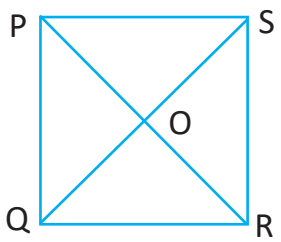
दिइएका दुईओटा वर्ग PQRS का विकर्णहरू PQ ल RS को लम्बाइको नाप लिई तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	PR	QS	परिणाम
1			
2			

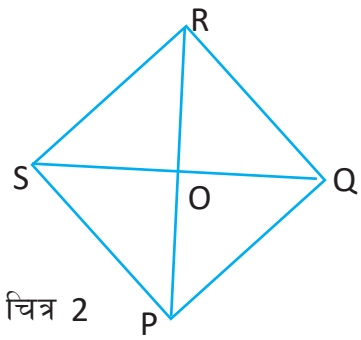
निष्कर्ष : वर्गका विकर्णहरूको लम्बाइ बराबर हुन्छन् ।

परीक्षण 3

वर्गका विकर्णहरू आपसमा लम्बार्धक हुन्छन् ।



चित्र 1



चित्र 2

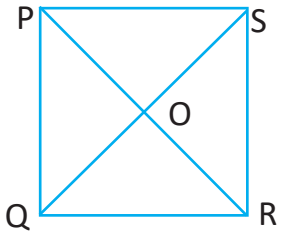
दिइएका दुईओटा वर्ग PQRS का विकर्णका भागहरू र विकर्णहरूबिचका कोणहरूको नाप लिई तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	PO	OR	QO	OS	∠POQ	∠POS	परिणाम
1							
2							

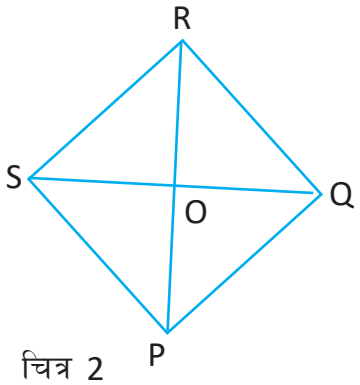
निष्कर्ष : वर्गका विकर्ण आपसमा लम्बार्धक हुन्छन् ।

परीक्षण 4

वर्गका विकर्णहरूले शीर्षकोणहरूलाई आधा गर्दछ ।



चित्र 1



चित्र 2

दिइएका दुईओटा वर्ग PQRS का शीर्षकोणहरू र विकर्णहरूले विभाजन गरेका शीर्षकोणका भागहरूका नाप लिई तलको तालिकामा भर्नुहोस् :

चित्र 1		
शीर्षकोणको नाप	**सहायक कोणहरूको नाप**	**परिणाम**
∠PQR = ...	∠PQS = ... र ∠SQR = ...	
∠QRS = ...	∠QRP = ... र ∠PRS = ...	
∠RSP = ...	∠RSQ = ... र ∠QSP = ...	
∠SPQ = ...	∠SPR = ... र ∠RPQ = ...	

चित्र 2		
शीर्षकोणको नाप	**सहायक कोणहरूको नाप**	**परिणाम**
∠PQR = ...	∠PQS = ... र ∠SQR = ...	
∠QRS = ...	∠QRP = ... र ∠PRS = ...	
∠RSP = ...	∠RSQ = ... र ∠QSP = ...	
∠SPQ = ...	∠SPR = ... र ∠RPQ = ...	

निष्कर्ष : वर्गका प्रत्येक विकर्णले कोणलाई आधा गर्दछ ।

वर्गका गुणहरू

(क) वर्गका सबै कोणहरू र भुजाहरू आपसमा बराबर हुन्छन् ।

(ख) वर्गका विकर्णहरूको लम्बाइ आपसमा बराबर हुन्छन् ।

(ग) वर्गका विकर्णहरू आपसमा लम्बार्धक हुन्छन् ।

(घ) वर्गका विकर्णहरूले शीर्ष कोणहरूलाई आधा गर्दछ ।

अभ्यास 14.2

तल दिइएका भनाइ ठिक छन् वा छैनन् छुट्याउनुहोस् ।

(क) सबै चतुर्भुजका सम्मुख भजाहरू बराबर हुन्छन् ।

(ख) समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

(ग) वर्गका सम्मुख भुजाहरू मात्र बराबर हुन्छन् ।

(घ) आयतका विकर्णहरू आपसमा लम्बार्धक हुन्छन् ।

(ङ) आयतका सबै गुण समानान्तर चतुर्भुजमा पनि हुन्छ ।

(च) वर्गका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।

(छ) आयतका सम्मुख कोणहरू मात्र बराबर हुन्छन् ।

परियोजना कार्य

आफ्नो घर र विद्यालय वरिपरि रहेका आयताकार, वर्गाकार र समानान्तर चतुर्भुज आकारका सतहहरू भएका वस्तुहरू खोज्नुहोस् । उक्त वस्तुका सतहहरू कापीमा ट्रेस गरी आयत, वर्ग र समानान्तर चतुर्भुजका गुणहरू परीक्षण गर्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

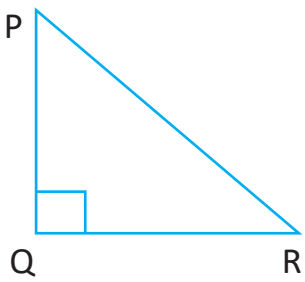
उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

14.3 पाइथागोरस साध्य (Pythagoras Theorem)

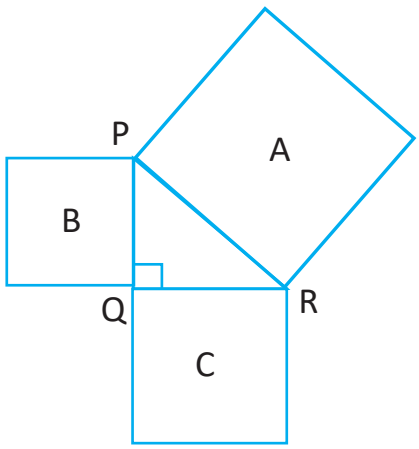
पाइथागोरस साध्यको परीक्षण

एउटा समकोणी त्रिभुज खिच्नुहोस् जसमा $\angle Q = 90°$ छ । उक्त समकोणी त्रिभुजको भुजाहरू नाप्नुहोस् र प्रत्येक भुजामा एक एकओटा वर्ग बनाउनुहोस् ।



अब वर्ग A, B र C को क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् । कक्षामा साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् । के वर्ग A को क्षेत्रफल = वर्ग B को क्षेत्रफल + वर्ग C को क्षेत्रफल हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

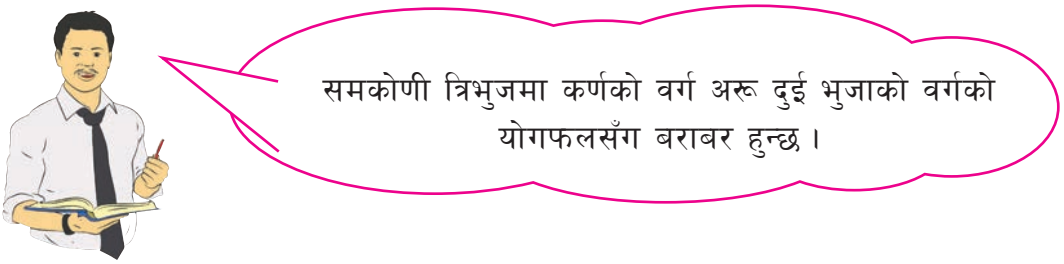
यहाँ कर्णमा बनेका वर्गको क्षेत्रफल अन्य दुई भुजामा बनेका वर्गको योगफलसँग बराबर भयो ।



अत: (कर्ण)^2 = (लम्ब)^2 + (आधार)^2

$$h^2 = p^2 + b^2$$

जहाँ h कर्ण (hypotenuse), p लम्ब (perpendicular) र b आधार (base) छन् ।

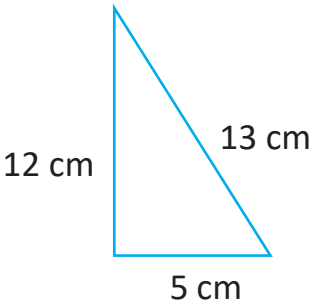


क्रियाकलाप 1

एउटा सेट् स्क्वाएर लिनुहोस् र प्रत्येक किनाराको लम्बाइ नाप्नुहोस् । सबै भन्दा लामो किनारा छुट्याउनुहोस् । सबभन्दा लामो किनाराको नापको वर्गसँग अन्य दुई किनाराको नापको वर्गको योगफल बराबर हुन्छ वा हुदैन कक्षामा छलफल गर्नुहोस् र निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

उदाहरण 1

दिइएको त्रिभुज समकोणी हो वा होइन पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

मानौँ कर्ण (h) = 13 cm

लम्ब (P) = 12 cm

आधार (b) = 5 cm

अब $h^2 = p^2 + b^2$

अथवा $(13)^2 = (12)^2 + (5)^2$

अथवा $169\ cm^2 = 144\ cm^2 + 25\ cm^2$

अथवा $169\ cm^2 = 169\ cm^2$

यहाँ कर्णको वर्गसँग दुई भुजाको वर्गको योगफल बराबर भयो । अतः उक्त त्रिभुज समकोणी त्रिभुज हो ।

उदाहरण 2

दिइएको समकोणी त्रिभुजमा थाहा नभएको भुजा पत्ता लगाउनुहोस् :

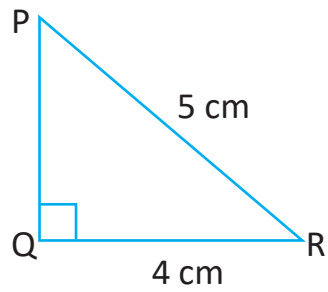
समाधान

यहाँ $\angle PQR = 90°$

कर्ण (h) = PR = 5 cm

लम्ब (P) = PQ = ?

आधार (b) = QR = 4 cm



अब $h^2 = p^2 + b^2$

अथवा $5^2 = (PQ)^2 + 4^2$

अथवा $25 = PQ^2 + 16$

अथवा $25 - 16 = PQ^2$

अथवा $PQ^2 = 9$

अथवा $PQ = 3$ cm

अतः थाहा नभएको भुजा PQ को लम्बाइ 3 cm हुन्छ ।

अभ्यास 14.3

1. तल दिइएका वाक्यहरू ठिक भए 'T' र बेठिक भए 'F' लेख्नुहोस् ।

(क) सबै त्रिभुजको लामो भुजा कर्ण हुन्छ ।

(ख) समकोणी त्रिभजमा मात्र पाइथागोरस साध्य मान्य हुन्छ ।

(ग) समकोणी त्रिभुजमा समकोण बनाउने एउटा भुजा कर्ण हुनुपर्छ ।

(घ) समकोणको सम्मुख भुजा त्रिभुजको कर्ण हुन्छ ।

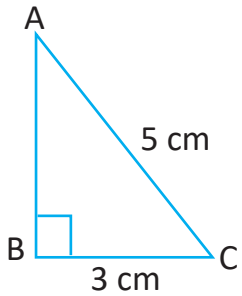
2. तल दिइएका नाप भएका कुन कुन त्रिभुज समकोणी त्रिभुज हुन् ?

(क) 12 cm, 10 cm, 5 cm (ख) 13 cm, 12 cm, 5 cm

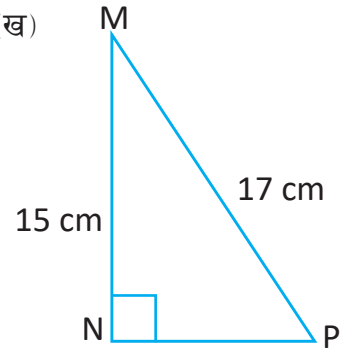
(ग) 15 cm, 16 cm, 17 cm (घ) 8 cm, 15 cm, 17 cm

3. तल दिइएका समकोणी त्रिभुजमा थाहा नभएको भुजाको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् :

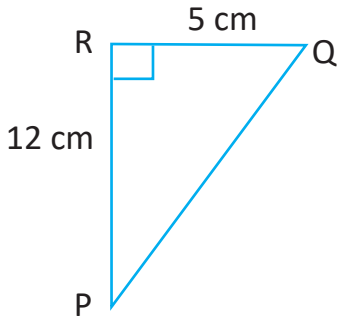
(क)



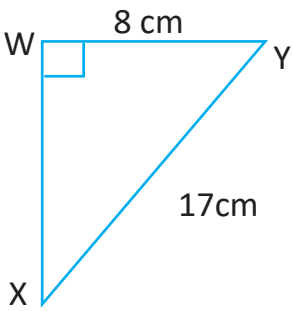
(ख)



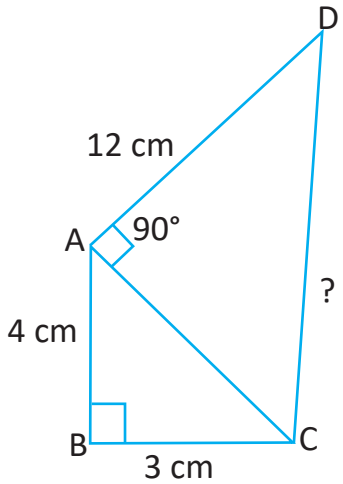
(ग)



(घ)



(ङ)



परियोजना कार्य

आफ्नो घर र विद्यालय वरिपरि रहेका त्रिभुज आकारका सतह भएका वस्तुहरू खोजी ती सतहहरूका किनाराको लम्बाइका नाप लिनुहोस् र पाइथागोरस साध्य परीक्षण गर्नुहोस् । आफ्नो कार्य कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

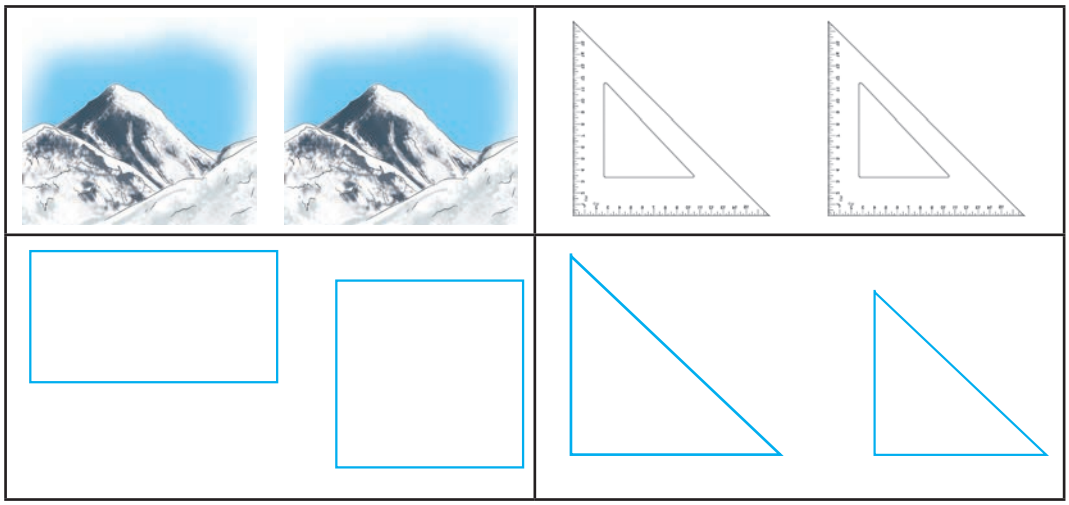
1. (क) F (ख) T (ग) F (घ) T
2. (क) होइन (ख) हो (ग) होइन (घ) हो
3. (क) 4 cm (ख) 8 cm (ग) 13 cm (घ) 15 cm (ङ) 13 cm

पाठ 15

अनुरूप आकृतिहरू
(Congruent Figures)

15.0 पुनरवलोकन (Review)

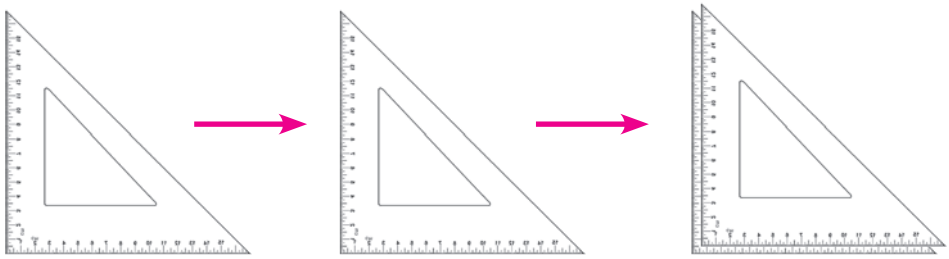
तल दिएइका आकृतिहरूमध्ये कुन कुन उस्तै आकारका र बराबर नापका छन्, छुट्याउनुहोस् :



15.1 अनुरूप आकृतिहरू (Congruent Figures)

क्रियाकलाप 1

कक्षाका सम्पूर्ण विद्यार्थीहरू चार समूहमा विभाजन गर्न प्रत्येक विद्यार्थीले आआफ्नो ज्यामिति बाकसमा भएको सेट स्क्वाएर लिएर आफ्नो समूहको साथीको सेट स्क्वाएर माथि राख्नुहोस् (खप्ट्याउनुहोस्) र तुलना गरी तलका प्रश्नको उत्तर खोज्नुहोस् :



खप्ट्याएका सेट स्क्वायर

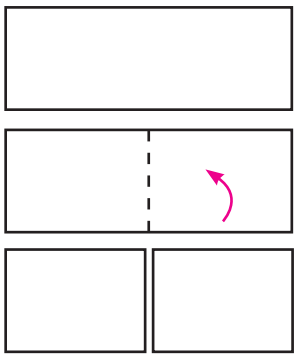
(क) सेट स्क्वायहरू कस्ता आकारका छन् ?

(ख) खप्ट्याएका सेट स्क्वायहरूका नाप समान/बराबर छन् कि फरक फरक छन् ?

(ग) आकार उस्तै र नाप पनि समान भएका सेट् स्क्वायरहरूलाई एक ठाउँमा राखी प्रदर्शन गर्नुहोस् र के यी सेट् स्क्वायहरू आपसमा अनुरूप छन् ? छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 2

एक एकओटा आयताकार कागजका टुक्रा लिनुहोस् । चित्रमा देखाए जस्तै गरी ठिक बिचमा पट्याउनुहोस् । पट्याएको कागजलाई खोलेर पट्टिएको ठाँउमा कैंचीले काट्नुहोस् । दुवै टुक्रालाई खप्ट्याउनुहोस् र तुलना गरी समूहमा तलका प्रश्नको उत्तर खोजी गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



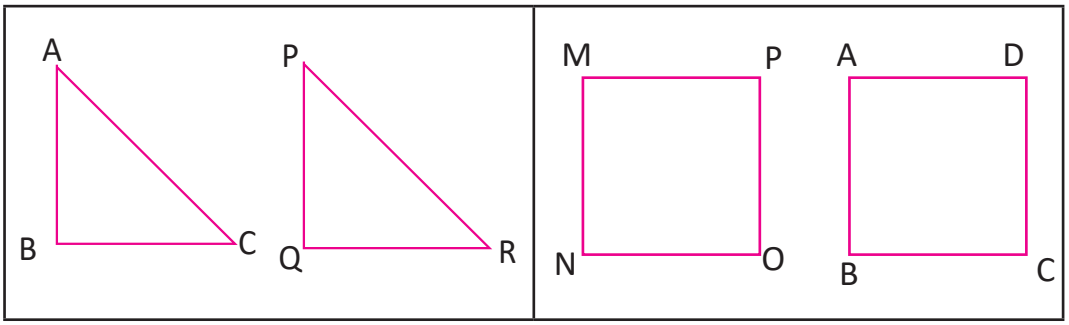
(क) दुवै आकृतिहरू उस्तै आकारका छन् कि छैनन् ?

(ख) दुवै टुक्राका नापहरू बराबर छन् कि छैनन् ?

(ग) आकार उस्तै र बराबर नाप भएका आकृतिहरूलाई कस्ता आकृतिहरू भनिन्छ ?

क्रियाकलाप 3

एउटा बेन्चमा बसेका साथीहरूको एउटा समूह हुने गरी समूहमा विभाजन भई तल दिइएका प्रत्येक जोडी चित्रहरूलाई ट्रेसिङ पेपरको सहायताले कापीमा बनाउनुहोस् ।



आफूले बनाइएका ती प्रत्येक जोडी चित्रको बाहिरी घेरा कैंचीको सहयताले काट्नुहोस् । त्यसपछि एउटा चित्रमाथि अर्को चित्र खप्ट्याई तुलना गर्नुहोस् र तलको प्रश्नहरूको उत्तर खोज्नुहोस्

(क) पहिलो जोडी चित्रहरू (त्रिभुजहरू) उस्तै आकारका छन् कि छैनन् ?

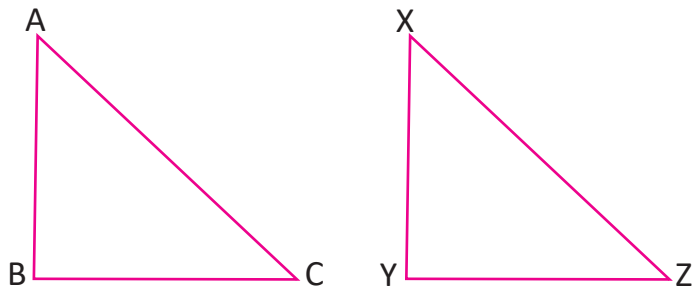
(ख) पहिलो जोडी चित्रहरू (त्रिभुजहरू) का नाप बराबर छन् कि छैनन् ?

(ग) त्यस्तै दोस्रो जोडी चित्रहरू (चतुर्भुजहरू) मा केके कुराहरूमा समानता छ ?

साथीसँग छलफल गर्नुहोस् र निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 4

प्रत्येक विद्यार्थीले एक एकओटा सेट स्क्वायर लिई आआफ्नो कापीमा (सेट् स्क्वायर) राखेर त्यसको बाहिरी घेरा ट्रेस गरी दुई दुईओटा त्रिभुजहरू बनाउनुहोस् । प्रत्येक त्रिभुजको नामाङ्कन क्रमशः ABC र XYZ गर्नुहोस् ।



प्रत्येक चित्रको बाहिरी घेरा काटेर त्रिभुज ABC लाई त्रिभुज XYZ माथि राखी दाँज्नुहोस् र तलको तालिका भर्नुहोस् :

त्रिभुज XYZ को

बिन्दु X माथि त्रिभुज ABC को बिन्दु .....छ ।

बिन्दु Y माथि बिन्दु .....छ ।

बिन्दु Z माथि बिन्दु .....छ ।

त्यस्तै गरी,

भुजा XY माथि भुजा .....छ ।

भुजा YZ माथि भुजा.....छ ।

भुजा ZX माथि भुजा .....छ ।

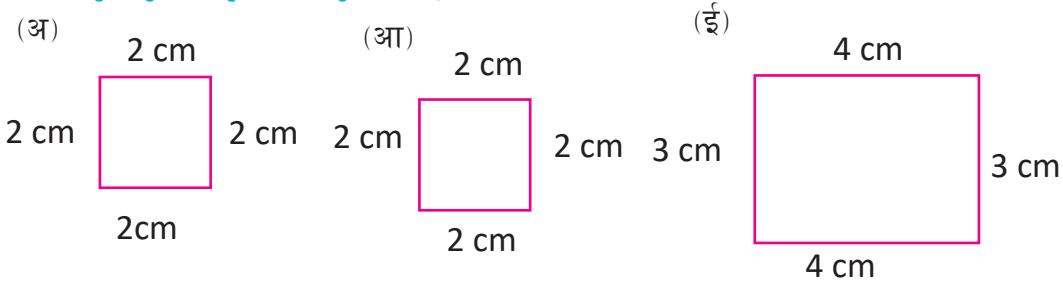
XY = ..., YZ = ... र ZX = ... छ ।

त्रिभुज ABC र त्रिभुज XYZ लाई कस्ता त्रिभुजहरू भन्न सकिन्छ ? साथीसँग छलफल गर्नुहोस् र निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

> उस्तै आकार र बराबर नाप भएका आकृतिहरूलाई अनुरूप आकृतिहरू (congrnent figures) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

तलका कुन कुन आकृतिहरू अनुरूप छन्, किन ?

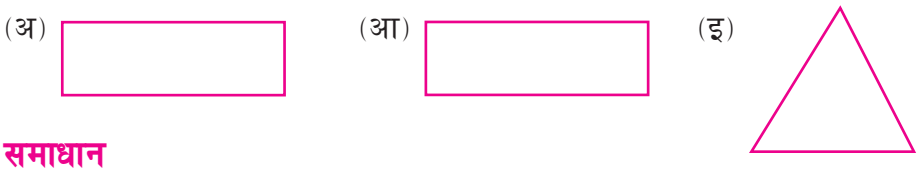


समाधान

यहाँ आकृतिहरू (अ) र (आ) अनुरूप छन् किनकि तिनीहरूका आकार उस्तै छन् र भुजाका नापहरू पनि बराबर छन् ।

उदाहरण 2

तलका आकृतिहरू अवलोकन गरी कुन कुन आकृतिहरू अनुरूप छन्, किन ?



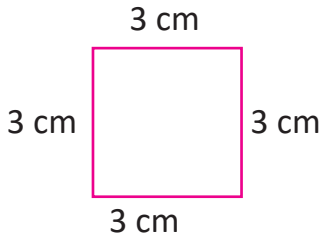
समाधान

यहाँ आकृतिहरू (अ) र (आ) अनुरूप छन् किनकि तिनीहरूका आकार उस्तै र नापेर हेर्दा नाप पनि बराबर पाइयो ।

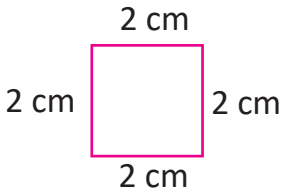
अभ्यास 15

1. तलका कुन कुन आकृतिहरू अनुरूप किन?

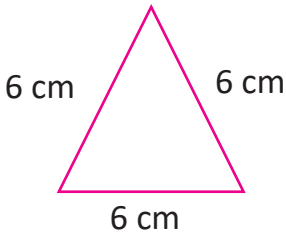
(क) (अ)



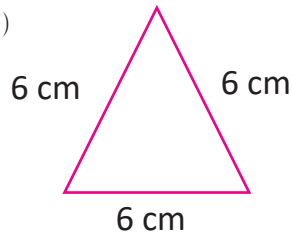
(आ)



(ख) (अ)

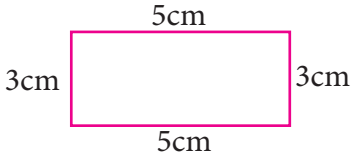


(आ)



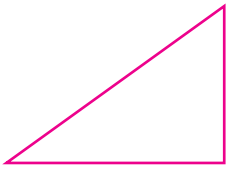
(ग) (अ)

(आ)

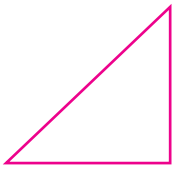


2. तलका कुन कुन आकृतिहरू अनुरूप छन् ?

क) (अ)



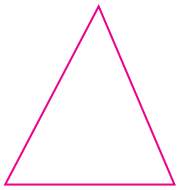
(आ)



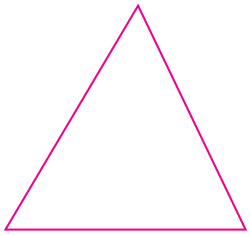
(ख) (अ)

(आ)

(ग) (अ)



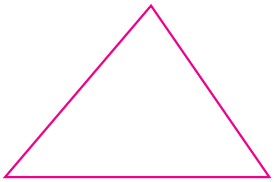
(आ)



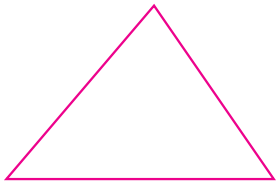
(घ) (अ)

(आ)

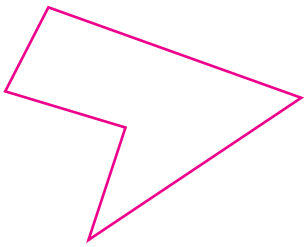
(ङ) (अ)



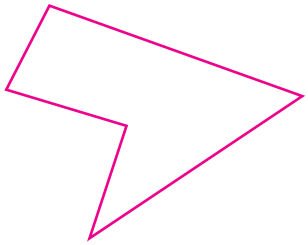
(आ)



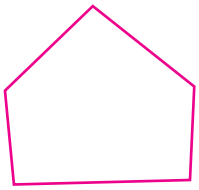
(च) (अ)



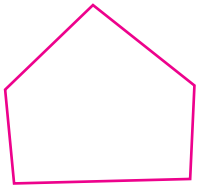
(आ)



(छ) (अ)



(आ)



3. पाँच पाँचओटा फरक फरक ठोस वस्तु प्रयोग गरी अनुरूप आकृति खिच्नुहोस् ।

4. आफ्नो दुवै हात जोडेर नमस्कार गर्नुहोस् । ती दुवै हत्केलाहरू एक अर्कासँग अनुरूप छ कि छैन ? साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

सबै विद्यार्थीहरू उपयुक्त समूहमा विभाजन भई प्रत्येक समूहले आआफ्नो घर तथा विद्यालय वरपर भएका अनुरूप आकृतिहरू जस्तैः सिक्का, नोट, रुमाल, किताब, इरेजर आदि सङ्कलन गरी कक्षामा प्रर्दशन गर्नुहोस् ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 16

ठोस वस्तुहरू
(Solid Objects)

15.0 पुनरवलोकन (Review)

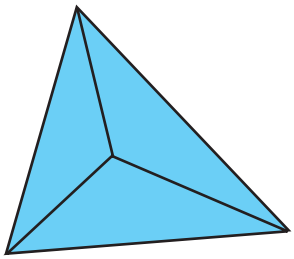
बेन्चमा सँगै बसेका साथीहरूसँग छलफल गरी तलको तालिका भर्नुहोस् :

वस्तुको नाम	समतलीय आकृतिहरू	ठोस आकृतिहरू
सलाईको बट्टा	आयत	षड्मुखा
डाइस	वर्ग	घन
आइसक्रिमको बाहिरी खोल	वृत्त	
ड्रम		

माथिको तालिकामा भएका ठोस आकृति र समतलीय आकृतिका बारेमा साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस र निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

16.1 टेट्राहेड्रन (Tetrahedron)

क्रियाकलाप 1



उपयुक्त सङ्ख्यामा विद्यार्थीहरूको समूह बनाउनुहोस् र प्रत्येक समूहले एक एकओटा दायाँको चित्रमा भएको जस्तै ठोस वस्तु लिनुहोस् । ती वस्तुको अवलोकन गरी तलका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) के यसका सबै किनाराहरू बराबर छन् ?

(ख) के प्रत्येक सतह समबाहु त्रिभुज आकारका छन् ?

(ग) यसका सतहहरू कतिओटा छन् ?

(घ) यसमा कति कतिओटा किनारा र शीर्ष बिन्दुहरू छन् ?

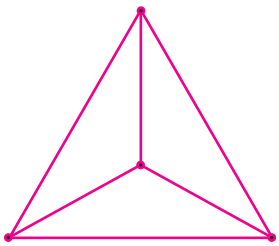
(ङ) यो नियमित ठोस वस्तु वा अनियमित ठोस वस्तु कुन हो ?

समूहमा छलफल गरी सकेपछि समूहको निष्कर्षलाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

टेट्राहेड्रन एउटा नियमित ज्यामितीय ठोस आकृति हो । यसका प्रत्येक सतहहरू समबाहु त्रिभुजबाट बनेका हुन्छन् । यसमा जम्मा 4 ओटा सतहहरू 4 ओटा शीर्षबिन्दु र 6 ओटा किनाराहरू

16.1.1 टेट्राहेड्रनको खोक्रो नमुना (Skeleton of Tetrahedron) निर्माण

क्रियाकलाप 2



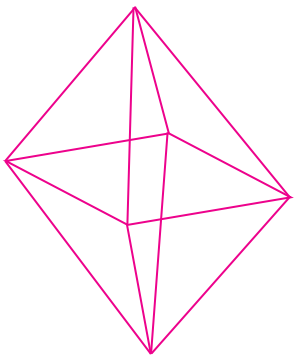
उपयुक्त सङ्ख्यामा विद्यार्थीहरूको समूह बनाउनुहोस् । प्रत्येक समूहले 6 ओटा बराबर नापका सिन्काहरू र 4 टुक्रा आलु वा अन्य नरम वस्तुका टुक्राहरू लिनुहोस् । अब चित्रमा देखाए जस्तै गरी सिन्काहरू र आलुका टुक्राहरू जोड्नुहोस । त्यसपछि अवलोकन गरी समूहमा साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् र तलका प्रश्नहरूको उत्तर खोज्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(क) कस्तो आकृति बन्यो ?

(ख) कतिओटा किनाराहरू र कतिओटा कुनाहरू बने ?

16.2 अक्टाहेड्रन (Octahedron)

क्रियाकलाप 3



विद्यार्थीहरूको समूह बनाउनुहोस् र प्रत्येक समूहले एक एकओटा दायाँको चित्रमा भएको जस्तै ठोस वस्तु लिनुहोस् ती ठोस वस्तुको अवलोकन गरी तलका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

(क) के यसका प्रत्येक किनाराहरू बराबर छन् ?

(ख) के यसका प्रत्येक सतह समबाहु त्रिभुज आकारका छन् ?

(ग) यसका कतिओटा सतहहरू छन् ?

(घ) यसमा कतिओटा किनाराहरू र अतिओटा शीर्ष बिन्दुहरू छन् ?

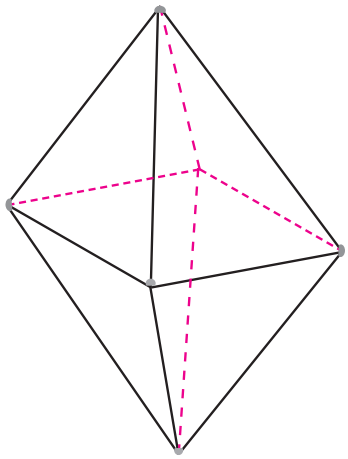
(ङ) यो ठोस आकृतिको नाम के हो ?

(च) यो नियमित ठोस वस्तु वा अनियमित ठोस वस्तु कुन हो ?

अक्टाहेड्रन एउटा नियमित ठोस वस्तु हो । यसका प्रत्येक सतहहरू समबाहु त्रिभुज आकारका हुन्छन् । यसमा जम्मा 8 ओटा सतहहरू, 6 ओटा शीर्ष बिन्दुहरू र 12 ओटा किनाराहरू हुन्छन् ।

16.2.1 अक्टाहेड्रनको खोक्रा नमुना (Skeleton of octahedron) निर्माण

क्रियाकलाप 4



उपयुक्त सङ्ख्यामा विद्यार्थीको समूह बनाउनहोस् । प्रत्येक समूहले 12 ओटा बराबर नापका सिन्काहरू र 6 ओटा आलुका टुक्राहरू वा आलु जस्तै वस्तुका टुक्राहरू लिनुहोस् अब चित्रमा देखाए जस्तै गरी सिन्काहरू र आलुका टुक्राहरू जोड्नुहोस् । त्यसपछि अवलोकन गरी समूहमा छलफल गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर खोज्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(क) यो आकृति (ठोस आकृति) को नाम के हो ?

(ख) यसका कतिओटा किनाराहरू छन् ?

(ग) यसमा कतिओटा शीर्षबिन्दुहरू छन् ?

(घ) यसका सतहहरू कतिओटा र कस्ता कस्ता छन् ?

क्रियाकलाप 5

कक्षाका सम्पूर्ण विद्यार्थीहरू पाँचओटा समूहमा विभाजित भएर बस्नुहोस् ।

प्रत्येक समूहमा क्रमशः घन (cube), टेट्राहेड्रन (Tetrahedron), अक्टाहेड्रन (Octahedron), डोडेकाहेड्रन (Dodecahedron) र आइकोसाहेड्रन (Icosahedron) का ठोस नमूनाहरू अवलोकन गरी तलका प्रश्नहरूको बारेमा छलफल गर्नुहोस् ।

(क) दिइएको ठोस आकृतिमा कतिओटा किनाराहरू छन् गणना गर्नुहोस् ।

(ख) दिइएको ठोस आकृतिमा कतिओटा समतल सतहहरू छन्, गणना गर्नुहोस् ।

(ग) दिइएको ठोस आकृतिमा कतिओटा शीर्ष बिन्दुहरू छन्, गणना गर्नुहोस् ।

अब सबै समूहले आफ्नो समूहले गणना गरका कुनाहरूको सङ्ख्या, सतहहरूको सङ्ख्या र किनाराहरूको सङ्ख्या तलको तालिकामा भर्नुहोस । त्यसपछि तिनीहरूको सम्बन्धका बारेमा छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

क्र.स.	ठोस वस्तुहरू	शीर्ष बिन्दुहरूको सङ्ख्या (V)	किनाराहरूको सङ्ख्या (E)	सतहहरूको सङ्ख्या (F)	V, E र F को सम्बन्ध V – E + F =
1	घन				
2	टेट्राहेड्रन				
3.	अक्टाहेड्रन				
4.	डोडेकाहेड्रन				
5.	आइकोसाहेड्रन				

घन, टेट्राहेड्रन, अक्टाहेड्रन, डोडेकाहेड्रन र आइकोसाहेड्रनमा शीर्ष बिन्दुहरूको सङ्ख्या (V) सतहहरूको सङ्ख्या (F) र किनाराहरूको सङ्ख्या (E) को सम्बन्ध V – E + F = 2 हुन्छ ।

उदाहरण 1

एउटा टेट्राहेड्रनमा 4 ओटा शीषबिन्दुहरू र 6 ओटा किनाराहरू छन् भने सतहहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ टेट्राहेड्रनका शीषबिन्दुको सङ्ख्या (V) = 4

किनाराको सङ्ख्या (E) = 6

सतहको सङ्ख्या (F) = ?

हामीलाई थाहा छ,

$V - E + F = 2$

अथवा $4 - 6 + F = 2$

अथवा $-2 + F = 2$

अथवा $F = 2 + 2$

$F = 4$

अभ्यास 16.1

1. तलका वाक्यहरू ठिक वा बेठिक के हुन, छुट्याउनुहोस् :

(क) टेट्राहेड्रनका प्रत्येक सतह समबाहु त्रिभुज आकारका हुन्छन् ।

(ख) टेट्राहेड्रनका सबै किनाराहरू बराबर हुन्छन् ।

(ग) टेट्राहेड्रनमा जम्मा तीनओटा सतहहरू हुन्छन् ।

(घ) अक्टाहेड्रनका प्रत्येक सतह समबाहु त्रिभुज आकारका हुँदैनन् ।

(ङ) अक्टाहेड्रनमा जम्मा 4 ओटा किनाराहरू हुन्छन् ।

2. तलका प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् :

(क) टेट्राहेड्रन भनेको के हो ?

(ख) टेट्राहेड्रन र अक्टाहेड्रनका कुनै दुईओटा फरक लेख्नुहोस् ।

(ग) डोडेकाहेड्रन र आइकोसाहेड्रनका सतह, किनारा तथा कुनाको सम्बन्ध जनाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(घ) अक्टाहेड्रनको प्रत्येक सतह (Face) कस्तो आकारको हुन्छ ?

(ङ) अक्टाहेड्रनमा कतिओटा शीषबिन्दुहरू (Vertices) र किनाराहरू (Edges) हुन्छन् ?

3. एउटा टेट्राहेड्रनमा किनाराहरू (Edges) र सतहहरू (Surfaces) को सङ्ख्या क्रमशः 6 र 4 छ भने कुना शीर्षहरू (Vertices) को सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा अक्टाहेड्रनमा सतहको सङ्ख्या कति भएमा उक्त अक्टाहेड्रनको कुनाहरूको सङ्ख्या 6 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

जुस खाने पाइप, छ्वालीहरू, बाँस तथा निगालाहरू, डटपेनका खाली रिफिलहरू तथा धागो प्रयोग गरेर विभिन्न नापका घन, टेट्राहेड्रन र अक्टाहेड्रनका नमुनाहरू निर्माण गरी कक्षामा छलफल गरी प्रदर्शन गर्नुहोस् ।

उत्तर

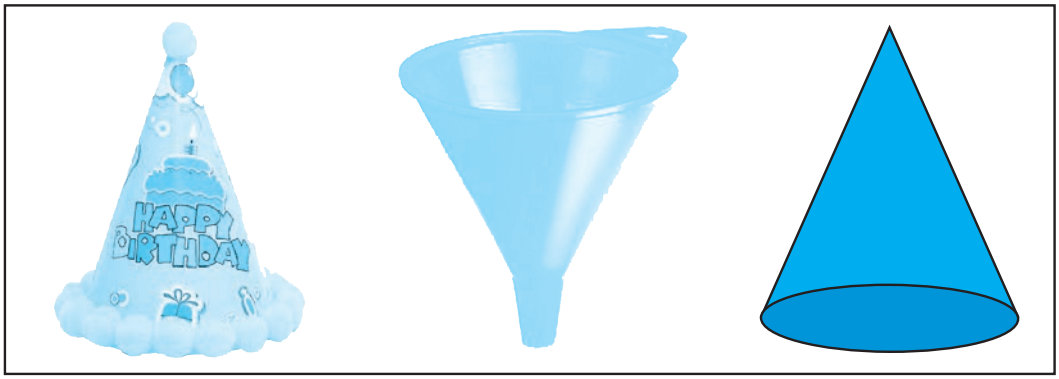
शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

16.3 सोली र बेलना (Cone and Cylinder)

16.3.1 सोली (Cone)

क्रियाकलाप 1

उपयुक्त सङ्ख्यामा समूहमा बस्नुहोस् । सबै समूहले तल दिइएका जस्तै आकारका एक एकओटा वस्तुहरू लिनुहोस् । उक्त वस्तुहरूको अवलोकन गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर समूह छलफल गरी खोज्नुहोस् :



(क) प्रत्येक वस्तु कस्ता आकारका छन् ?

(ख) प्रत्येक वस्तुका आधारहरू कस्ता आकारका छन् ?

(ग) प्रत्येक वस्तुहो सतह कस्तो आकारको छ ?

(घ) प्रत्येक वस्तुमा कतिओटा शीर्षबिन्दुहरू वा कुनाहरू छन् गणना गर्नुहोस् ।

माथिका वस्तुहरूमा एउटा कुना वा शीर्षबिन्दु, एउटा आधार वृत्ताकार र एउटा बक्र सतह रहेका छन् । यी ठोस आकृतिहरू सबै सोली (Cone) हुन् ।

सोलीका गुणहरू

एउटा शीर्ष बिन्दु, एउटा बक्र सतह र एउटा वृत्ताकार आधार भएको ठोस आकृतिलाई सोली (Cone) भनिन्छ ।

(क) एउटा शीर्षबिन्दु हुन्छ ।

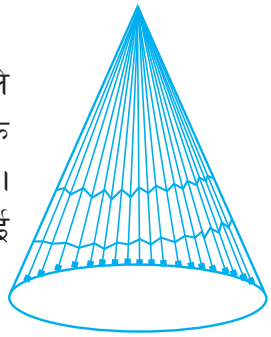
(ख) आधार वृत्ताकार हुन्छ ।

(ग) एउटा वक्र सतह रहेको हुन्छ ।

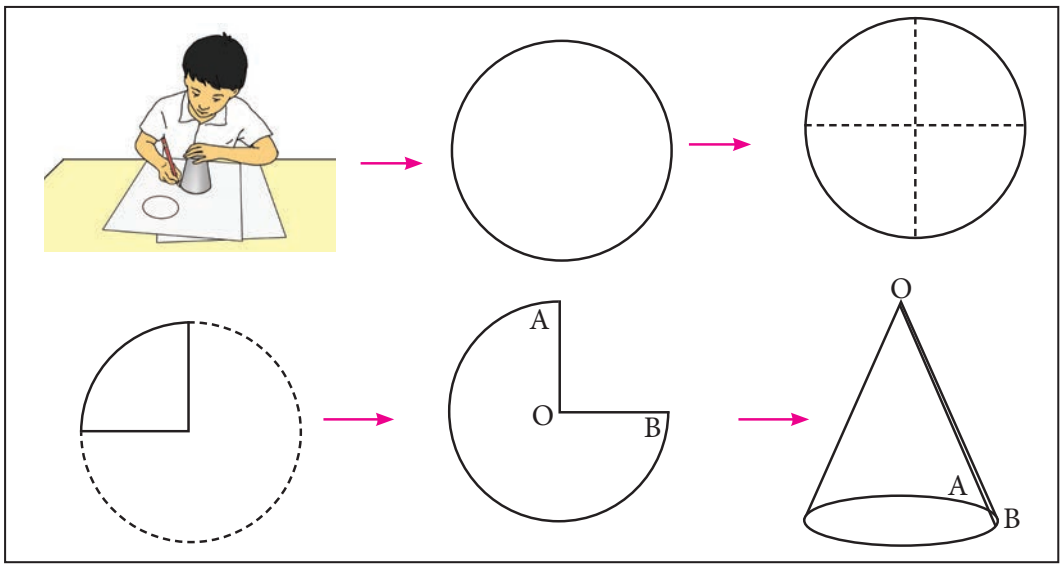
सोलीका खोक्रा नमुनाको (Skeleton Model of Cone) निर्माण

क्रियाकलाप 2

घरमा प्रयोग गर्ने माछा मार्ने ढडिया जस्ता सोलीका खोक्रा नमुनाहरूको सूची तयार गरी कक्षामा साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् ।



उपयुक्त सङ्ख्यामा विद्यार्थीहरूको समूह बनाउनुहोस् र प्रत्येक समूहले एक एकओटा वृत्ताकार ठोस वस्तु र एउटा कागज लिनुहोस् । प्रत्येक समूहले कागजमाथि वृत्ताकार ठोस वस्तु राखी वृत्त बनाउनुहोस् । कैंचीको सहयताले वृत्तको बाहिरी घेरा काट्नुहोस् । त्यसपछि वृत्तलाई ठिक बिचबाट दुई पटक पट्याउनुहोस् ।

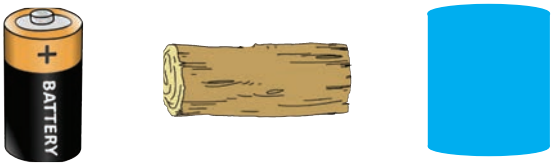


अब पट्याइएको कागजलाई खोलेर चार भागमध्ये एक भाग कैंचीले काटेर हटाउनुहोस् र बाँकी रहेका भागलाई चित्रमा जस्तै गरी जोडेर गमले टाँस्नु हो । कस्तो आकृति बन्यो ? यसमा कतिओटा शीर्षबिन्दु, कतिओटा कुना र कतिओटा वृत्ताकार सतह छन्, अवलोकन गरी समूहका छलफल कक्षामा प्रदर्शन गर्नुहोस् ।

बेलना (Cylinder)

क्रियाकलाप 3

प्रत्येक समूहरूले तल दिइएका जस्तै ठोस वस्तुहरू लिनुहोस् उक्त वस्तुहरूका/आकृतिहरूको अवलोकन गरी तलका प्रश्नको उत्तर समूहमा छलफल गरी खोज्नुहोस् :



(क) वस्तुहरू कस्ता आकारका छन् ?

(ख) यी वस्तुहरूका आधार कस्ता आकारका छन् ?

(ग) के यी वस्तुहरूलाई गुडाउन सकिन्छ ?

(घ) यी वस्तुहरूमा कतिओटा र कस्ता समतलीय सतहहरू छन्, गणना गर्नुहोस् ।

यहाँ सबै ठोस आकृतिहरूमा/वस्तुहरूमा दुईओटा वृत्ताकार सतहहरू छन् । यी सबै बेलनाकार वस्तु हुन् ।

बेलनाका गुणहरू

(क) यसको आधारहरू वृत्ताकार हुन्छन् ।

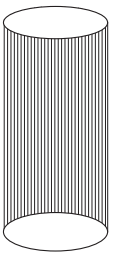
(ख) यसमा एउटा वक्र सतह हुन्छ ।

(ग) यसका आधारहरू आपसमा समानान्तर हुन्छन् ।

आधारहरू वृत्ताकार र समानान्तर भई एउटा वक्र सतह भएका ठोस वस्तुलाई बेलना भनिन्छ । अथवा बेलना एउटा ठोस वस्तु हो, जसका आधारहरू वृत्ताकार र समानान्तर तथा एउटा वक्र सतह हुन्छ ।

16.3.2 बेलनाका खोक्रा नमुना (Skeleton Model of Cylinder) निर्माण

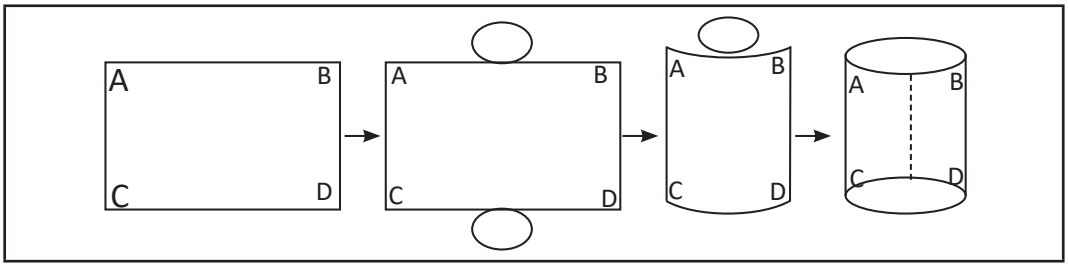
क्रियाकलाप 4



घर, विद्यालय, सडक किनारमा आफूले देखेका दायाँको चित्रमा भएको जस्तै बेलनाका खोक्रा नमुनाहरूका सूची तयार गरी छलफल गर्नुहोस् ।

प्रत्येक समूहले एक एकओटा आयताकार कार्डबोर्ड पेपरको लिनुहोस् । चित्रमा जस्तै गरी आयताकार लम्बाइसँग बराबर परिधि भएका उत्रै दुईओटा वृत्तहरू

लिनुहोस् । चित्रमा जस्तै गरी आयताकार कार्डबोर्ड पेपरलाई उत्रै दुईओटा वृत्तहरूको परिधिमा पर्ने गरी बेर्नुहोस् ।



त्यसपछि कागजका धारहरूलाई आपसमा सिधा पर्ने गरी गमले टाँस्नुहोस् ।

कस्तो आकार बन्यो ?

बनेको आकृतिको नाम के हो ? यसमा कतिओटा वृत्ताकार सतहहरू र कतिओटा शीर्षबिन्दुहरू छन् ? अवलोकन गरी समूहमा छलफल गर्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

अभ्यास 16.2

1. **तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :**

   (क) सोली भनेको के हो ? कुनै दुईओटा गुणहरू लेख्नुहोस् ।

   (ख) बेलना भनेको के हो ? कुनै दुईओटा गुणहरू लेख्नुहोस् ।

   (ग) बेलना र सोलीमा भएका एउटा समानता र एउटा फरक लेख्नुहोस् ।

   (घ) बेलना र सोलीको एउटा एउटा नमुना चित्र बनाउनुहोस् ।

2. सोलीको सतह र आधार कस्ता कस्ता हुन्छन्, लेख्नुहोस् ।

3. कुनै पाँचओटा बेलनाकार वस्तुहरू सङ्कलन गर्नुहोस् । तिनीहरूका सतह र आधार कस्ता कस्ता हुन्छन्, लेख्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

तपाईंको घरमा भएका वा घरमा प्रयोग गर्ने पाँच पाँचओटा बेलनाकार र सोली आकारका वस्तुहरू खोजी गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 17

निर्देशाङ्क
(Coordinates)

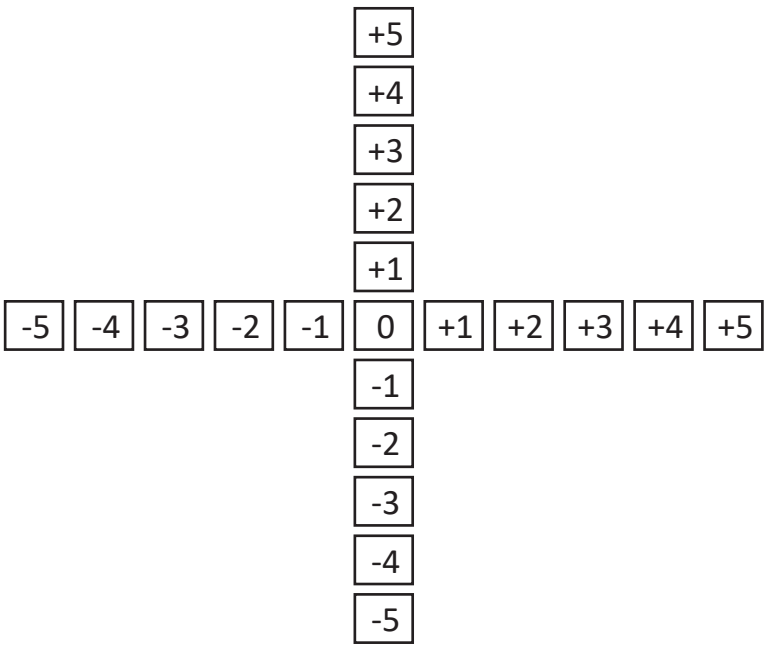
17.0 पुनरवलोकन

साथीहरूसँग मिलेर चित्रमा देखाए जस्तै गरी कागजका टुक्राहरूमा X - अक्ष र Y- अक्षका सङ्ख्या रेखा बनाउनुहोस् ।

अब दुई समूह (A र B) मा बाँडिएर निर्देशाङ्क खेल खेल्नुहोस् ।

खेल्ने तरिका

(क) सर्वप्रथम सङ्ख्या पत्तीहरूलाई चित्रमा देखाए जस्तै आपसमा लम्ब हुने गरी चउरमा राख्नुहोस् । सबै जना दुईओटा समूहमा विभाजन भई आमुन्ने सामुन्ने हुने गरी बस्नुहोस् ।



(ख) पहिला समूह A का साथीले समूह B का साथीलाई कुनै बिन्दुको निर्देशाङ्कका आधारमा उक्त बिन्दुमा उभिन भन्नुहोस् । ठिक स्थानमा उभिन नसकेमा बाहिरिनु पर्छ भन्ने जानकारी गराउनुहोस् ।

(ग) अब, समूह B का साथीले समूह A का साथीलाई कुनै बिन्दुको निर्देशाङ्कका आधारमा उक्त बिन्दुमा उभिन भन्नुहोस् । लेखाचित्रको आफ्नो निर्देशाङ्कमा उभिएको साथीले

नै समूह A को अर्को साथीलाई न. (ख) मा जस्तै गरी कुनै अर्को नयाँ बिन्दुको निर्देशाङ्क भन्ने छ र सोहीअनुसार उभिनुपर्छ ।

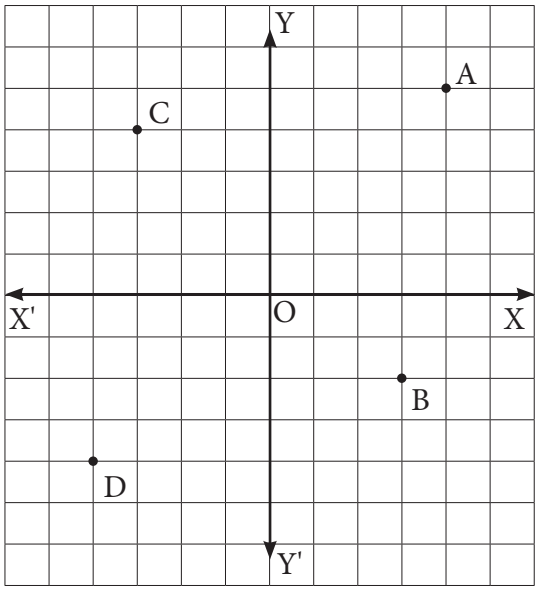
(घ यो क्रियाकलाप माथि जस्तै गरी सबै साथीहरूलाई एक एक पटक कुनै बिन्दुमा उभिन पाउने गरी अवसर दिनुपर्ने छ ।

(ङ) दुवै समूहहरूमध्ये जुन समूहका धरै साथीहरू निर्देशाङ्कअनुसार ठिक बिन्दुमा उभिन सके उही समूहको जित हुन्छ ।

17.1 लेखाचित्रमा बिन्दुको निर्देशाङ्क

क्रियाकलाप 1

उपयुक्त सङ्ख्यामा विद्यार्थीहरूको समूह बनाउनुहोस् र सँगैको ग्राफ भएको चित्रको अध्ययन गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर खोज्नुहोस् :



(क) XOX' लाई के भनिन्छ ?

(ख) YOY' लाई के भनिन्छ ?

(ग) बिन्दु O बाट बिन्दु A मा पुग्न कति एकाइ दायाँ गएर कति एकाइ माथि जानुपर्छ ?

(घ) बिन्दु O बाट बिन्दु D मा पुग्न कति एकाइ बायाँ गएर कति एकाइ तल जानुपर्छ ?

(ङ) बिन्दु O, B, C र D का निर्देशाङ्क के के हुन् ?

माथिका प्रश्नहरूको उत्तर समूहमा छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 2

समूहमा बसी सँगैको चित्रमा छलफल गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर खोज्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) बिन्दु A कुन चतुर्थाँशमा पर्छ ?

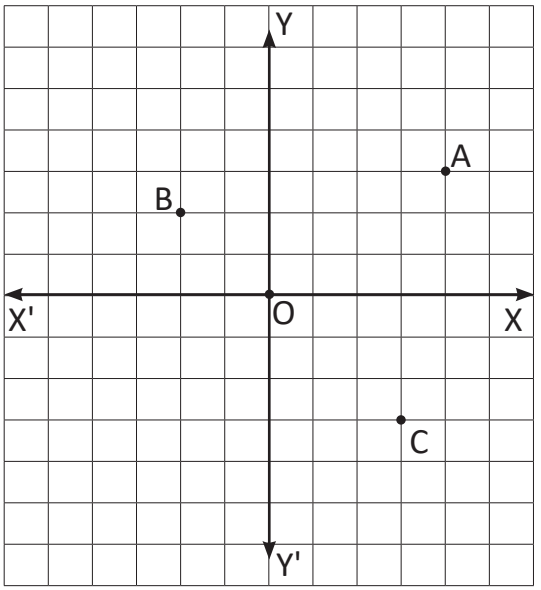
(ख) बिन्दु A को X– निर्देशाङ्क कति होला ?

(ग) त्यस्तै बिन्दु A को Y – निर्देशाङ्क कति होला ?

(घ) बिन्दु A को निर्देशाङ्क कति होला ?

(ङ) बिन्दु B को निर्देशाङ्क कति होला ?

(च) अब बिन्दु C को निर्देशाङ्क कति होला ?



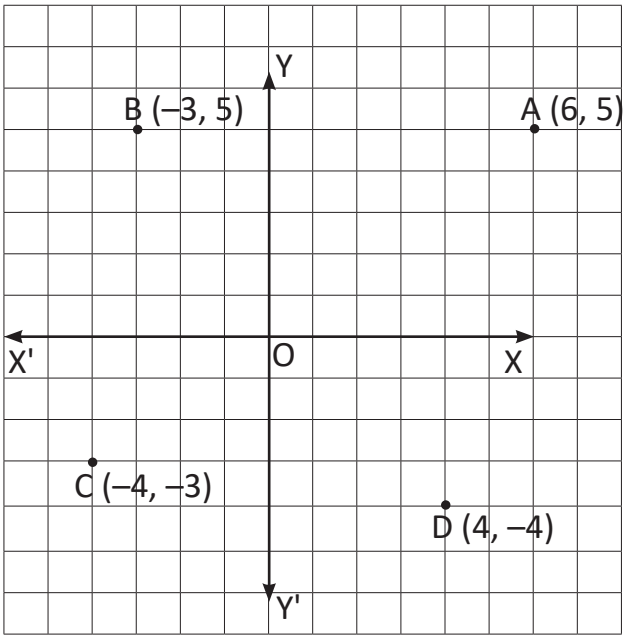
कुनै पनि बिन्दुको निर्देशाङ्कले त्यस बिन्दुको अवस्थितिलाई जनाउँदा X - निर्देशाङ्कले उद्गम बिन्दुभन्दा कति एकाइ दायाँ वा बायाँ भन्ने बुझाउँछ। त्यस्तै Y - निर्देशाङ्कले उद्गम बिन्दुभन्दा कति एकाइ माथि वा तल भन्ने बुझाउँछ ।

17.2 लेखाचित्रमा दिइएका बिन्दुहरूको अङ्कन (Plotting the Given Points in the Rraph)

क्रियाकलाप 3

बिन्दुहरू A(6, 5), B (–3, 5), C (–4, –3) र D(4, –4) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्नुहोस् ।

सर्वप्रथम कक्षाका विद्यार्थीहरू समूहमा विभाजन भई आ आफ्ना ग्राफ कापीमा सँगैको चित्रमा देखाए जस्तै गरी X – अक्ष र Y – अक्ष जनाउने सङ्ख्या रेखाहरू बनाउनुहोस् ।



(क) A(6, 5) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्न के गर्नुपर्ला, छलफल गर्नुहोस् ।

A मा पुग्न, X – अक्षमा उद्गम बिन्दु देखि 6 एकाइ दायाँ जानुपर्ने हुन्छ । त्यसपछि त्यही बिन्दुबाट Y– अक्षमा 5 एकाइ माथि गई A(6, 5) अङ्कन गर्नुपर्छ ।

(ख) त्यसै गरी क्रमशः बिन्दु B (-3, 5), C (–4, –3) र D(4, –4) लाई कसरी लेखाचित्रमा अङ्कन गर्न सकिन्छ होला ? साथीसँग पनि छलफल गर्नुहोस् ।

(ग) बिन्दु A र B बिचको दुरी कति हुन्छ ? बिन्दु A देखि बिन्दु B सम्म वर्ग कोठा गन्ति गरेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 1

बिन्दुहरू K (3, 4), L(–3, 4), M(3, –5) र N एउटा आयतका शीर्ष बिन्दुहरू हुन् भने,

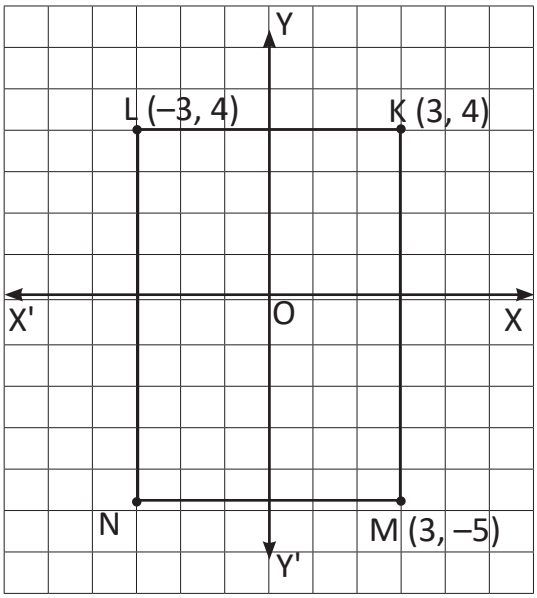
(क) दिइएको बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्नुहोस् ।

(ख) बिन्दु N को निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) बिन्दु K र L विचका दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

(क) दिइएको बिन्दुहरू K (3,4), L(-3,4), M(3,-5) लाई क्रमशः अङ्कन गरी सँगैको लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।



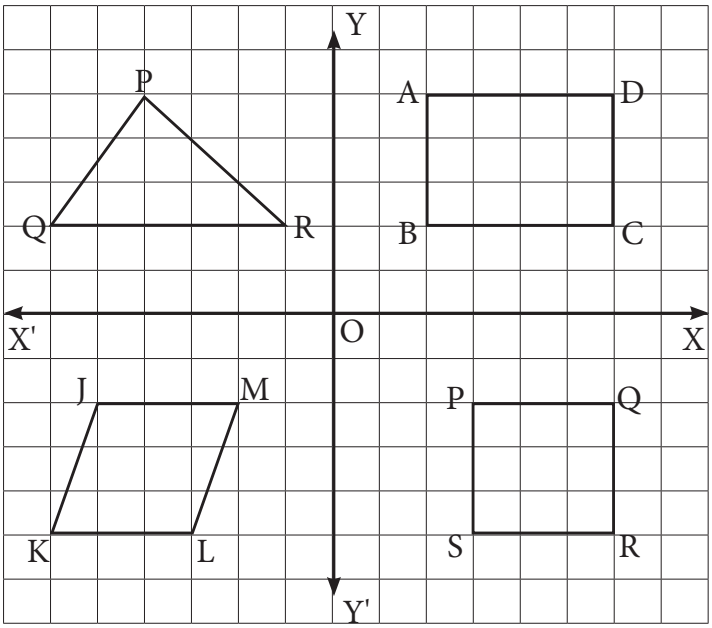
(ख) बिन्दु N मा पुग्न X- अक्षमा उद्गम बिन्दुबाट 3 एकाइ बायाँ गई त्यहीबाट 5 एकाइ तल जानुपर्दछ । तसर्थ N को निर्देशाङ्क (–3, –5) हुन्छ ।

(ग) बिन्दु K देखि बिन्दु L बिचको कोठा गन्ती गर्दा 6 एकाइ छ ।

तसर्थ K र L बीचको दुरी (KL) = 6 एकाइ

अभ्यास 17

1. **चित्रमा दिइएका ज्यामितीय आकृतिहरूका शीर्ष बिन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।**



2. लेखाचित्रमा दिइएका आकृतिहरूको शीर्षबिन्दुहरूको निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

3. **तल दिइएका प्रत्येक बिन्दुलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्नुहोस् ।**

   P(2, 2), Q(–3, 4), R(–2 ,0), S(4, –4), T(-5, –5)

4. **तलका प्रत्येक बिन्दुहरूलाई लेखाचित्र बनाइ अङ्कन गर्नुहोस् । प्रत्येक बिन्दुलाई क्रमशः जोड्नुहोस् । यसरी जोड्दा बन्ने आकृतिको नाम पनि लेख्नुहोस् ।**

   (क) A(4, 0), B(4, 4), C(–2, 4) र D (–2, 0)

   (ख) R(2, 3), S(2, –2) र T(–1, 2)

5. **बिन्दु A(–2, 3) , B(2, 3), C(–2, 4), D एउटा आयतका शीर्ष बिन्दुहरू हुन् भने**

   (क) दिइएका बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्नुहोस् ।

   (ख) AB को लम्बाइ कति होला ?

   (ग) CD को लम्बाइ कति होला ?

6. **बिन्दुहरू J(–4, 4), K (4, 4), L(4, –4) र M एउटा वर्गका शीर्षबिन्दुहरू हुन् भने,**

(क) दिइएको बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्नुहोस् ।

(ख) बिन्दु M को निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

(ग) बिन्दु JK को लम्बाइ कति होला ?

परियोजना कार्य

एउटा ठुलो साइजको ग्राफपेपरमा X – अक्ष र Y – बनाउनुहोस् । उक्त ग्राफमा एउटा चित्र बनाउनुहोस् । उक्त चित्रको अवलोकन गरी कुनै पाँचओटा बिन्दुहरूको निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

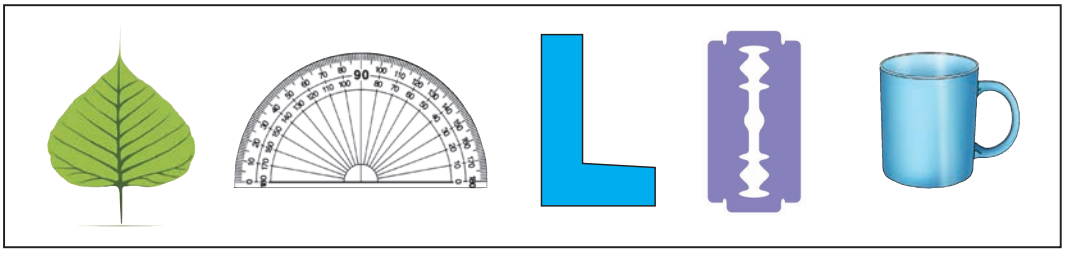
उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 18 सममिति र टेसेलेसन (Symmetry and Tessellation)

18.0 पुनरवलोकन (Review)

तल दिइएका चित्रहरूको अवलोकन गरी समूहमा साथीहरूसँग छलफल गरी सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर खोज्नुहोस् :



(क) माथि दिइएका कुन कुन चित्रलाई दुई बराबर भागमा बाँड्न सकिन्छ ?

(ख) माथि दिइएका चित्रहरूमध्ये कुन कुन सममितीय चित्रहरू (Symmetrical figures) हुन् छुट्याउनुहोस् ।

(ग) के माथिका चित्रहरूलाई 180° कोणमा घुमाउँदा पनि उस्तै देखिन्छन् ?

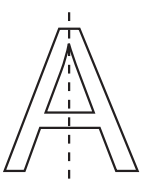
- बराबर भागमा बाँड्न सकिने चित्रलाई सममितीय चित्र भनिन्छ ।
- कुनै पनि चित्रमा जुन रेखाबाट चित्रलाई दुई बराबर भागमा पट्याउन सकिन्छ त्यस रेखालाई सममितिको अक्ष भनिन्छ । यस्ता सममितिका अक्ष एकभन्दा बढी पनि हुन सक्छन् ।

18.1 रेखा र बिन्दु सममिति (Line and Point Symmetry)

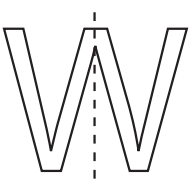
18.1.1. रेखा सममिति (Line Symmetry)

क्रियाकलाप 1

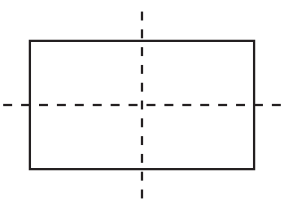
सबै विद्यार्थीले दिइएका आकृतिहरूको ट्रेस गर्नुहोस् :



चित्र I



चित्र II



चित्र III

आफूले ट्रेस गरेका चित्रलाई डट रेखा (सममितिको अक्ष) देखी बराबर भागमा पट्याउनुहोस् ।

(क) चित्र I लाई कति तरिकाले दुई बराबर भाग हुने गरी पट्याउन सकियो ?

(ख) चित्र II लाई कति तरिकाले बराबर भाग हुने गरी पट्याउन सकियो ?

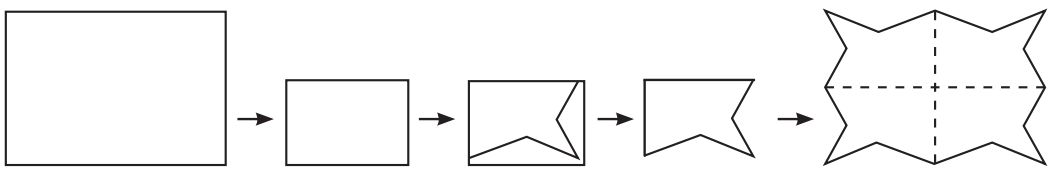
(ग) चित्र III लाई कति तरिकाले बराबर भाग हुने गरी पट्याउन सकियो ?

आफ्नो बेन्चका साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् ।

- चित्र I र चित्र II लाई 1 तरिकाले पट्याउन सकिन्छ । तसर्थ यसमा रेखीय सममितिको अक्ष एउटा मात्र छ ।
- चित्र III लाई 2 तरिकाले पट्याउन सकिन्छ । तसर्थ यसमा रेखीय सममितिको अक्ष 2 ओटा छन् ।

क्रियाकलाप 2

प्रत्येक विद्यार्थीको एउटा कागजको पाना लिई त्यसलाई बिच भागबाट चित्रमा देखाए जस्तै गरी पट्याउनुहोस् । पट्याइएको भागलाई यथावत् राखी पुनः अर्को तिरबाट एकपटक पट्याउनुहोस् ।



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

अब, तेर्सो चित्रमा दिइएको आकृति बनाउनुहोस् । त्यसपछि ९ष्ख० मा जस्तै गरी त्यसको बाहिरी घेरा कैंचीले काट्नुहोस् र पट्याइएको भागलाई खोल्नुहोस् ।

यसरी बनेका आकृतिमा कतिओटा सममिति रेखाहरू (Lines of Symmetry) बने,

छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

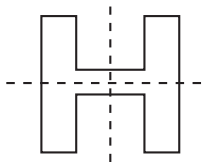
प्रत्येक चित्रलाई दुई बराबर भागमा बाँड्ने डट रेखा (dot line) लाई सममितिको अक्ष (Axis of Symmetry) वा ऐना रेखा (Mirror line) पनि भन्ने गरीन्छ ।

उदाहरण 1

तल रेखा सममितिको अक्ष र आधा चित्र दिइएको छ । यसलाई पूरा गर्नुहोस् । रेखीय सममितिको अक्षको सङ्ख्या पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ रेखा सममितिको अक्षको आधारमा चित्र पूरा गर्दा

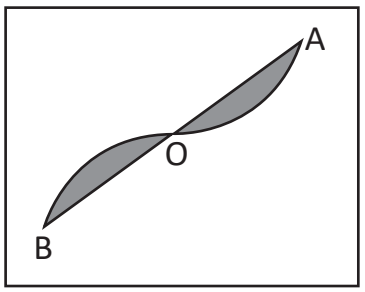


रेखीय सममितिका अक्षहरूको सङ्ख्या = 2

18.1.2 बिन्दु सममिति (Point Symmetry)

क्रियाकलाप 3

सबै विद्यार्थीहरू उपयुक्त समूहमा विभाजित भई प्रत्येक समूहले दिइएको चित्रलाई पारदर्शी प्लास्टिकमा ट्रेस गर्नुहोस् ।



माथिको चित्रमा ठिक मिल्ने गरी केन्द्र O मा पेन्सिलको टुप्पाले थिचेर ट्रेस गरेको चित्रलाई विस्तारै घुमाउनुहोस् ।

यसरी घुमाउँदा,

- कति डिग्रीको कोणमा घुमाउँदा चित्र (आकृति) केन्द्रदेखि बराबर दुरीमा तर विपरीत दिशामा आइपुग्छ ?
- पहिलेको अवस्थामा आइपुग्दा चित्र (आकृति) कति पटक खप्टियो ?
- बिन्दु सममितिको श्रेणी कति हुन्छ ?
- साथीहरूसँग छलफल गरी निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 4

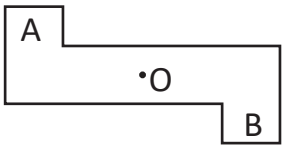
अङ्ग्रेजी वर्णमालाका कुन कुन अक्षरहरूलाई बिन्दु सममितिका आधारमा ठिक बिचबाट (180° को कोणमा) घुमाउँदा आकृति केन्द्र बिन्दुदेखि बराबर दुरीमा तर विपरीत दिशामा हुन्छ ?

बिन्दु सममितिको श्रेणी कति हुन्छ ? साथीहरूसँग छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

कुनै पनि आकृतिलाई कुनै निश्चित बिन्दुमा 180° को कोणमा घुमाउँदा केन्द्रदेखि बराबर दुरीमा तर विपरीत दिशामा खप्टिने अवस्था आउनुलाई बिन्दु सममिति भएको भनिन्छ ।

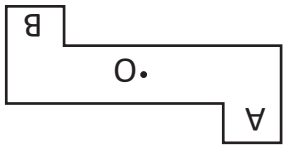
उदाहरण 2

दिइएको चित्रलाई बिन्दु सममितिको आधारमा केन्द्र O मा घुमाउँदा कस्तो आकृति बन्छ ?



समाधान

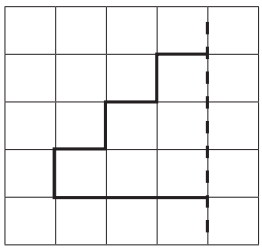
यहाँ दिइएको चित्रलाई बिन्दु सममितिको अधारमा (केन्द्र बिन्दु O मा 180°) घुमाउँदा पहिलेको चित्रको उल्टो (विपरीत दिशामा) आकृति बन्छ ।



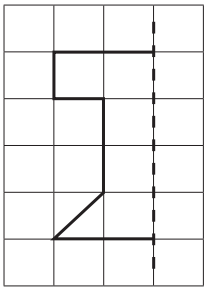
अभ्यास 18.1

1. तलका चित्रहरूमा डट रेखालाई सममिति अक्ष मानेर पूरा गर्नुहोस् :

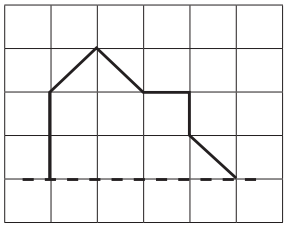
(क)



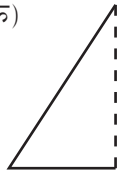
(ख)

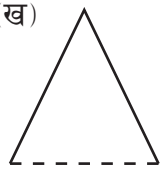


(ग)



2. तल दिइएका चित्रमा सममितिको अक्ष र आधा चित्र दिइएको छ। चित्र पूरा गर्नुहोस् र रेखीय सममितिका अक्षहरूको सङ्ख्या पनि पत्ता लगाउनुहोस् :

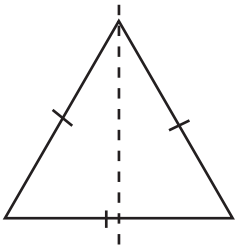
(क)


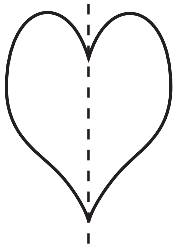
(ख)


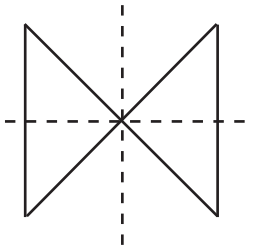
(ग)

(घ)

3. तलका प्रत्यके बिन्दु रेखालाई ट्रेसिङ गर्नुहोस् । प्रत्येकमा रेखीय सममितिको अक्ष खिच्नुहोस्। रेखीय सममितिको अक्ष कतिओटा छन्, पत्ता लगाउनुहोस् :

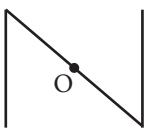
(क)


(ख)


(ग)


4. तलका चित्रहरूलाई ट्रेस गरी O बिन्दुमा 180° को कोणमा घुमाउनुहोस् :

(क)

(ख)


(ग)

(घ)

5. तल दिइएका चित्रहरूमध्ये कुन कुन चित्रहरूमा बिन्दु सममिति छन्, छुट्याउनुहोस् :

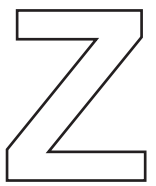
(क)

(ख)

(ग)

(घ)

(ङ)

(च)


6. दिइएको तासका पत्तीहरूमा भएको आकृति बिन्दु सममिति हो वा होइन्, हो भने किन ?

परियोजना कार्य

विभिन्न रङका कागज लिई त्यसलाई पट्याई रेखीय सममिति र बिन्दु सममि(ति हुने आकृतिहरू कैंचीले काटेर कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

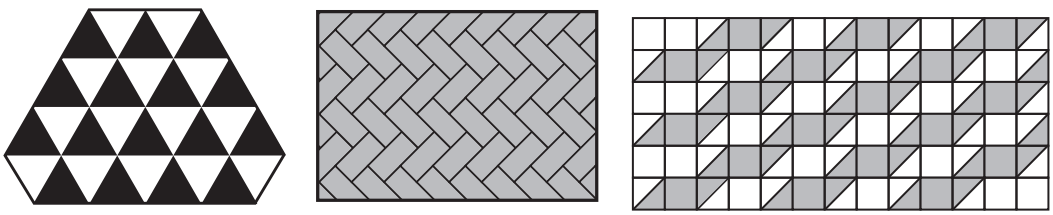
उत्तर

(1 – 3) सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

१. क) २ ख) २ ग) ३ घ) ५ ङ) ४ च) ३ छ) ४ ज) ५

18.2 टेसेलेसन (Tessellation)

तल दिइएका चित्रहरू अवलोकन गर्नुहोस् । ती चित्रहरूमा कस्ता कस्ता आकृतिहरू कति कतिओटा रहेका छन् ? सँगैका साथीसँग छलफल गरी सूची तयार पार्नुहोस् :



के तपाईंको घरमा भएको नाङ्लो, कार्पेट, डोको, इँटाका वा ढुङ्गाको पर्खाल, फुटबल आदिमा यस्ता आकृतिहरू देख्नुभएको छ ? ती आकृतिहरू कसरी राखेका छन् ? सँगैको साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

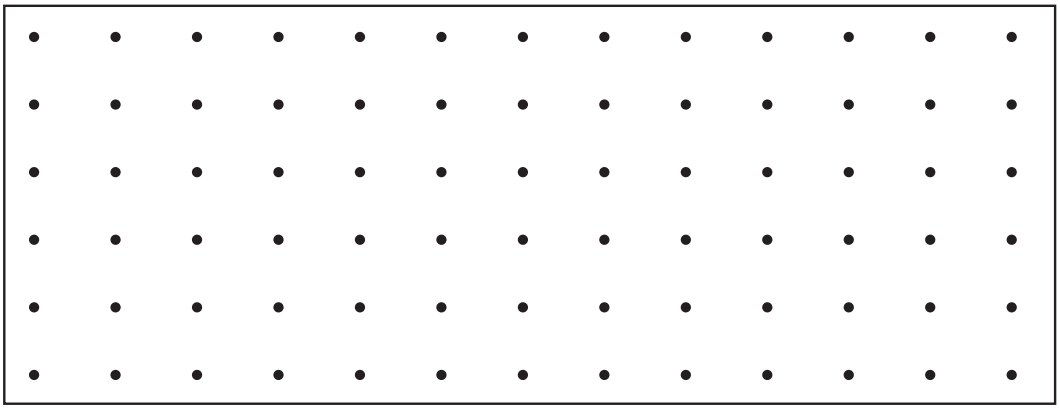
क्रियाकलाप 1

सबै समूहले चित्रमा देखाए जस्तै गरी रङ्गीन कागजमा एउटै नापका त्रिभुजाकार आकृतिहरू बनाई कैंचीले काट्नुहोस् । अब चित्रमा देखाए जस्तै गरी ती त्रिभुजाकार टुक्राहरू चार्टपेपरमा टाँस्नुहोस् । यसरी टुक्राहरू टाँस्दा सतहमा खाली ठाउँ नरहने गरी र नखप्टिने गरी टाँस्नुहोस् र टेसेलेसनका बारेमा छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

एक वा एकभन्दा बढी ज्यामितीय आकृतिहरू नखप्टाइकन र खाली ठाउँ नराखीकन समतल सतह ढाक्ने वा छोप्ने प्रक्रियालाई टेसेलेसन (Tessellation) भनिन्छ ।

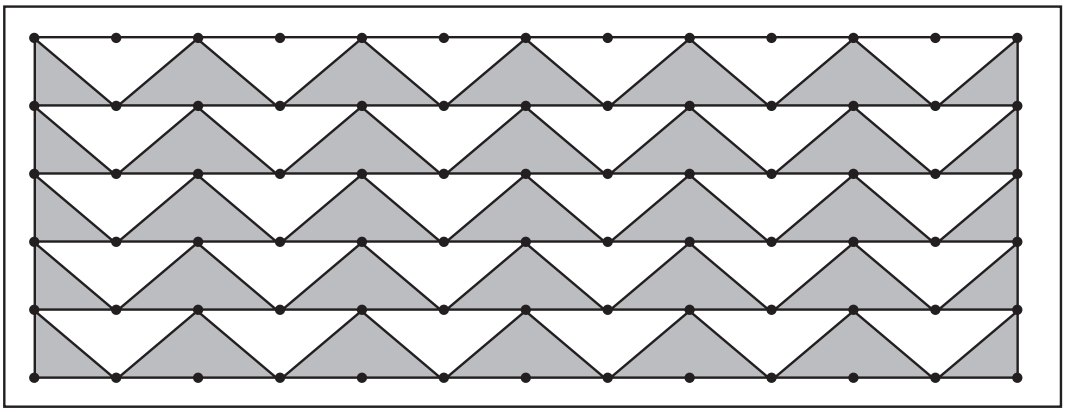
उदाहरण 1

दिइएका थोप्लाहरू जोडेर त्रिभुजाकार टेसेलेसन बनाउनुहोस् र रङ भर्नुहोस् ।



समाधान

माथिका थोप्लाहरू जोडेर निम्नानुसारको त्रिभुजाकार टेसेलेसन बनाउन सकिन्छ ।

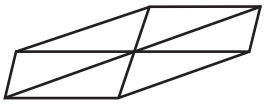


अभ्यास 18.2

1. दिइएका चित्रहरू त्रिभुजाकार टेसेलेसन हो वा होइन र किन, पत्ता लगाउनुहोस् ।

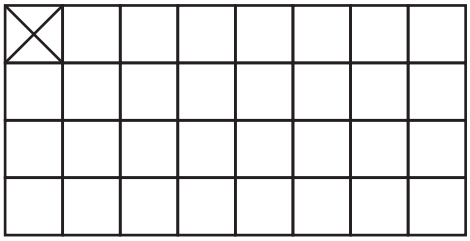
(क)

(ख)

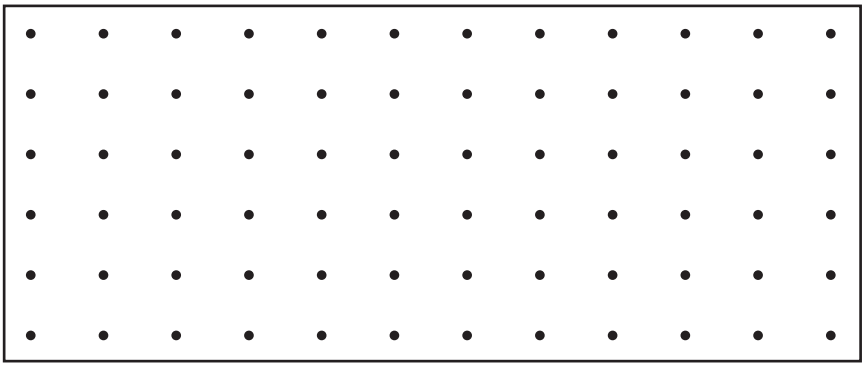


(ग)

2. तल देखाइएको जस्तै गरी त्रिभुजाकार टेसेलेसन बनाई पूरा गर्नुहोस् ।



3. दिइएका थोप्लाहरू जोडेर त्रिभुजाकार टेसेलेसन बनाउनुहोस् र रङ भर्नुहोस् ।



4. समकोण त्रिभुज र समबाहु त्रिभुजबाट बन्ने एक एकओटा टेसेलेसन बनाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

आफ्नो विद्यालय, घरको भित्ता, घरमा प्रयोग गरीने बाथरुमका टायल, कार्पेट, फुटबल र भलिबल आदिमा बनाइएका चित्रहरू अवलोकन गरी त्रिभुजाकार टेसेलेसनहरूको चित्र आफ्नो कापीमा बनाउनुहोस् र रङसमेत भरेर कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

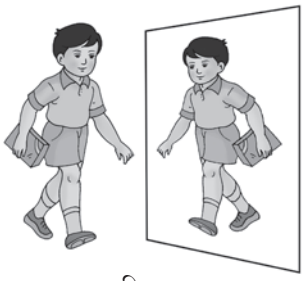
शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 19

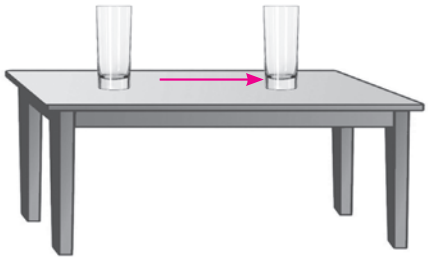
स्थानान्तरण
(Transformation)

19.0 पुनरवलोकन (Review)

तल दिइएका चित्रहरूको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नहरूलाई साथीहरूबिच छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।



चित्र I



चित्र II

(क) चित्र I मा के मानिसको अनुहार र ऐनामा देखिएको अनुहार ऐनाबाट बराबर दुरिमा छन् ?

(ख) चित्र I मा, के मानिसको अनुहार र ऐनामा देखिएको अनुहार उस्तै र उत्रै छन् ?

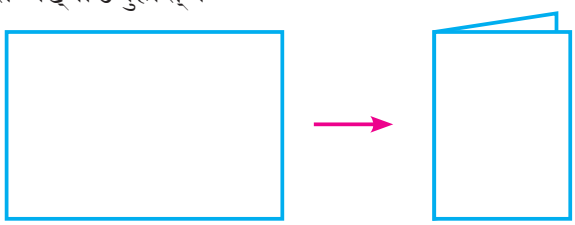
(ग) चित्र II मा के गिलासलाई पहिलेको स्थानबाट निश्चित दिशामा सार्दा आकारमा परिवर्तन आएको छ ?

कुनै निश्चित नियममा रही कुनै वस्तुको स्थिति (position) र नापमा परिवर्तन हुनुलाई उक्त वस्तुको स्थानान्तरण (Transformation) भनिन्छ ।

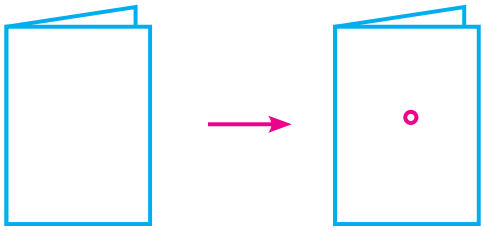
19.1 परावर्तन (Reflection)

क्रियाकलाप 1

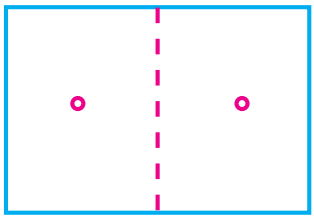
सबै विद्यार्थीहरूले एक एकओटा पेपर लिई तल चित्रमा देखाए जस्तै गरी बिचबाट दुई बराबर भाग हुने गरी पट्याउनुहोस् ।



अब कम्पासको चुच्चो वा कलमले पट्याइएको भागका बिचमा एउटा प्वाल पार्नुहोस् ।



त्यसपछि चित्रमा देखाए जस्तै गरी पट्याइएको भागलाई खोल्नुहोस् :



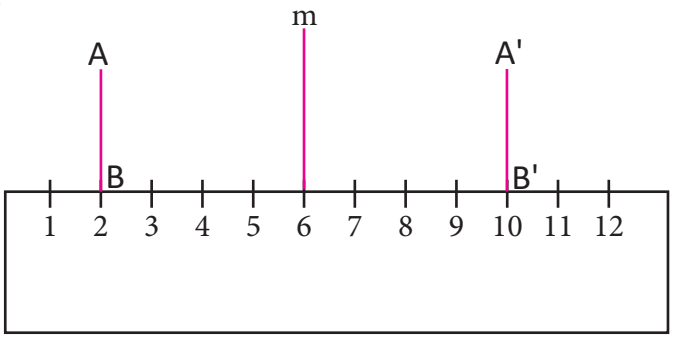
कागज पट्याउँदा बनेको रेखादेखि दुवै प्वालसम्मको दुरी नापी साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् ।

माथिको छलफलबाट निम्नानुसारको निष्कर्ष पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

- दुईओटा प्वालहरूमध्ये कुनै एउटा प्वाललाई आकृतिमान्दा अर्को प्वाल त्यसको प्रतिबिम्ब हुन्छ ।
- कागज पट्याउँदा बनेको रेखा परावर्तनको अक्ष हो ।
- परावर्तन अक्षबाट आकृति र प्रतिविम्ब बराबर दुरीमा रहेको हुन्छ ।

क्रियाकलाप 2

दिइएका चित्र अवलोकन गर्नुहोस् र साथीहरूसँग छलफल गरी सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर खोज्नुहोस्



(क) चित्रमा रेखा AB लाई परावर्तन गराउँदा बनेको प्रतिविम्ब (image) कुन हो ?

(ख) के रेखा AB र रेखा A'B' उस्तै र उत्रै छन् ?

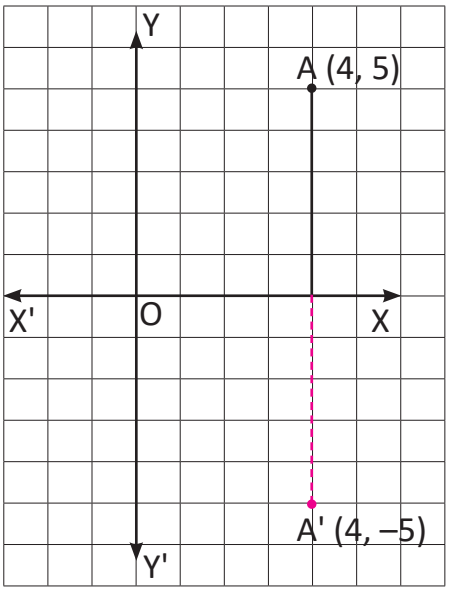
(ग) चित्रमा परावर्तनको अक्ष कुन हो ?

(घ) के परावर्तनको अक्षदेखि रेखा AB र रेखा A'B' सम्मको दुरी बराबर छ ?

(ङ) के वास्तविक आकृति (रेखा AB) र प्रतिविम्ब (रेखा A'B') अनुरूप छन् ?

- जुन रेखाका आधारमा परावर्तन गरीन्छ, त्यस रेखालाई परावर्तनको अक्ष (axis of reflection) भनिन्छ ।
- वास्तविक वस्तु परावर्तन भई बन्ने आकृतिलाई प्रतिबिम्ब (Image) भनिन्छ ।
- कुनै वस्तु वा आकृतिलाई परावर्तन गर्दा आकृति र प्रतिविम्ब परावर्तनको अक्षबाट बराबर दुरीमा पर्दछन् ।
- कुनै पनि ज्यमितीय चित्र वा आकृतिलाई परावर्तन गर्दा वास्तविक आकृति र प्रतिविम्ब अनुरूप हुन्छन् ।

(क) X – अक्षमा परावर्तन (Reflection on X- axis)



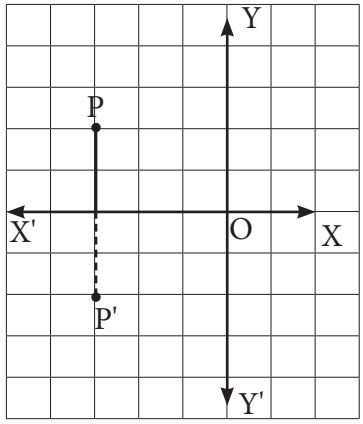
सँगैको ग्राफमा देखाए जस्तै गरी आआफ्नो ग्राफ कापीमा X - अक्ष (XOX') र Y- अक्ष (YOY') खिच्नुहोस् । अब ग्राफमा कुनै बिन्दु A लिएर XOX' बाट परावर्तन गराउनुहोस् र उक्त बिन्दुलाई A' नाम दिनुहोस् । X- अक्षबाट A सम्मको दुरी र X- अक्षबाट A' सम्मको दुरी बराबर हुनुपर्दछ ।

त्यसपछि ग्राफमा बिन्दु A' को निर्देशाङ्क गनेर लेख्नुहोस् । त्यसैगरी A को निर्देशाङ्क कति हुन्छ ? साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् । यहाँ ग्राफमा बिन्दु A को निर्देशाङ्क (4, 5) र A' को निर्देशाङ्क (4, –5) छ ।

बिन्दु A(1, 2) र बिन्दु B(4, 3) लाई जोड्दा बन्ने रेखाखण्डलाई X- अक्षमा परावर्तन गर्नुहोस् र बन्ने प्रतिविम्बलाई ग्राफमा देखाई साथीहरूसँग छलफल गरी कक्षामा प्रदर्शन गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

बिन्दु P(–3, 2) लाई ग्राफमा अङ्कन गरी X- अक्षबाट परावर्तन गराई ग्राफमा देखाउनुहोस् ।



समाधान

यहाँ p(x, y) = P (–3, 2)

अब ग्राफमा P(–3, 2) लाई

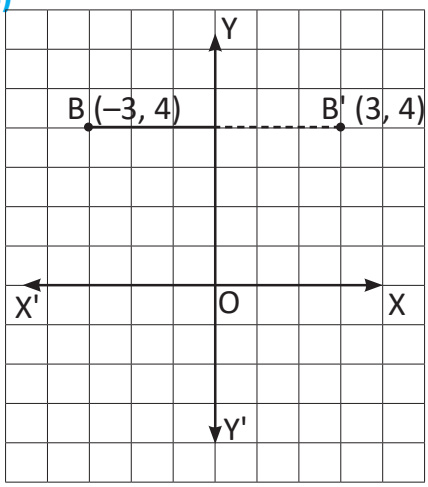
X- अक्षबाट परावर्तन गर्दा,

P(–3, 2) को प्रतिविम्ब P'(–3, –2) भयो

तसर्थ P(x', y') = P'(–3, –2)

(ख) Y- अक्षमा परावर्तन (Reflection on Y- axis)

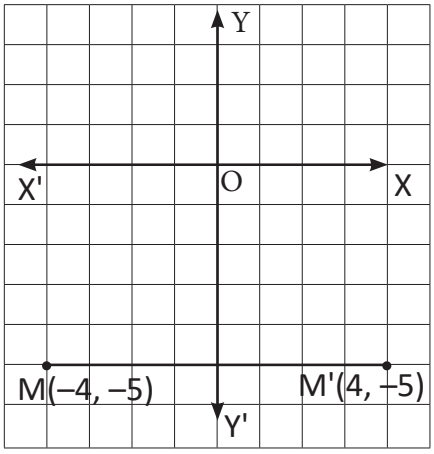
सँगैको ग्राफमा देखाए जस्तै गरी आआफ्नो ग्राफ कापीमा कुनै बिन्दु B लाई YOY' बाट परावर्तन गराउनुहोस् यसको प्रतिबिम्ब YOY' रेखाबाट बिन्दु B को बराबर दुरीमा पर्दछ । यसलाई B' नाम दिनुहोस् ।



अब B र B' को निर्देशाङ्क गनेर कति कति हुन्छ ? साथीहरूसँग छलफल गरी लेख्नुहोस् । यहाँ ग्राफमा बिन्दु B को निर्देशाङ्क (–3, 4) र B' को निर्देशाङ्क (3, 4) छ ।

उदाहरण 2

बिन्दु M(–4, –5) लाई ग्राफमा अङ्कन गरी Y- अक्षबाट परावर्तन गराई ग्राफमा देखाउनुहोस् ।



समाधान

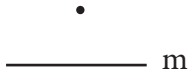
यहाँ M(x, y) = M (–4, –5)

अब ग्राफ पेपरमा M(–4, –5) लाई Y- अक्षबाट परावर्तन गर्दा, M(–4, –5) को प्रतिविम्ब M'(4, –5) भयो तसर्थ, M'(x', y') = M'(4, –5) हुन्छ ।

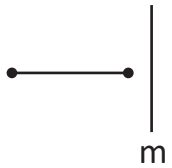
अभ्यास 19.1

1. **दिइएका ज्यामितीय आकृतिहरूलाई m अक्ष (X–अक्ष वा Y–अक्ष) मा परावर्तन गरी प्रतिबिम्ब चित्र खिच्नुहोस् ।**

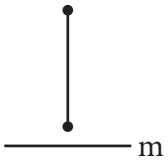
(क)



(ख)



(ग)



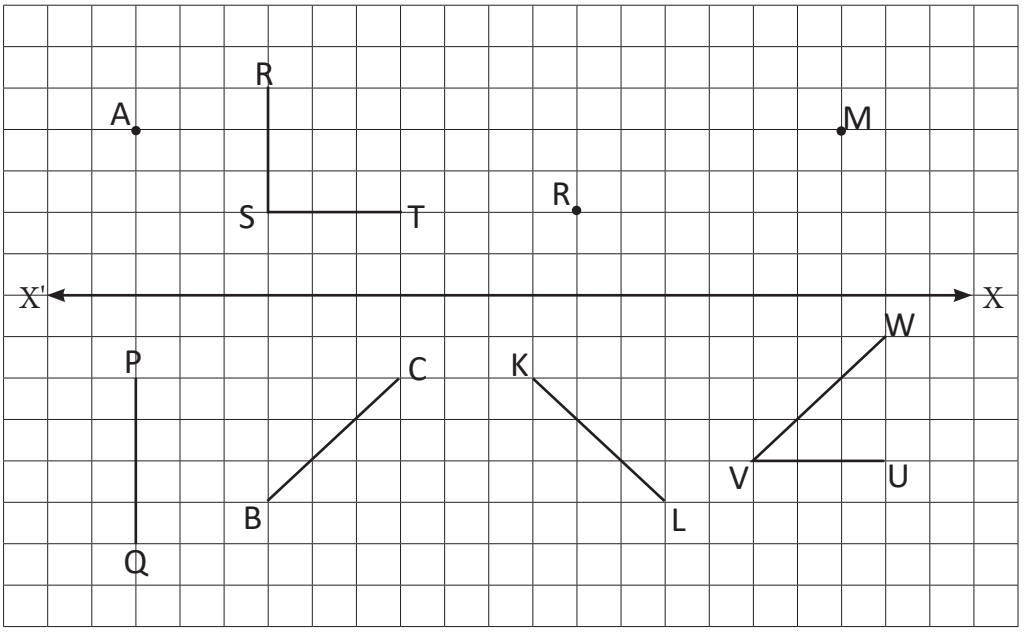
(घ)

2. **तलका ज्यामितीय आकृतिहरूलाई परावर्तनको अक्ष XX' (X-अक्ष) मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब लेख्नुहोस् ।**

(क) बिन्दु A (ख) बिन्दु M (ग) बिन्दु R

(घ) रेखा AC (ङ) रेखा PQ (च) रेखा KL

(छ) ∠RST (ज) ∠UVW

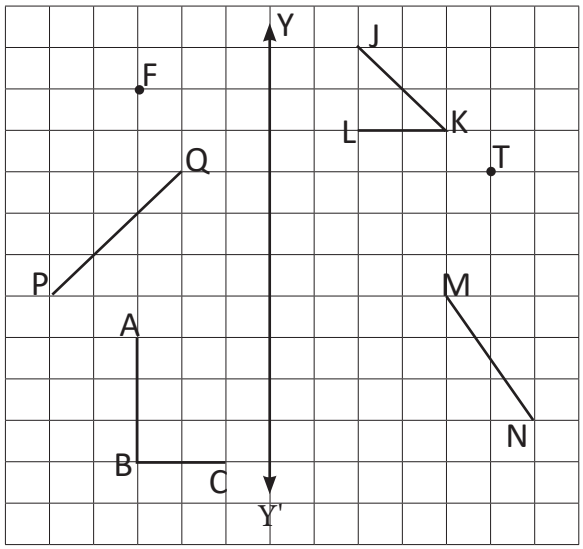


3. दिइएका ज्यामितीय चित्रहरूलाई Y-अक्षमा परावर्तन गर्नुहोस् र बन्ने प्रतिविम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) बिन्दु F (ख) बिन्दु T

(ग) रेखा PQ (घ) रेखा MN

(ङ) ∠ABC (च) ∠JKL



4. लेखाचित्रको प्रयोग गरी दिइएका निर्देशाङ्कहरू लाई X- अक्षमा परावर्तन गरी प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) (1, 2) (ख) (3, 2) (ग) (–4, 4)

(घ) (–2, 6) (ङ) (8, –7) (च) (9, –10)

(छ) (–6 –9) (ज) (–5, -8) (झ) (–9, 7)

5. प्रश्न (4) का बिन्दुहरूलाई Y-अक्षबाट परावर्तन गरी ग्राफपेपरमा भर्नुहोस् ।

6. बिन्दु T' (3,-4) लाई X– अक्षबाट परावर्तन गर्नुहोस् र T को निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । रेखा TT' को दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. बिन्दु P(4, 5) लाई Y– अक्षबाट परावर्तन गर्नुहोस् । P' को निर्देशाङ्क र रेखा PP' को दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

आफ्नो घर, विद्यालय, बाटामा हुने गरेको परावर्तनका पाँचओटा अवस्थाहरूको खोजी गरी टिपोट गर्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

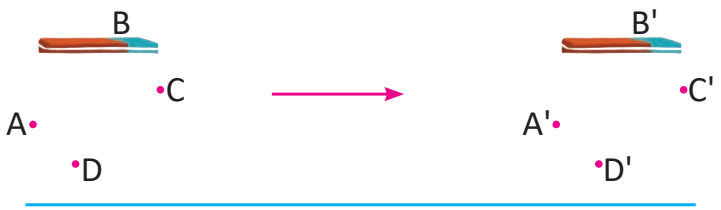
उत्तर

4.	(क)	(1, –2)	(ख)	(3, –2)	(ग)	(–4, –4)
	(घ)	(–2, -6)	(ङ)	(8, 7)	(च)	(9, 10)
	(छ)	(–6, 9)	(ज)	(–5, 8)	(झ)	(–9, –7)
5.	(क)	(–1, 2)	(ख)	(–3, 2)	(ग)	(4, 4)
	(घ)	(2, 6)	(ङ)	(–8, –7)	(च)	(–9, –10)
	(छ)	(6, –9)	(ज)	(5, –8)	(झ)	(9, 7)
6.	T'(3, 4)		7.	P' (–4,5)		

19.2 विस्थापन (Displacement)

क्रियाकलाप 1

सबै विद्यार्थीले आआफ्ना कापीमा एउटा सिधा रेखा कोर्नुहोस् । चित्रमा देखाए जस्तै गरी त्यो रेखाको एक छेउमा इरेजर राख्नुहोस् र इरेजरको चारओटै कुनामा थोप्ला दिएर नाम ABCD राख्नुहोस् ।



त्यसपछि इरेजरलाई घिसारेर त्यही रेखामा अगाडि सार्नुहोस् र इरेजरको चारओटै कुनामा थोप्ला दिई A', B', C' र D' नामाङ्कन गर्नुहोस् ।

अब साथीहरूसँग छलफल गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर खोज्नुहोस्

(क) AA', BB', CC' र DD' को सम्बन्ध के होला ?

(ख) के इरेजरको स्थान निश्चित दिशामा परिवर्तन भयो ?

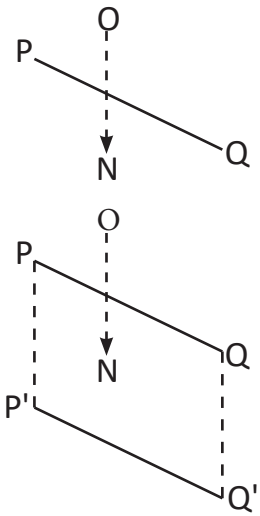
(ग) के आकृति र प्रतिबिम्ब अनुरूप छन् ?

अब माथिका क्रियाकलापका आधारमा विस्थापनको परिभाषा लेखी आफूले लेखेको परिभाषालाई साथीले लेखेको परिभाषासँग तुलना गरी हेर्नुहोस् ।

- कुनै पनि वस्तुलाई निश्चित दिशा र दुरीमा सार्नु वा स्थानान्तरण गर्नुलाई विस्थापन भनिन्छ ।
- विस्थापनका लागि विस्थापनको परिमाण वा नाप र दिशा उल्लेख गर्नुपर्दछ ।
- विस्थापनमा आकृति र प्रतिबिम्ब अनुरूप हुन्छन् ।
- कुनै पनि बिन्दुलाई विस्थापन गर्दा दिइएको परिमाण र दिशामा समानान्तर रेखा खिच्नुपर्छ ।

उदाहरण 1

सँगैको रेखाखण्ड PQ लाई किरण रेखा ON को परिमाण र दिशामा विस्थापित गर्नुहोस् ।



समाधान

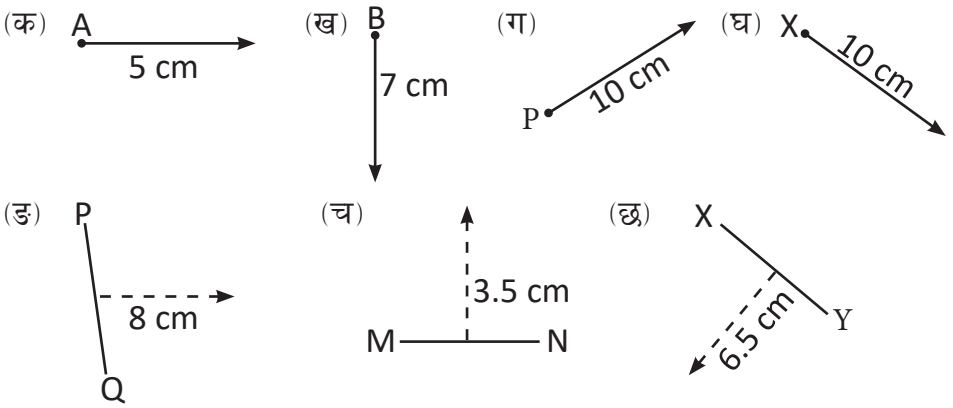
(क) बिन्दु P बाट ON को दिशा र परिमाण सँग बराबर र समानान्तर हुने गरी PP' खिच्नुहोस् ।

(ख) बिन्दु Q बाट ON को दिशा र परिमाणसँग बराबर र समानान्तर हुने गरी QQ' खिच्नुहोस् ।

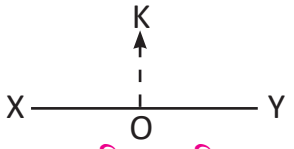
(ग) P' र Q' लाई जोड्नुहोस् । यसरी P'Q' नै रेखाखण्ड PQ को आवश्यक प्रतिबिम्ब हो ।

अभ्यास 19.2

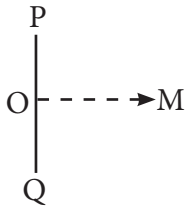
1. तल दिइएका बिन्दु तथा रेखाखण्डहरूलाई दिइएका दिशा र परिमाणमा विस्थापन गर्नुहोस् ।



2. रेखा XY लाई OK को नाप र दिशामा विस्थापन गर्नुहोस् ।

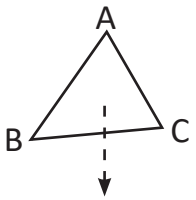


3. रेखा PQ लाई OM को नाप र दिशामा विस्थापन गर्नुहोस् ।

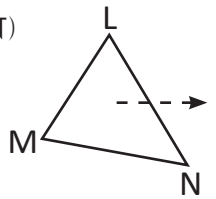


4. तलका प्रत्येक ज्यामितीय आकृतिकहरूलाई दिइएको दिशा र परिमाणमा विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब खिच्नुहोस् ।

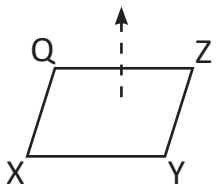
(क)



(ख)



(ग)



5. एउटा बच्चा चिप्लेटी खेल्दा चिप्लेर 4m तल आयो भने के यो विस्थापन हो, कारण दिनुहोस् ।

6. भुइँमा एउटा मात्र टुप्पो समातेर 1 मिटर आफूतिर तान्दा बाँकी सबै टुप्पाहरू उही दिशा र परिमाणमा स्थानान्तरण होलान् ?

7. एउटा पुस्तकलाई न्युजप्रिन्ट वा ड्रइङ पेपर माथि राखेर 10 cm अगाडि सार्दा के पुस्तकका बाँकी सबै कुनाहरू उही दिशा र परिमाणमा स्थानान्तरण होलान ? के यो विस्थापन हो ?

परियोजना कार्य

एउटा कागजमा एउटा सिधा रेखा कोर्नुहोस् । उक्त रेखाको माथि एउटा कुनै बिन्दु A लिनुहोस् । अब त्यस बिन्दुलाई तेस्रो रेखामा दायाँतिर 15cm को परिमाणमा विस्थापन गरी प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् । उक्त आकृतिलाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 20 दिशा स्थिति र स्केल ड्रइङ (Bearing and Scale Drawing)

20.0 पुनरवलोकन (Review)

सँगैको कम्पासको चित्रको अवलोकन गरी तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) उक्त उपकरण के कामका लागि प्रयोग गरीन्छ ?

(ख) उपकरणमा भएको N, S, E, W ले के के जनाउँछ ?

(ग) उपकरणमा सियो कुन दिशातिर फर्केको छ ?

(घ) उक्त उपकरणमा कुन दिशालाई आधार दिशा मानिएको हुन्छ ?

(ङ) उपकरणमा भएको NE, SE, SW, NW ले के के जनाउँछ ?

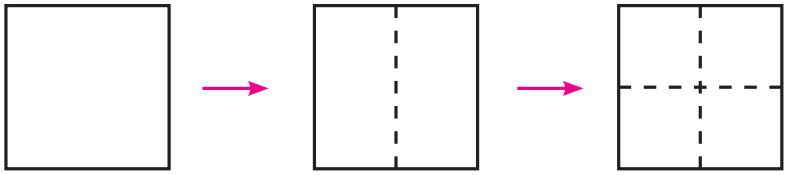
N ⇒ उत्तर (North)	NE ⇒ उत्तर पूर्व (North East)
S ⇒ दक्षिण (South)	SE ⇒ दक्षिण पूर्व (South East)
E ⇒पूर्व (East)	SW ⇒ दक्षिण पश्चिम (South West)
W ⇒ पश्चिम (West)	NW ⇒ उत्तर पश्चिम (North West)

20.1 दिशा स्थिति (Bearing)

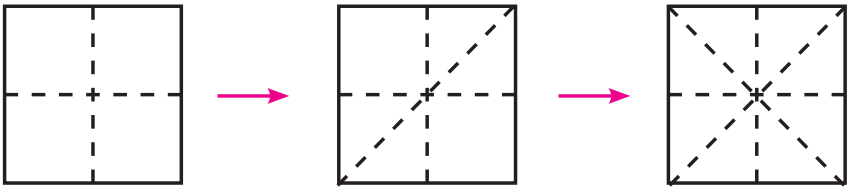
क्रियाकलाप 1

आफ्नो बेन्चमा बसेका साथीहरूको एउटा समूह बनाउनुहोस् ।

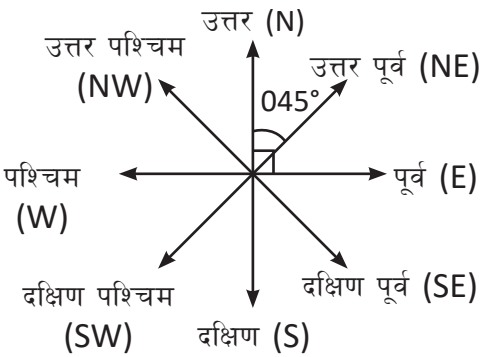
प्रत्येक समूहले एउटा एउटा कागजका पाना लिनुहोस् र चित्रमा देखाए जस्तै गरी पानालाई ठिक बिचबाट दुई पटक पट्याउन्होस् ।



फेरि कुनाबाट उक्त पानालाई दुई पटक पट्याउनुहोस् ।



त्यसपछि पट्याएको भागलाई खोल्नुहोस् र चित्रमा देखाए जस्तै गरी पट्याइएका ठाउँमा बनेका रेखाका छेउमा नामाङ्कन गरी साथीहरूसँग छलफल गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर खोज्नुहोस् :



(क) आफुले बनाएको नमुना (चित्र)मा कतिओटा दिशाहरू छन् ? तिनीहरू के के हुन् ?

(ख) उत्तर पूर्व दिशा देखाउने रेखाले कति डिग्रीको कोण बनाएको छ ?

(ग) उत्तर र उत्तर पूर्व दिशा देखाउने रेखाबिच कति डिग्रीको कोण छ, नाप्नुहोस् ।

(घ) के उत्तर र पश्चिम, पश्चिम र दक्षिण तथा दक्षिण र पूर्व देखाउने रेखाहरूबिच पनि 90° का कोण बनेका छन् ?

(ङ) के उत्तर र उत्तर पश्चिम, पश्चिम र दक्षिण पश्चिम तथा दक्षिण पूर्व देखाउने सबै रेखाहरूले आपसमा 45°/45° का कोण बनाएका छन् ?

कुनै एउटा स्थानमा उत्तर दिशा जनाउने रेखालाई आधार मानेर घडीको सुईको दिशामा कुनै दुई स्थानबिचको दुरीलाई तीन अङ्कमा कोणका रूपमा प्रस्तुत गर्ने तरिकालाई दिशा स्थिति (Bearing) भनिन्छ ।

20.1.1 नक्सा पढाइ (Map reading)

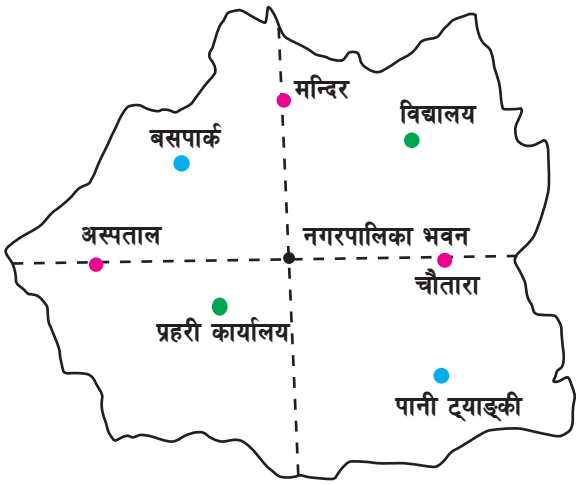
क्रियाकलाप 2

सँगैको चित्रमा कुनै नगरपालिकाका केही स्थानहरू देखाइएको छ । उक्त चित्रलाई कापीमा ट्रेस गर्नुहोस् । नगरपालिका भवनलाई आधार मानी साथीहरूसँग छलफल गरेर निम्नलिखित स्थानहरूको दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(क) विद्यालय (ख) मन्दिर

(ग) बसपार्क (घ) प्रहरी कार्यालय

(ङ) अस्पताल (च) पानी ट्याङ्की

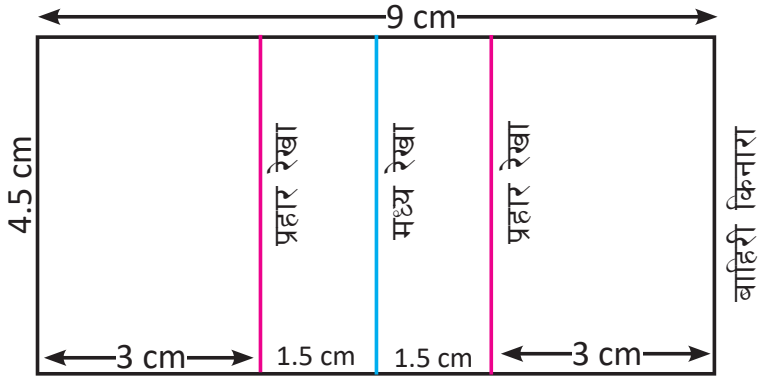


20.2 स्केल ड्रइङ (Scale Drawing)

क्रियाकलाप 3

सबै विद्यार्थीहरू उपयुक्त समूहमा बस्नुहोस् । दिइएको अवस्थाको अध्ययन गरी तलका प्रश्नहरूबारे समूहमा छलफल गर्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

भलिबल कोर्ट



स्केल 1:200 (1 cm = 200 cm)

क्र.स.	रेखाको नाम	नक्साको रेखाको नाप	वास्तविक कोर्टको नाप	वास्तविक कोर्ट र नक्साको नापको अनुपात	निष्कर्ष
1	कोर्टको लम्बाइ	9 cm	18 m	1:200	
2 .	कोर्टको चौडाइ				
3 .	मध्य रेखादेखि प्रहार रेखा-सम्मको दुरी				

- वास्तविक कोर्टको चौडाइ र नक्साको चौडाइको अनुपात कति छ ?
- वास्तविक कोर्टको लम्बाइ र नक्साको लम्बाइको अनुपात कति छ ?
- नक्साको मध्य रेखादेखि प्रहार रेखासम्मको दुरी 6 cm छ भने वास्तविक दुरी कति होला ?
- माथिको भलिबल कोर्टलाई स्केल 1 cm = 1 इन्च लिएर ड्रइङ पेपरमा नक्सा तयार गर्नुहोस् ।
- माथिको छलफलका आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ ?

1. निश्चित स्केलको प्रयोग गरी ज्यादै ठुला र ज्यादै वस्तुलाई रेखाङ्कन गर्न सकिन्छ ।
2. स्केलमा वास्तविक वस्तु र चित्र (नक्सा) खिचेर आवश्यकताअनुसार ठुलो वा सानो नाप लिएर निश्चित अनुपात बनाइन्छ ।
3. निश्चित स्केलको प्रयोग गरी नक्साबाट वस्तुको वास्तविक नाप निकाल्न सकिन्छ ।

उदाहरण 1

1 cm = 500 m को स्केल प्रयोग गरी एउटा नक्सा तयार गर्दा दुई स्थानबिचको नक्साको दुरी 9cm भए उक्त दुई स्थानहरूबिचको वास्तविक दुरी कति होला ?

समाधान

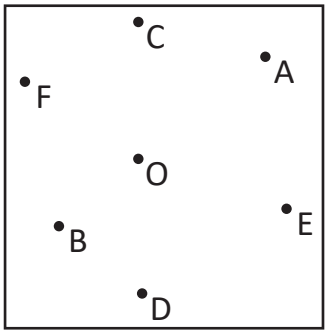
यहाँ स्केल 1 cm = 500 m वास्तविक दुरी

स्केल 9cm = (9 × 500) m = 4500 m

तसर्थ, दुईठाउँ बिचको वास्तविक दुरी= 4500m

अभ्यास 20

1. कक्षाका विद्यार्थीहरू चित्रमा देखाए जस्तै गरी चउरमा उभिएका छन् भने तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

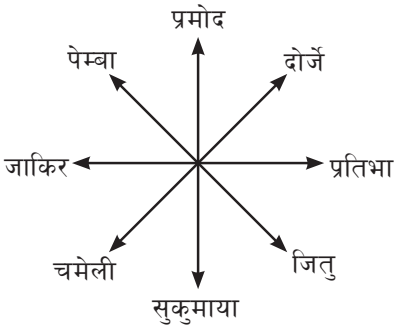


(क) दोर्जे उभिएको स्थानको दिशास्थिति कुन हो ?

(ख) जाकिर उभिएको दिशास्थिति कुन हो ?

(ग) के सुकुमाया र चमेली उभिएको दिशास्थिति मिल्छ ?

2. तल दिइएको चित्रका आधारमा सोधिएका प्रश्नहरूको जवाफ लेख्नुहोस् :



(क) स्थान O बाट बिन्दु A को दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) स्थान O बाट बिन्दु C को दिशा स्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) स्थान O बाट बिन्दु F को दिशा स्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) स्थान O बाट बिन्दु B को दिशा स्थिति पत्ता लगाउनुहोस्

3. नेपालको वास्तविक नक्सा अवलोकन गरी तल सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् :

(क) पोखराबाट नेपालगन्जको दिशास्थिति लेख्नुहोस् ।

(ख) काठमाडौँबाट मनाङको दिशास्थिति लेख्नुहोस् ।

(ग) जनकपुरबाट ताप्लेजुङको दिशास्थिति लेख्नुहोस् ।

4. तलका प्रश्नहरूमा दुई स्थान बिचको वास्तविक दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) दुई स्थानबिचको नक्साको दुरी = 9 cm [स्केल 1 cm = 200m]

(ख) दुई स्थानबिचको नक्साको दुरी = 3.5 cm, [स्केल 1 cm = 500 ft]

(ग) घण्टाघर र घडीअर्वा पोखरीबिचको नक्साको दुरी = 5.3 cm, [स्केल 1 cm = 1000 m]

5. एउटा चउरको वास्तविक लम्बाइ 125 m र 75 m छ । 1 cm : 10 cm को अनुपात लिएर चउरको रेखाङ्कन गर्नुहोस् ।

6. 1cm ले वास्तविक 2 फिट जनाउने गरी 20 ft लम्बाइ र 18 ft चौडाइ भएको कक्षाकोठाको चित्र बनाएर देखाउनुहोस् ।

7. चित्रमा दिइएको बिजुलीको खम्बा 1:100 cm को स्केलमा बनाइएको छ । रुलरले नापेर खम्बाको वास्तविक उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. विद्यालयको चउरमा गएर प्रश्न न. १ को चित्रमा देखाए जस्तै गरी प्रत्येक दिशामा एक एक जना साथीहरू उभिएर दिशा स्थिति पत्ता लगाउनुहोस् । प्रत्येक साथीलाई दिशास्थितिको नामले बोलाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

नेपालको नक्सा लिएर कुनै प्रदेशको सदरमुकामलाई केन्द्र मानी आठओटा दिशा (N, S, E, W, SE, SW, NW, NE) मा पर्ने एक एकओटा स्थानको नाम लेख्नुहोस् ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास

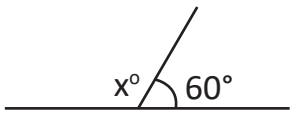
1. आसन्न कोण (Adjacent angles) को परिभाषा लेख्नुहोस् ।

2. कम्पासको प्रयोग गरेर तल दिइएका कोणहरू खिच्नुहोस् :

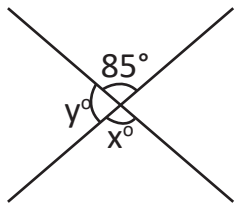
(क) 105^0 (ख) 135^0 (ग) 150^0

3. दिइएका चित्रका आधारमा x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)

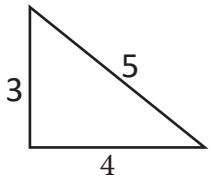


(ख)

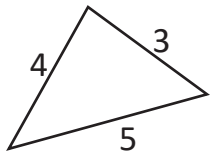


4. तलका चित्रहरूमध्ये कुन कुन आकृतिहरू अनुरूप छन्, छुट्याउनुहोस् :

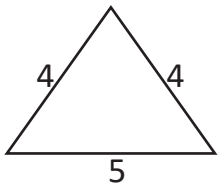
(क)



(ख)



(ग)



5. तपाइका घर समुदायमा पाइने कुनै पाँचओटा अनुरूप आकृतिहरूका नाम लेख्नुहोस् ।

6. तलका प्रत्येक बिन्दुहरूलाई लेखाचित्र बनाई अङ्कन गर्नुहोस् । प्रत्येक बिन्दुलाई क्रमशः जोड्दै जानुहोस् । यसरी बन्ने आकृतिको नाम पनि लेख्नुहोस् ।

A(-4,2), B(4, 3), C(2, -5)

7. एउटा त्रिभुज PQR को रचना गर्नुहोस जसमा PQ = PR = 4 cm र QR = 5 cm छ ।

8. यदि एउटा आयतको लम्बाइ 3 cm र चौडाइ 4 cm छ भने उक्त आयतको विकर्णको लम्बाइ कति होला ?

9. 1 cm ले वास्तविक 10 m जनाउने गरी 90 m लम्बाइ र 45 m चौडाइ भएको फुटबल मैदानको चित्र बनाउनुहोस् ।

10. तलका अङ्कहरूमध्ये कुन कुन अङ्कहरूमा रेखीय सममिति छन् र किन, पत्ता लगाउनुहोस् ।

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

11. रेखीय सममिति हुने अङ्ग्रेजी अक्षरहरूमध्ये V मा एकओटा र H मा दुईओटा रेखा सममितिका अक्ष हुन्छन् । यस्तै अरू रेखीय सममिति हुने अङ्ग्रेजी अक्षरहरू पत्ता लगाई सूची तयार पार्नुहोस् ।

12. तलका भनाइहरू ठिक छन् वा छैनन्, छुट्याउनुहोस् :

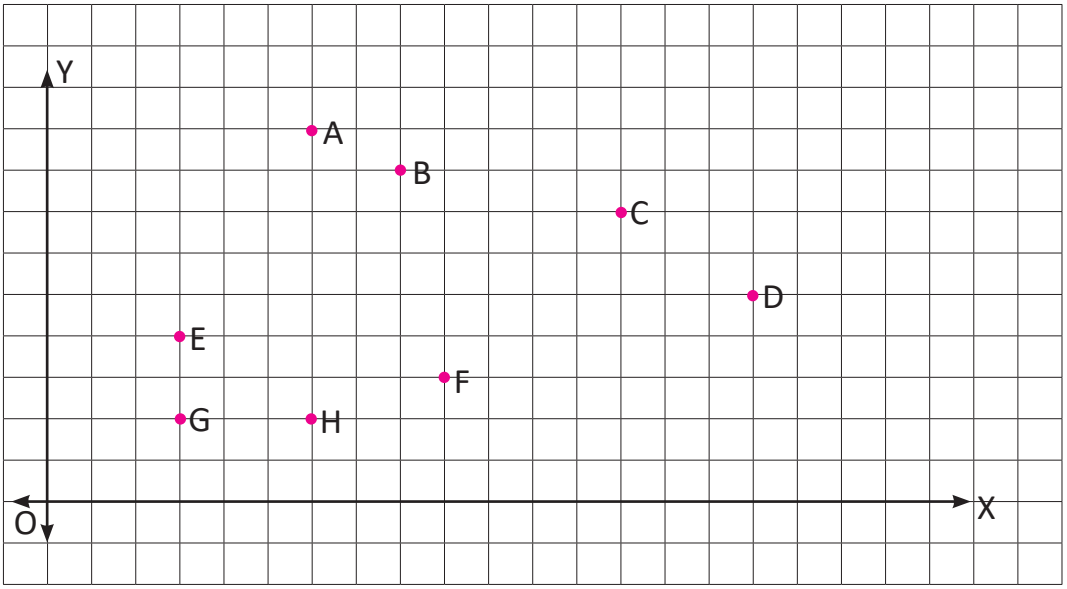
(क) वर्गका सबै गुणहरू आयतमा पनि हुन्छन् ।

(ख) वर्गका दुबै विकर्णहरू आपसमा बराबर हुन्छन् ।

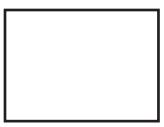
(ग) आयतका सबै गुणहरू समानान्तर चतुर्भुजमा हुन्छन् ।

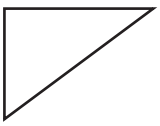
(घ) समबाहु चतुर्भुजका सबै गुणहरू आयतका गुणसँग मिल्छ ।

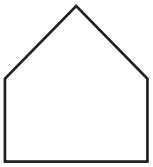
13. तल दिइएका बिन्दुहरूको निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् :

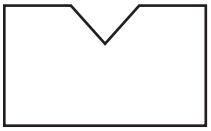


14. तलका प्रत्येक चित्रमा रेखीय सममितिको अक्षहरू खिच्नुहोस् र रेखीय सममितिका अक्षहरूको सङ्ख्या पनि लेख्नुहोस् :

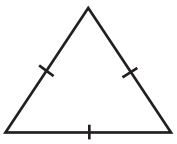
(क)


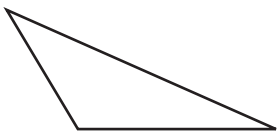
(ख)


(ग)


(घ)


(ङ)

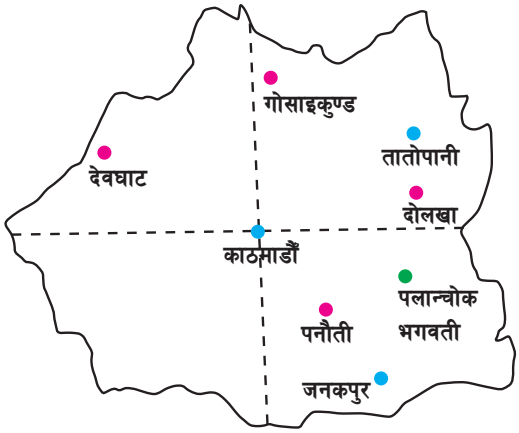
(च)


(छ)


15. एउटा गाडी T स्थानबाट 200 km पूर्वको स्थान S मा पुगेको छ । गाडीले S बाट अर्को पश्चिममा पर्ने स्थान U मा 300 km को यात्रा गरेछ । यो जानकारीलाई स्केल ड्रइङ गरी निम्नलिखित कुरा पत्ता लगाउनुहोस् ::

(क) T बाट U सम्मको दुरी (ख) U बाट T सम्मको दिशास्थिति

16. सँगैको चित्रमा केही स्थानहरू देखाइएको छ । चित्रलाइ अभ्यास पुस्तिकामा ट्रेस गरी र काठमाडौँलाई आधार मानी निम्नलिखित स्थानहरूको दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।



(क) गोसाइकुण्ड

(ख) तातोपानी

(ग) देवघाट

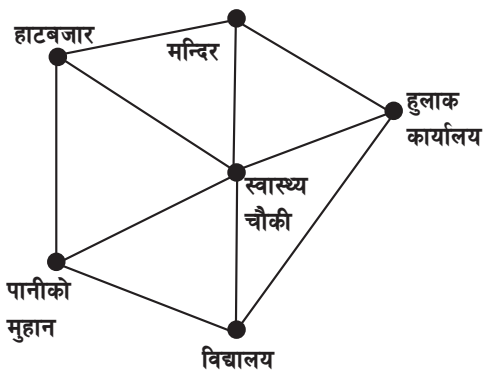
(घ) दोलखा

(ङ) पलान्चोक भगवती

(च) पनौती

(छ) जनकपुर

17. चित्रमा एउटा गाउँको मुख्य ठाउँहरू देखाइएको छ । यदि स्केल 1 cm = 100 m भए रुलर प्रयोग गरी स्वस्थ्य चौकीबाट निम्नलिखित ठाउँहरूको वास्तविक दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :



(क) मन्दिर

(ख) पानीको मुहान

(ग) विद्यालय (घ) हाटबजार

(ङ) हुलाक कार्यालय

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 21 तथ्याङ्कको प्रस्तुतीकरण (Presentation of Data)

21.0 पुनरवलोकन (Review)

एउटा पुस्तक पसलमा एक महिनामा प्रत्येक दिन बिक्री भएका पुस्तकको सङ्ख्यात्मक विवरण यसप्रकार छ :

13,	14,	13,	16,	18,	20
13,	25,	10,	18,	12,	10
28,	25,	12,	15,	17,	15
25,	24,	20,	10,	25,	18
20,	22,	18,	15,	13,	20

माथिको जानकारीलाई तलको जस्तै तालिका बनाएर भरी तालिका पूरा गर्नुहोस् ।

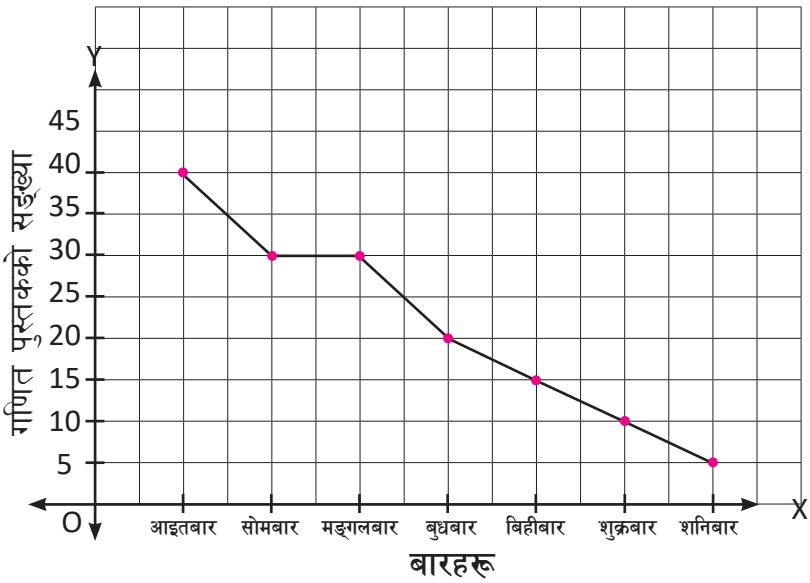
पुस्तकको सङ्ख्या	मिलान चिह्न	बारम्बारता	सञ्चित बारम्बारता
13	....	4	4
14		1	4 + 1 = 5

माथिको तालिकालाई कस्तो तालिका भनिन्छ, साथीहरूबिच छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

21.1 रेखाचित्र (Line Graph)

क्रियाकलाप 1

एउटा पुस्तक बिक्रेताले एक हप्तामा बिक्री गरेका गणित विषयको पाठ्यपुस्तकहरूको सङ्ख्यालाई डोल्माले निम्न रेखाचित्रमा प्रस्तुत गरीन् । दिइएको रेखाचित्रको अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गर्नुहोस् :



(क) सोमबार कतिओटा गणित पुस्तक बिक्री भएछ ?

(ख) शुक्रबार कतिओटा गणित पुस्तक बिक्री भएछ ?

(ग) कुन कुन बार बराबर सङ्ख्यामा गणित पुस्तक बिक्री भएछ ?

(घ) कुन बार सबैभन्दा बढी गणित पुस्तक बिक्री भएछ ?

दिइएका चर मूल्य र त्यसको बारम्बारतालाई ग्राफमा अङ्कित गरी क्रमशः सिधा रेखाहरूले जोड्दा बन्ने चित्रलाई रेखाचित्र (Line Graph) भनिन्छ ।

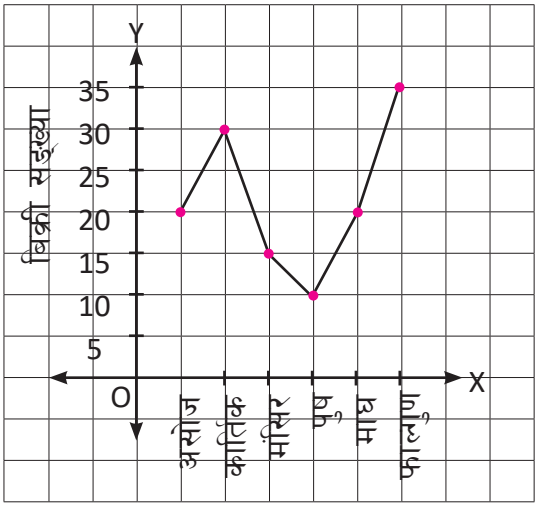
रेखाचित्र बनाउँदा अपनाउनुपर्ने चरणहरू

1. दिइएको तथ्याङ्कलाई तालिकामा राख्नुपर्छ ।
2. बारम्बारतालाई Y – अक्षमा र चर मूल्य (परिमाण) लाई X – अक्षमा राख्नुपर्छ ।
3. उपयुक्त स्केलको छनोट गर्नुपर्छ ।
4. बिन्दुहरूलाई ग्राफमा प्रस्तुत गरी प्रत्येक बिन्दुलाई रेखाखण्डले जोड्नुपर्छ ।

उदाहरण 1

एउटा मोबाइल पसलमा छ महिनामा बिक्री भएको मोबाइलको विवरण तलको रेखाचित्रमा देखाइएको छ । उक्त रेखाचित्रको अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

मोबाइलको बिक्री विवरण



(क) कुन महिनामा सबैभन्दा बढी मोबाइल बिक्री भएको छ ?

(ख) कुन महिनामा सबैभन्दा कम मोबाइल बिक्री भएको छ ?

(ग) असोज महिनामा कओटा मोबाइल बिक्री भएको रहेछ ?

(घ) प्रस्तुत रेखाचित्रलाई बारम्बारता तालिकामा देखाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ,

दिइएको रेखाचित्रका आधारमा माथि दिइएका प्रश्नहरूका उत्तर यसप्रकार छन् ?

(क) फाल्गुण महिनामा सबैभन्दा बढी (35 ओटा) मोबाइल बिक्री भएको छ ।

(ख) पुस महिनामा सबैभन्दा कम 10 ओटा मोबाइल बिक्री भएको छ ।

(ग) असोज महिनामा 20 ओटा मोबाइल बिक्री भएको छ ।

महिना	असोज	कार्तिक	मङ्सिर	पुस	माघ	फाल्गुण
मोबाइल सङ्ख्या	20	30	15	10	20	35

उदाहरण 2

वर्षायाममा कुनै ठाउँमा लगातार छ दिनसम्म परेको वर्षाको मापन यसप्रकार छ :

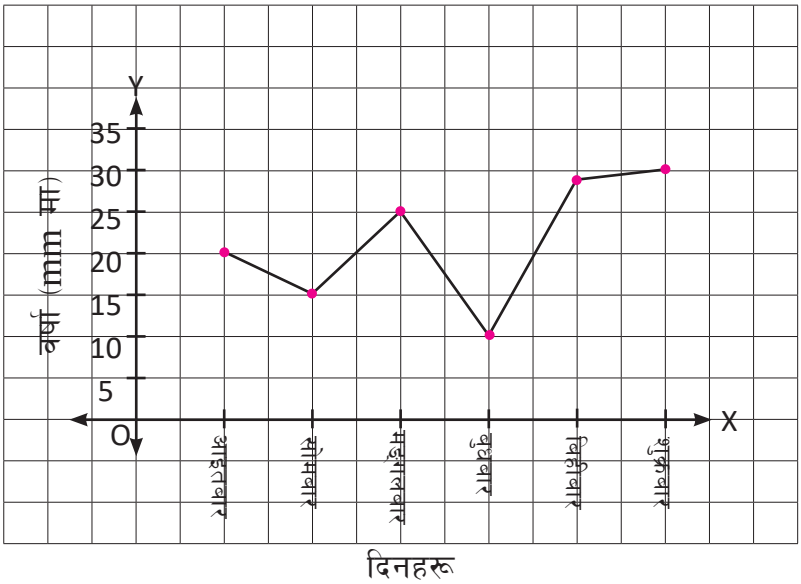
दिन	आइतबार	सोमबार	मङ्गलबार	बुधबार	बिहीबार	शुक्रबार
वर्षा	20 mm	15 mm	25 mm	10 mm	28 mm	30 mm

माथिको तथ्याङ्कलाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

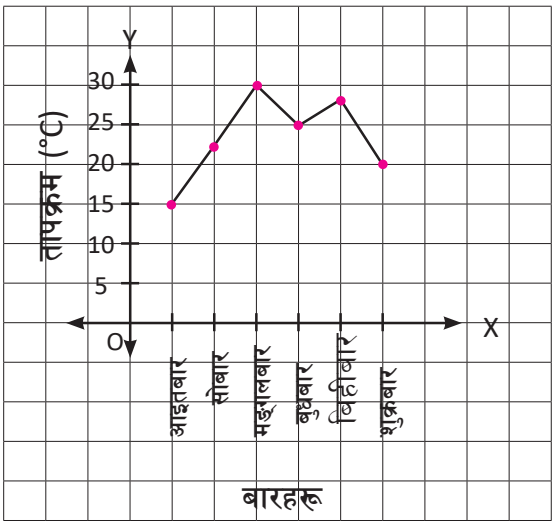
यहाँ समयलाई X – अक्षमा र वर्षालाई Y – अक्षमा राखी रेखाचित्र खिच्दा,

६ दिनको वर्षा विवरण



अभ्यास 21.1

1. **दिइएका रेखाचित्रमा काठमाडौँको ६ दिनको तापक्रम विवरण देखाइएको छ । यसको अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् ।**



(क) कुन बार सबभन्दा बढी तापक्रम रहेछ ?

(ख) कुन बार सबभन्दा कम तापक्रम रहेछे ?

(ग) बुधबारको तापक्रम कति रहेछ ?

(घ) दिइएको रेखाचित्रलाई बारम्बारता तालिकामा देखाउनुहोस् ।

2. **शारदा आधारभूत विद्यालयको कक्षा 7 मा विगत 6 वर्षको भर्नादर यसप्रकार छ :**

वर्ष	2074	2075	2076	2077	2078
भर्नादर	20	26	18	14	12

दिइएको आँकडालाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

3. **कक्षा 7 का विद्यार्थीलाई कोभिड–19 बाट बच्न कुन कुन सुरक्षाका साधनहरू प्रयोग गर्नुपछ भनी सोधिएको प्रश्नमा प्रतिक्रिया यसप्रकार पाइयो :**

साधन	मास्क	सेनिटाइजर	फेससिल्ड	पन्जा	साबुन
विद्यार्थी सङ्ख्या	30	22	18	8	25

माथिको जानकारीलाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4. **तलका बारम्बारता तालिकाहरूलाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :**

(क)

कक्षा	1	2	3	4	5	6	7
विद्यार्थी सङ्ख्या	26	24	28	40	35	45	50

(ख)

परिमाण (kg)	2	4	6	9	12
मूल्य (रु.)	500	1000	1500	2250	3000

5. विद्यालयमा एक दिन बिहान १०:०० बजेदेखि ४:०० बजेसम्म 2/2 घण्टाको फरकमा थर्मोमिटरले तापक्रम नापेर रेखाचित्र बनाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

रेडियो, टेलिभिजन वा पत्रपत्रीकालगायतका अन्य विभिन्न माध्यमहरूबाट एक हप्तासम्मका तापक्रमको टिपोट गर्नुहोस् र त्यसलाई रेखाचित्रमा देखाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

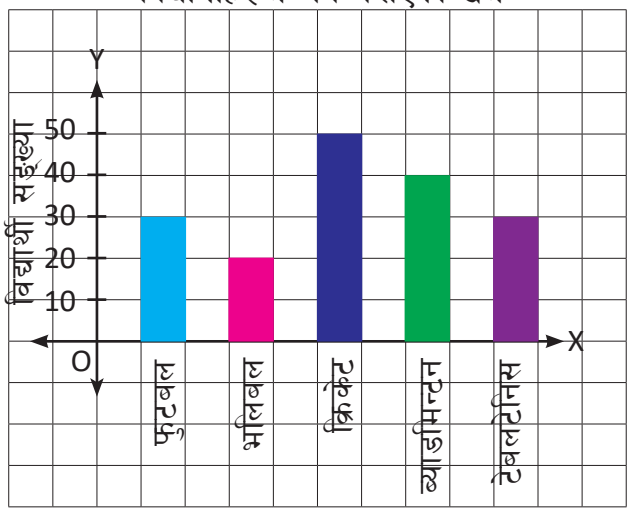
उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

21.2 बहुस्तम्भ चित्र (Multiple Bar Diagram)

कक्षाका विद्यार्थीहरूलाई कुन खेल बढी मन पराउनुहुन्छ भनी सोधिएका प्रश्नमा प्राप्त प्रतिक्रियाअनुसार तयार गरीएको स्तम्भ चित्र दिइएको छ । उक्त स्तम्भ चित्रको अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गर्नुहोस् :

विद्यार्थीहरूले मन पराएको खेल



खेलहरू

(क) दिइएको स्तम्भ चित्र कस्तो स्तम्भ चित्र हो ?

(ख) सबैभन्दा बढी विद्यार्थीले मन पराएको खेल कुन हो ?

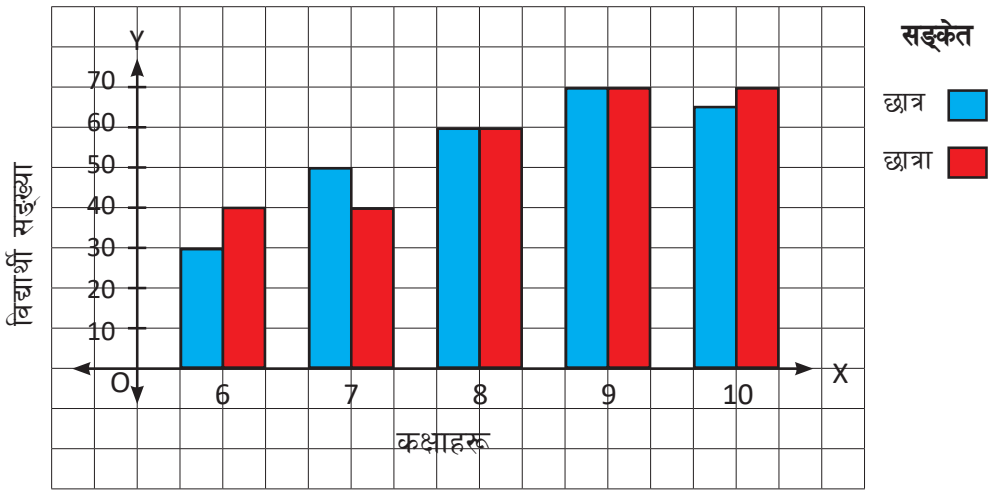
(ग) सबैभन्दा थोरै विद्यार्थीले मन पराएको खेल कुन हो ?

(घ) कति जना विद्यार्थीले क्रिकेट खेल मन पराउँदा रहेछन् ?

क्रियाकलाप 1

सरस्वती माध्यमिक विद्यालयका कक्षा 6 देखि 10 सम्मका विद्यार्थीहरूको छात्र र छात्रा सङ्ख्यालाई तलको स्तम्भ चित्रमा प्रस्तुत गरीएको छ । साथीसँग छलफल गरी सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर खोज्नुहोस् :

श्री सरस्वती मा. वि.का विद्यार्थी विवरण



(क) सबभन्दा बढी र सबभन्दा कम विद्यार्थीहरू कुन कुन कक्षामा रहेछन् ?

(ख) कुन कुन कक्षामा छात्रभन्दा छात्रा बढी रहेछन् ?

(ग) कुन कुन कक्षामा छात्राभन्दा छात्र बढी रहेछन् ?

(घ) कुन कुन कक्षामा छात्र र छात्रा बराबर रहेछन् ?

(ङ) यो कस्तो स्तम्भ चित्र हो ?

- एकभन्दा बढी आपसमा सम्बन्धित सूचना तथा तथ्याङ्कहरूलाई प्रस्तुत गरीएको स्तम्भ चित्रलाई बहुस्तम्भ चित्र (Multiple Bar Diagram) भनिन्छ ।
- बहुस्तम्भ चित्रको निर्माण गर्दा साधारण स्तम्भ चित्रमा जस्तै प्रत्येक स्तम्भको चौडाइ बराबर हुनुपर्छ ।
- बहुस्तम्भ चित्रको उचाइले सङ्ख्या जनाउँछ ।

उदाहरण 1

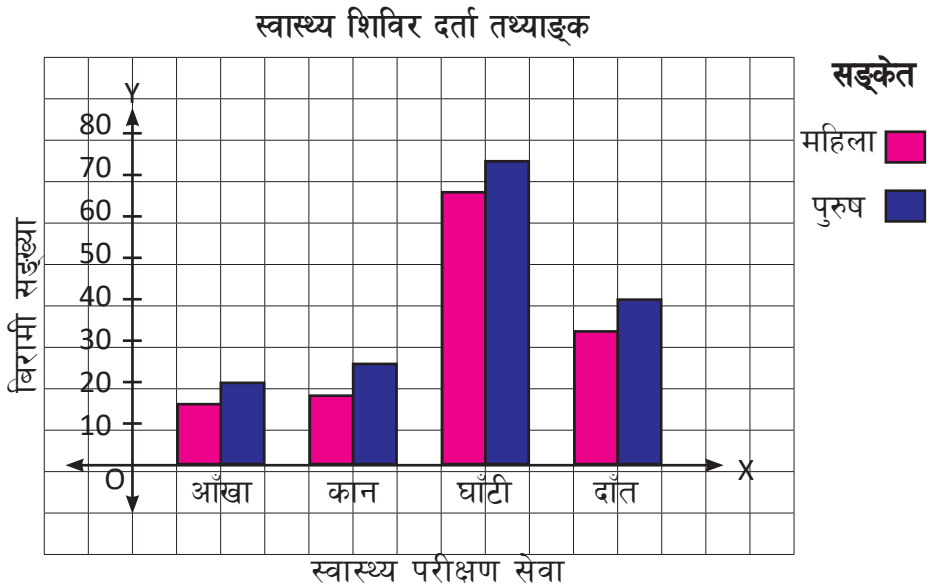
नगर सुधार समितिको आयोजनामा सञ्चालन भएको आँखा, कान, घाँटी र दाँत परीक्षण शिविरमा दर्ता भई स्वास्थ्य परीक्षण गराउने व्यक्तिहरूको तथ्याङ्क यसप्रकार पाइयो ।

स्वास्थ्य परीक्षण सेवा	आँखा		कान		घाँटी		दन्त	
परीक्षण	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष
सङ्ख्या	15	20	17	22	65	73	32	40

उक्त तथ्याङ्कको बहुस्तम्भ चित्रलाई ग्राफमा देखाउनुहोस् ।

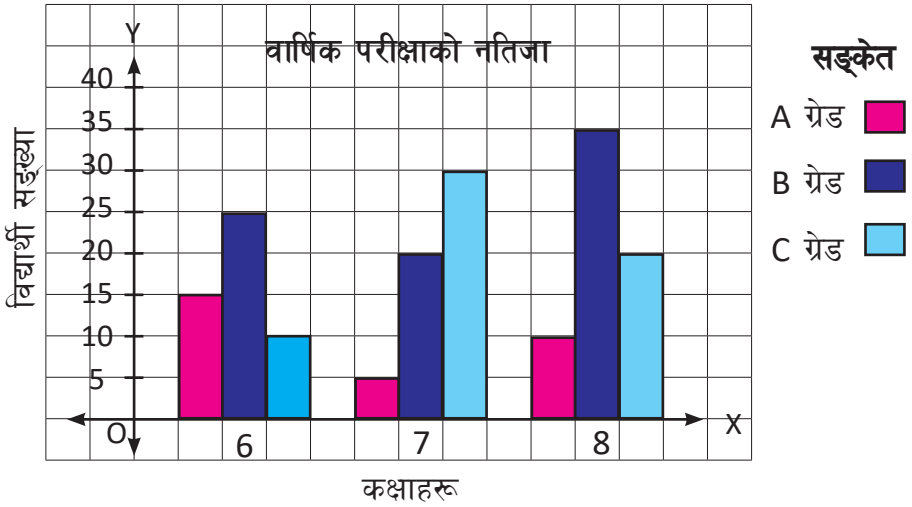
समाधान

यहाँ सानो कोठा बराबर एक जना व्यक्ति मानेर बहुस्तम्भ चित्र बनाउँदा,



उदाहरण 2

एउटा विद्यालयको कक्षा 6 देखि 8 सम्मको वार्षिक परीक्षाको नतिजा तलको बहुस्तम्भ चित्रमा प्रस्तुत गरीएको छ । उक्त स्तम्भ चित्रका आधारमा तलका प्रश्नको उत्तर लेख्नुहोस् ।



(क) कक्षा 8 मा कति जनाले ग्रेड A ल्याएका रहेछन् ?

(ख) कक्षा 6 देखि 8 सम्म कति जनाले ग्रेड B रहेछन् ?

(ग) कुन कक्षामा सबै भन्दा बढी विद्यार्थीले ग्रेड A रहेछन् ?

(घ) कुन कक्षामा सबै भन्दा कम विद्यार्थीले ग्रेड C रहेछन् ?

समाधान

यहाँ दिइएको बहुस्तम्भ चित्रका आधारमा माथि दिइएका प्रश्नको उत्तर यस प्रकार छ :

(क) कक्षा 8 मा 10 जनाले ग्रेड A ल्याएका रहेछन् ।

(ख) कक्षा 6 देखि 8 सम्म ग्रेड B ल्याउने विद्यार्थीको सङ्ख्या = 25 + 30 + 35 = 90 जना

(ग) कक्षा 7 मा सबैभन्दा बढी विद्यार्थीले ग्रेड A ल्याएका रहेछन् ।

(घ) कक्षामा 6 मा सबैभन्दा कम विद्यार्थीले ग्रेड C ल्याएका रहेछन् ।

अभ्यास 21.2

1. तलको तथ्याङ्कलाई बहुस्तम्भ चित्रमा देखाउनुहोस् :

(क)

दिनहरू	आइतबार		सोमबार		मङ्गलबार		बुधबार		विहीबार		शुक्रबार	
बिक्री परिमाण (किलोग्राममा	माछा	मासु	माछा	मासु	माछा	मासु	माछा	मासु	माछा	मासु	माछा	मासु
	10	18	15	12	17	20	19	22	20	25	27	20

(ख)

विद्यालय	A		B		C		D		E	
विद्यार्थीहरू	छात्र	छात्रा	छात्र	छात्रा	छात्र	छात्रा	छात्र	छात्रा	छात्र	छात्रा
	250	210	125	175	310	350	425	400	520	550

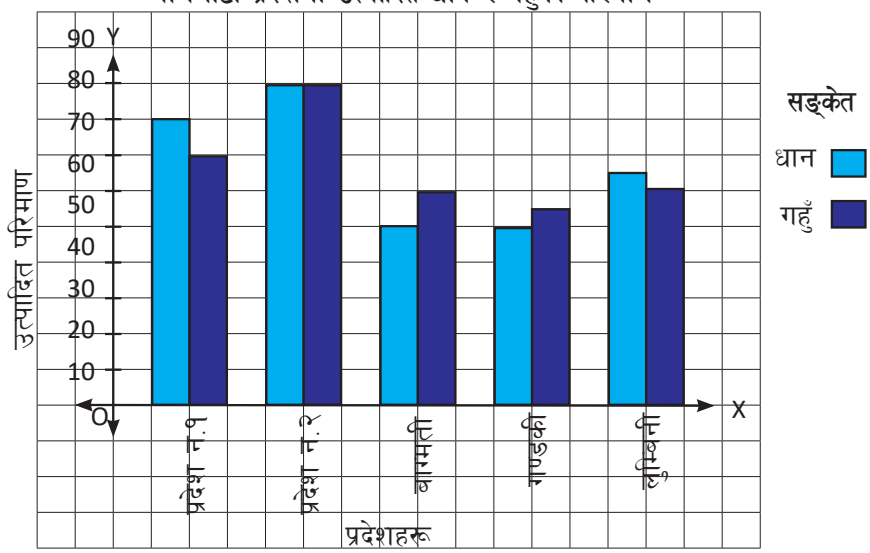
2. कुनै विद्यालयमा विद्यार्थीहरू जाँदा सवारी साधन प्रयोग गरी तथा हिँडेर आउने गरेको विवरण यस प्रकार छ :

विद्यालय आउने साधन	हिँडेर		बस		मोटरसाइकल		साइकल	
विद्यार्थी सङ्ख्या	छात्र	छात्रा	छात्र	छात्रा	छात्र	छात्रा	छात्र	छात्रा
	25	30	40	45	20	15	55	60

माथिको तथ्याङ्कलाई बहुस्तम्भ चित्रमा देखाउनुहोस् ।

3. दिइएको बहुस्तम्भ चित्रमा नेपालको पाँचओटा प्रदेशमा उत्पादन हुने धान र गहुँको परिमाण (हजार मेट्रिकटनमा) दिइएको छ । उक्त बहुस्तम्भ चित्रको अवलोकन गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् :

पाँचओटा प्रदेशमा उत्पादित धान र गहुँको परिमाण



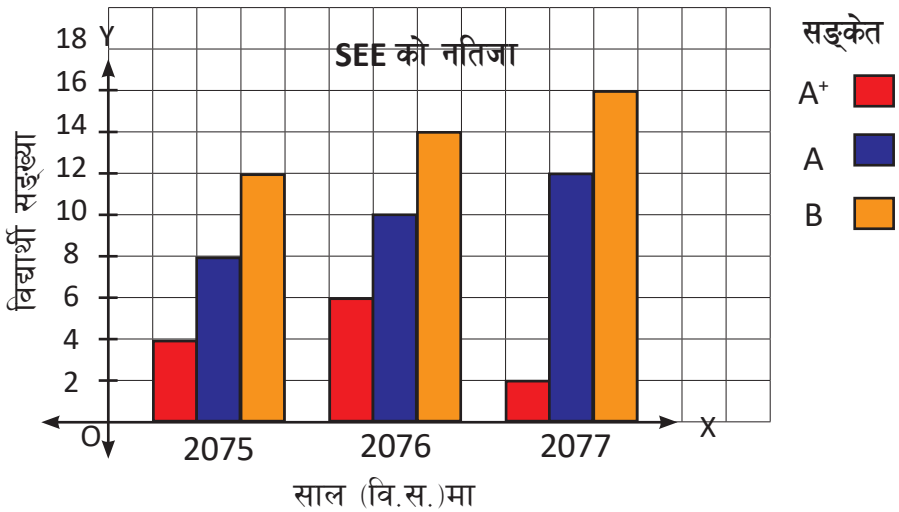
(क) कुन प्रदेशमा सबैभन्दा बढी धानको उत्पादन परिणाममा भएको रहेछ ?

(ख) कुन प्रदेशमा सबैभन्दा बढी गहुँको उत्पादन भएको रहेछ ?

(ग) कुन प्रदेशमा बराबर परीणामा धान र गहुँको उत्पादन भएको रहेछ ?

(घ) कुन कुन प्रदेशमा सबभन्दा कम धानको उत्पादन भएको रहेछ ?

4. एउटा विद्यालयको तीन वर्षको एस.इ.इ को नतिजा तलको बहुस्तम्भ चित्रमा प्रस्तुत गरीएको छ । उक्त स्तम्भ चित्रका आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् :



(क) वि. स. 2075 मा कति जना विद्यार्थीहरूले ग्रेड A^+ ल्याएका रहेछन् ?

(ख) वि. स. 2076 मा कति जना विद्यार्थीहरूले ग्रेड A ल्याएका रहेछन् ?

(ग) कुन सालमा सबैभन्दा बढी विद्यार्थीहरूले ग्रेड A^+ ल्याएका रहेछन् ?

(घ) कुन सालमा सबैभन्दा कम विद्यार्थीहरूले ग्रेड B ल्याएका रहेछन् ?

परियोजना कार्य

तपाईंको विद्यालयमा भएका जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या, छात्र सङ्ख्या र छात्रा सङ्ख्या सङ्कलन गरी बहुस्तम्भ चित्र बनाउनुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

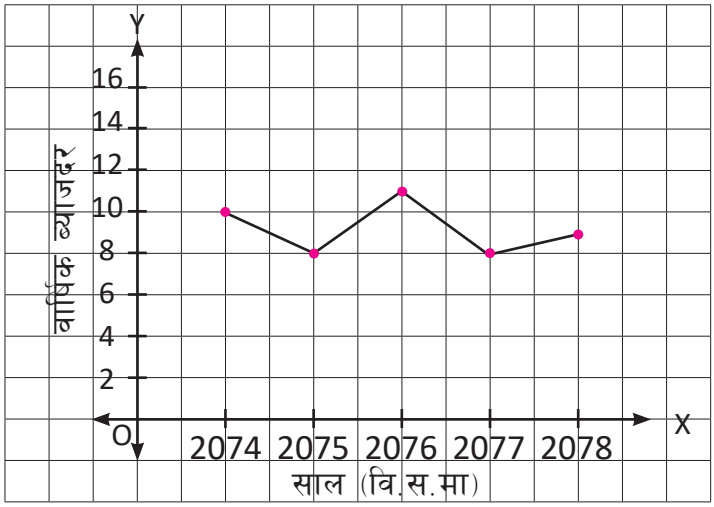
मिश्रित अभ्यास

1. कुनै सहरको वैशाख महिनाको एक हप्ताको अधिकतम तापक्रम निम्नलिखित तालिकामा दिइएको छ। उक्त तथ्याङ्कका आधारमा स्तम्भचित्र बनाउनुहोस्।

गते	अधिकतम तापक्रम (°Cमा)
16	35.5
17	37
18	36
19	32
20	30
21	33
22	34.5

2. कुनै बैङ्कले मुद्धति खातामा रकम जम्मा गर्ने खातावालालाई दिएको ब्याजदरलाई तलको रेखाचित्रमा देखाइएको छ। उक्त रेखाचित्रका आधारमा निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस्।

खातावालालाई दिएको वार्षिक ब्याजदरको विवरण



(क) कुन वर्षको ब्याजदर सबभन्दा बढी छ ?

(ख) कुन वर्षको ब्यादर सबभन्दा कम छ ?

(ग) कुन कुन वर्षको ब्याजदर बराबर छन् ?

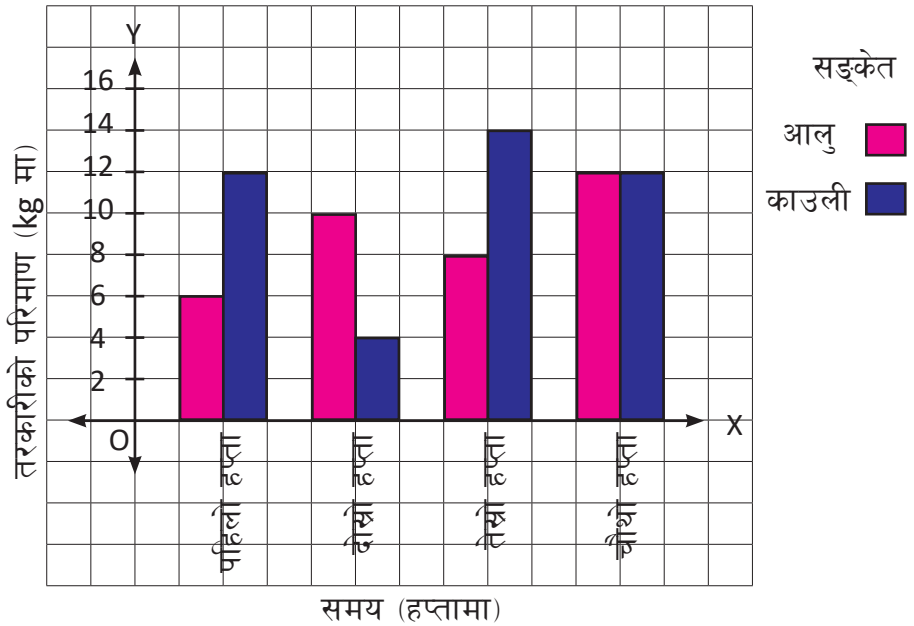
3. **कुनै गाउँको पाँच वर्षको महिला र पुरुषको जनसङ्ख्या निम्नानुसार रहेको छ :**

साल (वि.स)	2073		2074		2075		2076		2077	
जनसङ्ख्या	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष
	12	11	13	14	14	15	17	13	17	11

उक्त तथ्याङ्ककलाई बहुस्तम्भ चित्रमा देखाउनुहोस् ।

4. **एउटा तरकारी पसलमा चार हप्तामा बिक्री भएको आलु र काउलीको विवरणलाई निम्न बहुस्तम्भ चित्रमा देखाइएको छ । उक्त बहुस्तम्भ चित्रका आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् ।**

आलु र काउलीको बिक्री विवरण



(क) पहिलो हप्तामा कति किलोग्राम आलु बिक्री भएको रहेछ ?

(ख) कुन हप्तामा आलु र काउली बराबर परिमाणमा बिक्री भएको रहेछ ?

(ग) सबभन्दा बढी कुन हप्तामा बिक्री भएको रहेछ ?

(घ) सबभन्दा कम आलु कुन हप्तामा विक्री भएको रहेछ ?

(ङ) चौथो हप्तामा कति कति आलु र काउली बिक्री भएको रहेछ ?