गणित

कक्षा ७

नेपाल सरकार

शिक्षा ,विज्ञान तथा प्रविधी मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमि, भक्तपुर

गणित

कक्षा ७

प्रकाशक

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

प्रकाशक

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

© सर्वाधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

यस पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी सम्पूर्ण अधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र सानोठिमी, भक्तपुरमा निहित रहेको छ । पाठ्यक्रम विकास केन्द्रको लिखित स्वीकृतिबिना व्यापारिक प्रयोजनका लागि यसको पुरै वा आंशिक भाग हुबहु प्रकाशन गर्न, परिवर्तन गरेर प्रकाशन गर्न, कुनै विद्युतीय साधन वा अन्य प्रविधिबाट रेकर्ड गर्न र प्रतिलिपि निकाल्न पाइने छैन ।

प्रथम संस्करण : वि.सं. २०७१

परिमार्जित दोस्रो संस्करण : वि.सं २०७६

मुद्रण: जनक शिक्षा सामग्री केन्द्र लि.
सानोठिमी, भक्तपुर ।

मूल्य रु.

पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी पाठकहरूका कुनै पनि प्रकारका सुझावहरू भएमा पाठ्यक्रम विकास केन्द्र, समन्वय तथा प्रकाशन शाखामा पठाइदिनुहुन अनुरोध छ । पाठकहरूबाट आउने सुझावहरूलाई केन्द्र हार्दिक स्वागत गर्दछ । तपाइँले किनेको पाठ्यपुस्तकमा कुनै त्रुटि भएमा नजिकको वितरकबाट उक्त पुस्तक साट्न सक्नुहुने छ ।

हाम्रो भनाइ

शिक्षालाई उद्देश्यमूलक, व्यावहारिक र समसामयिक बनाउन पाठ्यक्रम विकास केन्द्रले विद्यालय तहका पाठ्यक्रमतथा पाठ्यपुस्तक विकास तथा परिमार्जन गर्ने कार्यलाई निरन्तरता दिँदै आएको छ । विद्यार्थीमा राष्ट्रप्रेम, राष्ट्रियता प्रतिको समर्पण र लोकतान्त्रिक पद्धतिलाई आत्मसात् गर्ने भावनाको विकास गराई नैतिकवान्, अनुशासित, स्वावलम्बी तथा सिर्जनशील भई समावेशी समाज निर्माणमा योगदान दिन सक्ने क्षमता विकास हुन आवश्यक छ ।उनीहरूमा भाषिक तथा गणितीय सिपका साथै विज्ञान, सूचना तथा सञ्चार प्रविधि, वातावरण, स्वास्थ्य तथा जनसङ्ख्यासम्बन्धी आधारभूत ज्ञान तथा जीवनोपयोगी सिपको विकास हुन जरुरी छ । त्यसै गरी विद्यार्थीहरूमा कला तथा सौन्दर्य प्रतिको अनुराग र मानवीय मूल्य मान्यता, आदर्श तथा वैशिष्ट्यहरूप्रतिको सचेतता सहित तिनको संरक्षण, संवर्धन गर्ने भावनाको विकास आवश्यक छ । समता मूलक समाजको निर्माणमा सहयोग पुऱ्याउन उनीहरूमा विभिन्न जातजाति, लिङ्ग, भाषा, धर्म, संस्कृति र क्षेत्रलगायतका विविधताहरूको सम्मान गर्ने र मानव अधिकार तथा समाजिक मूल्य मान्यता प्रति सचेत भई जिम्मेवारी वहन गर्ने भावनाको विकास गराउनु आवश्यक छ । उल्लिखित आवश्यकतालाई दृष्टिगत गरी आधारभूत शिक्षा पाठ्यक्रम (कक्षा ६-८), २०६९ लाई मूल आधारमानी शिक्षासम्बन्धी विभिन्न आयोगका सुझाव, शिक्षक, विद्यार्थी तथा अभिभावकलगायत शिक्षासँग सम्बद्ध विभिन्न व्यक्ति सम्मिलित गोष्ठी र अन्तरक्रियाका निष्कर्ष र विभिन्न विद्यालयमा परीक्षण गरी प्राप्त पृष्ठपोषण समेतलाई समेटी यो पाठ्यपुस्तक तयार पारिएको हो ।

पाठ्यपुस्तकलाई यस स्वरूपमा ल्याउने कार्यमा पाठ्यक्रम विकास केन्द्रका कार्यकारी निर्देशक दिवाकर ढुङ्गेल तथा डा. मीनबहादुर श्रेष्ठ, डा. लेखनाथ शर्मा, डा. बालकृष्ण रञ्जित, डण्डपाणि शर्मा, हेमराज पोखरेल, वैकुण्ठ खनाल, वरुण वैद्य, विजय बानिया, गोमा श्रेष्ठ, जीवराज आचार्य, रमेशप्रसाद अवस्थी, राजेन्द्र देवकोटा र मैना अधिकारीको विशेष योगदान रहेको छ । यसको भाषा सम्पादन हरिप्रसाद निरौला, कला सम्पादन श्रीहरि श्रेष्ठ तथा लेआउट डिजाइन जयराम कुइँकेलबाट भएको हो । पाठ्यपुस्तकलाई अध्यावधिक तथा परिमार्जन गरी प्रकाशित गर्न कार्यमा यस केन्द्रका महानिर्देशक डा. लेखनाथ पौडेल, श्री गणेशप्रसाद भट्टराई र श्री चिनाकुमारी निरौलाको योगदान रहेको छ । यस पाठ्यपुस्तकको विकास तथा परिमार्जन कार्यमा संलग्न सबैप्रति पाठ्यक्रम विकास केन्द्र धन्यवाद प्रकट गर्दछ ।

पाठ्यपुस्तकलाई शिक्षण सिकाइको महत्त्वपूर्ण साधनका रूपमा लिइन्छ । यस पाठ्यपुस्तकको प्रयोगबाट पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित सक्षमता हासिल गर्न विद्यार्थीलाई सहयोग पुग्ने अपेक्षा गरिएको छ । पाठ्यपुस्तकलाई सकेसम्म क्रियाकलापमुखी र रुचिकर बनाउने प्रयत्न गरिएको छ । यस पाठ्यपुस्तकलाई अझै परिष्कृत पार्नका लागि शिक्षक, विद्यार्थी, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुझावका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्दछ ।

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

वि. सं. २०७६

विषयसूची

एकाइ	शीर्षक	पृष्ठ सङ्ख्या
1.	रेखा र कोण	1
2.	त्रिभुज, चतुर्भुज र बहुभुज	15
3.	समरूपता र अनुरूपता	33
4.	वृत्त	37
5.	ठोस आकृति	40
6.	निर्देशाङ्क	46
7.	परिमिति र क्षेत्रफल	53
8.	स्थानान्तरण	65
9.	सममिति र टेसलेसन	75
10.	दिशास्थिति र स्केल ड्रइङ	84
11.	समूह	89
12.	पूर्ण सङ्ख्या	105
13.	पूर्णाङ्क	121
14.	आनुपातिक सङ्ख्या	133
15.	अनानुपातिक सङ्ख्या	138
16.	भिन्न र दशमलव	139
17.	अनुपात, समानुपात र प्रतिशत	144
18.	नाफा र नोक्सान	152
19.	ऐकिक नियम	156
20.	साधारण ब्याज	160
21.	तथ्याङ्क शास्त्र	164
22.	बीजीय अभिव्यञ्जक	178
23.	घाताङ्क	197
24.	समीकरण, असमानता र लेखाचित्र	203
	उत्तरमाला	221

एकाइ 1

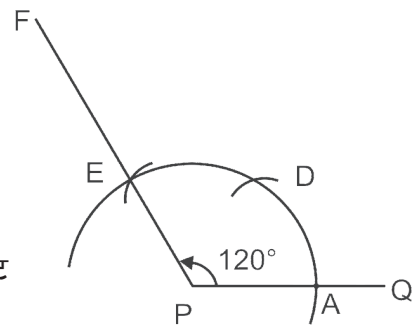
रेखा र कोण (Line and Angle)

1.1. कम्पासको प्रयोगद्वारा कोणहरूको रचना (Construction of Angles using Compass)

हामीले 30°, 60°, 90° र 45° का कोणहरूको रचना गर्न अगिल्लो कक्षामा सिकिसकेका छौँ । यहाँ थप केही कोणहरूको रचना गर्न सिक्ने छौँ ।

1. 120° को कोणको रचना

कोण रचना गर्ने तरिका



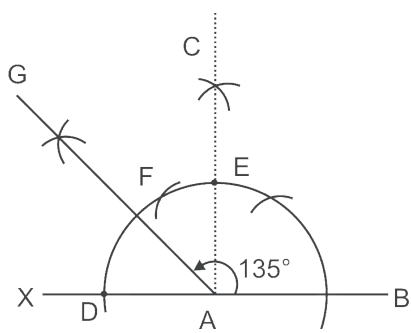
1. एउटा रेखाखण्ड PQ खिच ।
2. बिन्दु P मा कम्पासको मदतले कुनै चाप खिच ।
3. बिन्दु P मा 60° को कोण हुने गरी बिन्दु A बाट चिह्न D लगाऊ ।
4. बिन्दु D बाट फेरि उही 60° को एउटा चाप लिई काट र चिह्न E लगाऊ ।
5. अब बिन्दु P र E जोडी F सम्म लम्ब्याऊ ।

   अत: ∠FPQ = 120° आवश्यक कोण तयार भयो ।

2. 135° को कोणको रचना

कुन कुन कोण जोडेमा 135° हुन्छ, होला ?
यहाँ 135° = 90° + 45° हुन्छ ।

कोण रचना गर्ने तरिका



1. एउटा रेखाखण्ड AB खिच र X सम्म लम्ब्याऊ ।
2. बिन्दु A मा 90° को कोण रचना गर । AB मा 90° हुने रेखालाई AC नामकरण गर । अब ∠CAB = 90° भयो ।
3. अब बिन्दु D र E बाट ∠XAC = 90° लाई समद्विभाजन गर्न ∠XAC को अर्धक AG खिच ।

   ∠GAC = ∠XAG = 45° हुन्छ, कसरी ? नापेर हेर ।
4. यहाँ ∠GAB = ∠CAB + ∠GAC = 90° + 45° = 135° छ ।

   अत: आवश्यक ∠GAB = 135° कोण तयार भयो ।

3. 75° को कोणको रचना

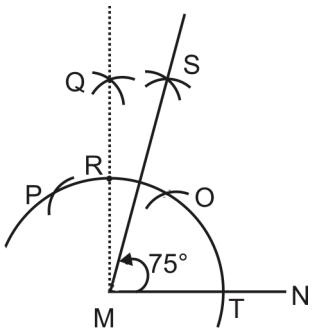
75° को कोणको रचना गर्ने तरिका बारेमा छलफल गरौँ ।

60° + 15° = 75° हुन्छ ।

कोण रचना गर्ने तरिका

1. एउटा रेखाखण्ड MN खिच ।
2. बिन्दु M मा ∠QMN = 90° को कोण बनाऊ । T बाट M मा 60° कोण बन्ने गरी बिन्दु O काट ।
3. अब ∠QMO = 90° - 60° = 30° हुन्छ । त्यसैले ∠QMO को अर्धक खिचेमा ∠OMN को आसन्न कोण 15° को बन्ने छ
4. ∠RMO को अर्धक MS खिच ।

   अत: आवश्यक ∠SMN = 75° को कोण तयार भयो ।



4. 105° को कोणको रचना

105° = 90° + 15° हुन्छ । त्यसैले 90° को कोणमा थप 15° को कोण रचना गरेमा 105° को कोण बन्छ ।

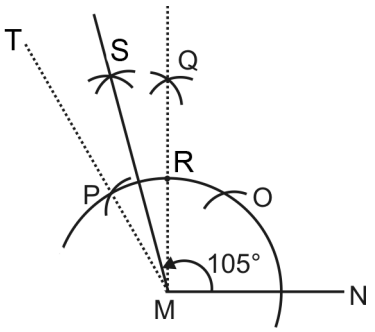
कोण रचना गर्ने तरिका

1. बिन्दु M मा ∠QMN = 90° र ∠TMN = 120° को कोण रचना गर ।

   ∠QMT = 120° - 90° = 30° हुन्छ ।
2. अब बिन्दु P र R बाट ∠TMQ = 30° लाई समद्विभाजन गर्न अर्धक MS खिच ।
3. अब ∠QMT को अर्धक MS खिच ।

   जहाँ ∠SMQ = ∠PMS = 15° हुन्छ ।

   यसरी ∠SMN = ∠QMN + ∠QMS = 90° + 15° = 105° चाहिएको कोण तयार भयो ।



अभ्यास 1.1

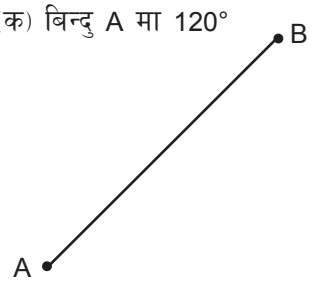
1. रुलर र कम्पासको सहायताले निम्नानुसारका नाप भएका कोणहरू खिच :

(क) 60° (ख) 30° (ग) 90° (घ) 45° (ङ) 120°

(च) 135° (छ) 75° (ज) 105°

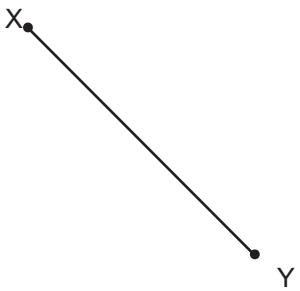
2. निम्नानुसारका कोणहरू खिच :

(क) बिन्दु A मा 120°



(ख) बिन्दु N मा 135°

(ग) बिन्दु Y मा 75°



(घ) बिन्दु R मा 45°

3. कम्पासको सहायताले 75° को कोण खिची त्यसलाई आधा गर । त्यो आधा कोण कति डिग्रीको बन्यो, नापेर हेर ।

4. कम्पासको सहायताले एउटा 30° को कोण खिची त्यसलाई आधा गर । नापेर हेर कति डिग्रीको कोण बन्यो ?

5. एउटा रेखाखण्ड MN को बिन्दु M मा 120° र बिन्दु N मा 30° को कोण बनाऊ । कोणहरू बनाउने रेखाखण्ड काटिएको बिन्दुलाई O नाम देऊ । ∠MON नाप र कति डिग्रीको कोण भयो, लेख ।

6. कुनै एउटा रेखाखण्ड PQ खिची क्रमश: बिन्दुहरू P र Q मा 75° र 30° का कोणहरू बनाऊ । कोणहरू बनाउने रेखाखण्ड काटिएको बिन्दुलाई R नाम देऊ । ∠PRQ नाप र कति डिग्रीको भयो लेख ।

1.2 कम्पासको प्रयोगबाट बराबर कोणको रचना
(Construction of Equal Angle Using Compass)

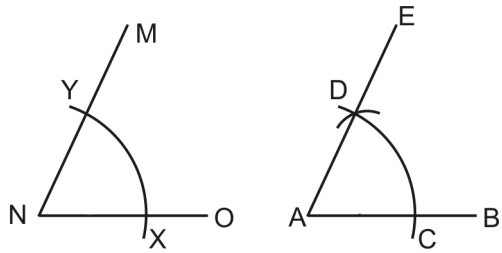
उदाहरण 1

कुनै एउटा कोण बराबरको अर्को कोणको रचना गर ।

मानौँ एउटा कोण ∠MNO दिइएको छ ।

रचना गर्नुपर्ने : ∠MNO बराबर नापको अर्को कोण रचना गर्नु छ ।

रचना गर्ने तरिका

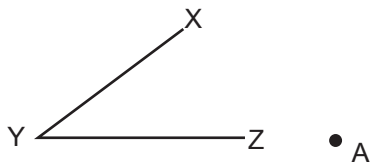


1. रेखाखण्ड AB खिच ।
2. बिन्दु N बाट NO र MN मा क्रमश: X र Y मा काट्ने गरी कुनै नापको चाप XY खिच ।
3. चरण 2 कै चाप लिएर बिन्दु A बाट AB लाई C मा काट्ने गरी एउटा अलि लामो चाप खिच ।
4. कम्पासको सियो बिन्दु X मा अड्याएर कम्पासको पेन्सिलले Y मा छुने गरी नापेर चाप XY को लम्बाइ बराबरको चाप लेऊ ।
5. चरण 4 कै चापको लम्बाइ बराबरको चापले बिन्दु C मा कम्पासको सियो राखी पहिलो चापलाई बिन्दु D मा काट्ने गरी अर्को चाप खिच ।
6. बिन्दु AD भई जाने रेखा AE खिच ।
7. ∠MNO र ∠EAB नापेर हेर । बराबर भए भएनन्, तुलना गरेर हेर ।
   यसरी चाहिएको ∠MNO बराबरको ∠EAB तयार भयो ।
   माथिका चित्रमा ∠MNO = ∠EAB कति हुन्छ नापेर हेर ।

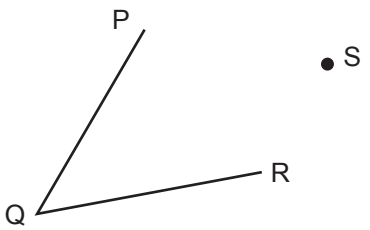
अभ्यास 1.2

1. **तलका कोणहरू र बिन्दुहरूलाई कापीमा ट्रेसिङ गर । दिइएका बिन्दुहरूमा बराबर कोणहरूको र चना गरी देखाऊ :**

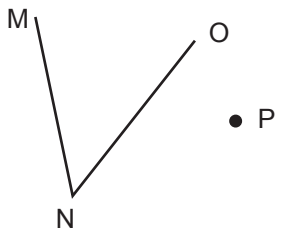
(क)



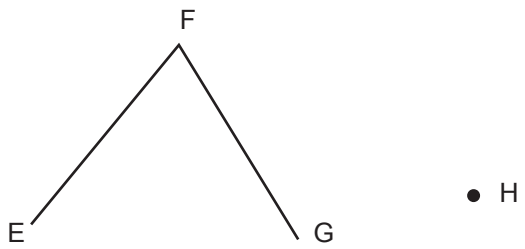
(ख)



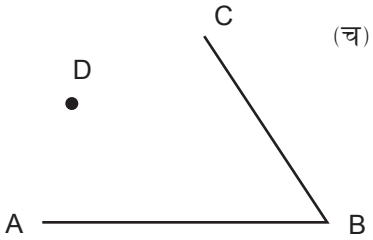
(ग)



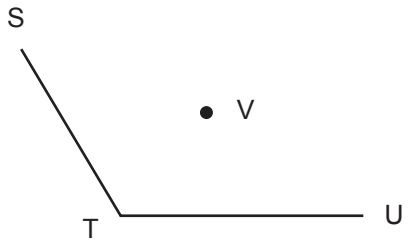
(घ)



(ङ)



(च)



2. कुनै 2 ओटा फरक फरक नापका कोणहरू रचना गरी तिनीहरूको नाप बराबरको कोण कम्पासको प्रयोग गरी रचना गर ।

3. कुनै निश्चित नाप बराबरको कोण ∠ABC खिच । अब ∠ABC = ∠XYZ बनाएर देखाऊ । दुवै कोण नापेर हेर । के ∠ABC = ∠XYZ भयो ? आफ्नो र साथीको रचना तुलना गरी हेर ।

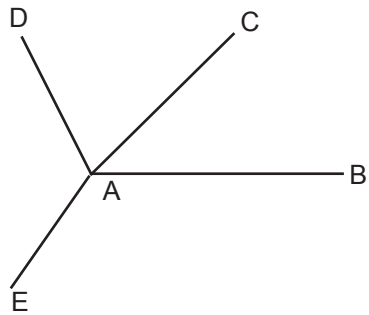
4. माथि प्रश्न नं. 1 मा दिइए जस्तै गरी 5 ओटा प्रश्नहरू आफैँले बनाएर रचना गर ।

5. एउटा 60° को कोण खिच र त्यो कोणसँग बराबर हुने कोणको रचना गर ।

1.3 कोणका जोडाहरूको परिचय (Introduction to Pair of Angles)

1. आसन्न कोणहरू (Adjacent Angles)

दिइएको चित्रमा,



- शीर्षबिन्दु A मा कति ओटा रेखाखण्डहरू छन् ? ती कुन कुन हुन् ।
- शीर्षबिन्दु A मा कति ओटा कोण बनेका छन् ? ती कुन कुन हुन् ? नाम लेख ।
- ∠DAC र ∠CAB मा के के कुराहरू साझा छन् ?

सँगैको चित्रमा शीर्षबिन्दु A बाट जाने रेखाखण्डहरू AB, AC, AD र AE छन् । दुई ओटा कोणहरू ∠DAC र ∠CAB मा शीर्षबिन्दु A र भुजा AC दुवैमा साझा छन् । त्यसैले ∠DAC र ∠CAB आसन्न कोणहरू हुन् ।

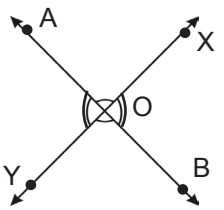
- अन्य 2 जोडी आसन्न कोणहरूको नाम लेख ।
- कापीमा माथिको चित्र सारेर थप 2 ओटा रेखाखण्डहरू शीर्षबिन्दु A बाट तान । नयाँ बनेका अन्य 4 जोडी आसन्न कोणको नाम लेख ।
- अब के तिमीले आसन्न कोणको परिभाषा दिन सक्छौ ? आफैँ लेख्न कोसिस गर । आफ्नो लेखाइलाई साथीसँग छलफल गरी निष्कर्षलाई तलको परिभाषासँग तुलना गरी हेर ।

> शीर्षविन्दु एउटै भई साझा भुजाको दुवैतिर परेका दुईओटा कोणहरूलाई आसन्न कोणहरू भनिन्छ ।

२. शीर्षाभिमुख कोणहरू (Vertically Opposite Angles)

दिइएको चित्रमा :

- रेखाहरू AB र XY कुन बिन्दुमा काटिएका छन् ?
- जम्मा कति ओटा कोणहरू बनेका छन् ?
- ∠AOY को विपरीत दिशातिरको कोण कुन हो ?
  त्यस्तै ∠XOB को विपरीत दिशाको कोण कुन हो ?
- ∠AOX को विपरीत दिशाको कोण कुन हो ?
- ∠AOX र ∠YOB शीर्षाभिमुख कोणहरू हुन् ?

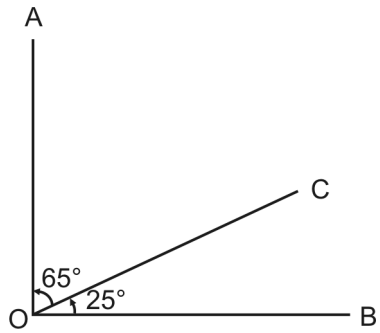


यसरी रेखाहरू AB र XY बिन्दु O मा काट्दा बनेका अनासन्न कोणका जोडीहरू ∠AOX र ∠YOB शीर्षाभिमुख कोणहरू हुन् । त्यस्तै ∠AOY र ∠XOB पनि शीर्षाभिमुख कोणहरू हुन् । शीर्षाभिमुख कोणलाई विपरीत शीर्षकोण पनि भनिन्छ ।

- के तिमीले अब शीर्षाभिमुख कोणको परिभाषा बताउन सक्छौ ? आफैं लेख्ने कोसिस गर । आफ्नो लेखाइलाई तलको परिभाषासँग तुलना गरेर हेर ।

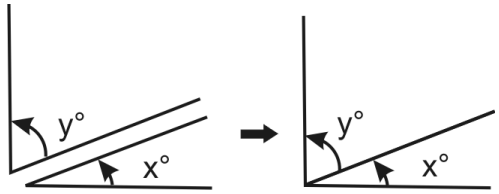
> दुईओटा सिधा रेखाहरू आपसमा काटिँदा बनेका (विपरीततिरका) अनासन्न कोणहरूलाई शीर्षाभिमुख कोणहरू भनिन्छ ।

3. समपूरक कोणहरू (Complementry Angles)



- चित्रमा देखाए जस्तै बिन्दु 0 मा एउटा 90° को कोण बनाऊ ।
- ∠AOB को भाजक OC खिच ।
- ∠AOC र ∠COB नाप । कति कति डिग्रीका भए ?
- चित्रमा ∠AOC = 65° र ∠COB = 25° छन् ?

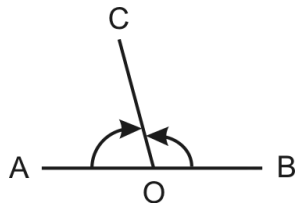
यहाँ ∠AOC + ∠COB = 65° + 25° = 90° छ । ∠AOC र ∠COB को योगफल (जोड) बराबर 90° वा एक समकोण छ । यस्ता कोणहरू ∠AOC र ∠COB समपूरक कोणहरू हुन् ।



- यदि x° र y° समपूरक कोण हुन् भने x° + y° = 90° हुन्छ ।
- अब के तिमी समपूरक कोणहरूको परिभाषा लेख्न सक्छौ ?

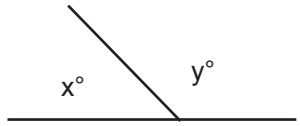
> यदि दुईओटा कोणहरूको योगफल एक समकोण वा 90° छ भने त्यस्ता कोणहरूलाई एक अर्काका समपूरक कोण भनिन्छ ।

4. परिपूरक कोणहरू (Supplementary Angles)



- चित्रमा दिइए जस्तै एउटा सिधाकोण ∠AOB रचना गर ।
- ∠AOB = 180° लाई रेखाखण्ड OC ले दुई भाग लगाऊ ।
- ∠COB र ∠AOC नापेर हेर । कति कति डिग्रीका भए, लेख । के ∠COB + ∠COA = 180° हुन्छ ?

चित्रमा ∠COB = 105° र ∠COA = 75° छ । ∠COB + ∠COA = 105° + 75° = 180° हुन्छ । यहाँ ∠COB र ∠COA को योगफल (जोड) बराबर 180° छ । त्यसैले ∠COB र ∠COA परिपूरक कोणहरू हुन् ।



- चित्रमा x° + y° = 180° (सरल कोण) छ । त्यसैले x° र y° परिपूरक छन् ।

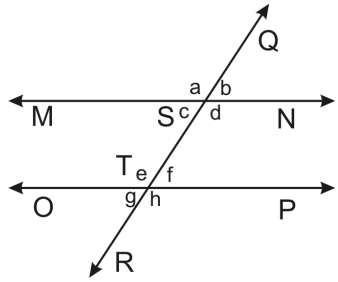
- के माथिको छलफलका आधारमा परिपूरक कोणको परिभाषा लेख्न सक्छौ ? लेख्ने कोसिस गर ।

यदि दुईओटा कोणहरूको योगफल दुई समकोण वा 180° हुन्छ भने ती दुई कोणहरूलाई परिपूरक कोण भनिन्छ ।

5. छेदकले रेखाहरूसँग बनाउने कोणहरू (Angles made by a Transversal with the Lines)

(क) छेदक (Transversal)

दिइएको चित्रमा,



- रेखाहरू MN र OP लाई कुन रेखाले काटेको छ ? चित्रमा MN र OP दुई ओटा रेखाहरूलाई एउटा रेखा QR ले क्रमशः S र T मा काटेका छन् । यहाँ रेखा QR छेदक हो ।

दुई वा दुईभन्दा बढी रेखाहरूलाई काटेर जाने रेखालाई छेदक भनिन्छ ।

(ख) बाहिरी र भित्री कोणहरू (Exterior and Interior Angles)

- माथिको चित्रमा जम्मा कतिओटा कोणहरू बनेका छन् ? प्रत्येकको नाम लेख ।
- चित्रमा बाहिरी कोणहरू कुन कुन होलान् ?
- चित्रमा भित्री कोणहरू कुन कुन होलान् ?

रेखाहरू MN र OP भन्दा बाहिर परेका कोणहरू बाहिरी कोणहरू हुन् । एउटा बाहिरी कोण ∠MSQ अथवा a हो ।

- त्यस्तै अन्य 3 ओटा बाहिरी कोणहरू कुन कुन होलान् ?

चित्रमा रेखाहरू MN र OP को बिचमा (भित्र) परेका कोणहरू भित्री कोणहरू हुन् । चित्रमा एउटा भित्री कोण ∠MSR अथवा c हो ।

- चित्रमा अब थप कति ओटा भित्री कोणहरू छन् ? तिनीहरूको कुन कुन कोण होलान् ?

चित्रमा कोणहरू a, b, g र h बाहिरी कोणहरू हुन् । त्यस्तै कोणहरू c, d, e र f भित्री कोणहरू हुन् ।

(ग) एकान्तर कोणहरू (Alternate Angles)

- माथिको चित्रमा ∠MST र ∠STP अर्थात् c र f कस्ता कोणहरू होलान् ?

कोणहरू c र f छेदकको दुवैतिर परेका भित्री अनासन्न कोणहरू हुन् । यहाँ कोणहरू c र f लाई एकान्तर कोण भनिन्छ ।

- त्यस्तै अर्को जोडी एकान्तर कोणहरू लेख ।
- के अब एकान्तर कोणको परिभाषा बताउन सक्छौ ? लेख्ने प्रयास गर ।

दुईओटा रेखाहरूलाई एउटा छेकदले काट्दा छेदकको दुवैतिर परेका भित्री अनासन्न कोणहरूलाई एकान्तर कोण भनिन्छ ।

(घ) सङ्गत कोणहरू (Correspoinding angles)

- माथिको चित्रमा ∠QSN र ∠STP अर्थात् b र f कस्ता कोणहरू होलान् ?
  b र f छेदक QR को एकैतिर बनेका एउटा बाहिरी र एउटा भित्री कोणहरू हुन् । यस्ता कोणहरूलाई सङ्गत कोण भनिन्छ ।
- त्यस्तै अर्को जोडी सङ्गत कोणहरू लेख ।
- जम्मा कति जोडी सङ्गत कोणहरू बनेका छन् ? नाम लेख ।
- के अब सङ्गत कोणको परिभाषा लेख्न सक्छौ ? लेख्ने कोसिस गर ।

दुईओटा रेखाहरूलाई कुनै छेदकले काट्दा त्यो छेदकको एकैतिर परेका एउटा बाहिरी र एउटा भित्री अनासन्न कोणहरूको जोडीलाई सङ्गत कोणहरू भनिन्छ ।

(ङ) क्रमागत भित्री कोणहरू (Co-interior angles)

- माथिको चित्रमा कोणहरू d र f अर्थात् ∠NST र ∠PTS कस्ता कोणहरू होलान् ?

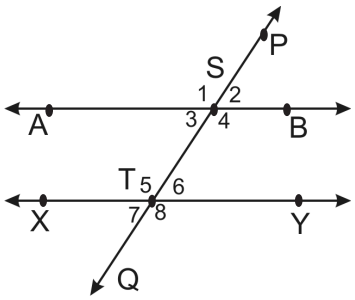
कोणहरू d र f छेदकको एकैतिर परेका दुवै भित्री कोणहरू हुन् । यस्ता कोणहरूलाई क्रमागत भित्री कोणहरू भनिन्छ ।

- चित्रमा अर्को जोडी क्रमागत भित्री कोणहरू पत्ता लगाएर लेख ।
- के अब क्रमागत भित्री कोणहरूको परिभाषा बताउन सक्छौ ? प्रयास गर ।

दुईओटा रेखाहरूलाई कुनै छेदकले काट्दा छेदकको एकैतिर बनेका भित्री कोणहरूको जोडीलाई क्रमागत भित्री कोणहरू भनिन्छ ।

अभ्यास 1.3

1. **रेखाहरू AB र XY लाई छेदक PQ ले काट्दा बनेका कोणहरूलाई चित्रमा देखाइएको छ :**



(क) 4/4 ओटा भित्री र बाहिरी कोणहरूको नाम लेख ?

(ख) 2 जोडा एकान्तर कोणहरूको नाम लेख ।

(ग) 2 जोडा क्रमागत भित्री कोणहरूको नाम लेख ।

(घ) 4 जोडा सङ्गत कोणहरूको नाम लेख ।

(ङ) 2 जोडा शीर्षाभिमुख कोणहरूको नाम लेख ।

(च) 2 जोडा आसन्न कोणहरूको नाम लेख ।

(छ) 2 जोडा परिपूरक कोणहरूको नाम लेख ।

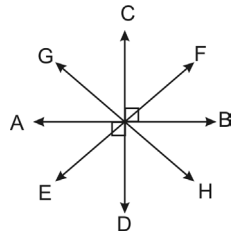
2. **माथि चित्रमा दिए जस्तै गरी दुईओटा रेखालाई एउटा छेदकले काटी नामकरण गर र तल दिइएका कोणहरूको नाम लेख :**

(क) शीर्षाभिमुख कोणहरू (ख) परिपूरक कोणहरू (ग) आसन्न कोणहरू

(घ) बाहिरी कोणहरू (ङ) एकान्तर कोणहरू (च) सङ्गत कोणहरू

(छ) क्रमागत भित्री कोणहरू (ज) समपूरक कोणहरू

3. **दिइएको चित्रबाट 4 जोडा समपूरक कोणहरू पत्ता लगाई तिनीहरूको नाम लेख ।**

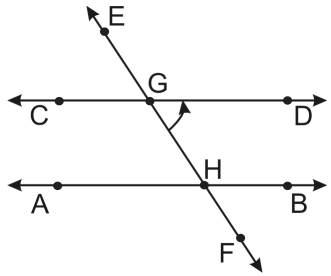


4. **दिइएको चित्रमा सङ्केत गरिएको कोण DGF सँग निम्नबमोजिम हुने कोणहरूको नाम लेख :**

(क) आसन्न कोण 2 ओटा (ख) शीर्षाभिमुख कोण 1 ओटा

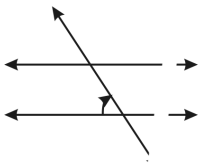
(ग) परिपूरक कोण 2 ओटा (घ) एकान्तर कोण 1 ओटा

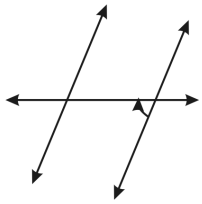
(ङ) सङ्गत कोण 1 ओटा (च) क्रमागत भित्री कोण 1 ओटा

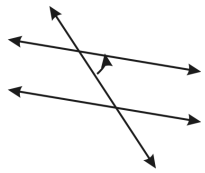


5. **तलका प्रत्येक चित्र कापीमा सार । नामाङ्कन गर । अब सङ्केत गरिएका कोणहरूमा निम्नानुसार हुने कोणका जोडाहरूको नाम लेख :**

(क) एकान्तर कोणहरू (ख) सङ्गत कोणहरू (ग) क्रमागत भित्री कोणहरू







6. एकान्तर कोणको चित्रसहित परिभाषा लेख ।

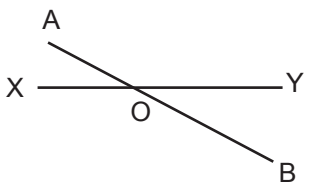
7. दुईओटा रेखालाई एउटा छेदकले काट्दा बन्ने सम्भावित कोणहरूको उदाहरणसहित परिभाषा लेख ।

1.4 कोणहरूको परीक्षण (Verification of Angles)

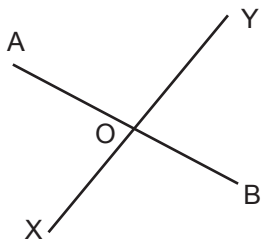
तल दिइएका विभिन्न कोणहरूको परीक्षणका क्रियाकलाप अध्ययन र छलफल गर । आफूले पनि सो अनुसार लेख्ने र गर्ने प्रयास गर ।

परीक्षण 1 **तथ्य : दुईओटा रेखाखण्डहरू आपसमा काट्दा बनेका शीर्षाभिमुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।**

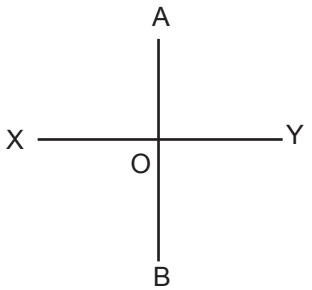
तलका प्रत्येक चित्रहरूमा दुईओटा रेखाखण्डहरू AB र XY आपसमा O बिन्दुमा काटिएका छन् । अब प्रोट्याक्टरको सहायताले शीर्षाभिमुख कोणहरूका जोडा ∠AOX र ∠BOY तथा ∠AOY र ∠XOB नापेर तलको तालिकामा भर ।



चित्र न. 1



चित्र न. 2



चित्र न. 3

चित्र न.	शीर्षाभिमुख कोण र कोणको नाप				परिणाम
	∠AOX	∠BOY	∠AOY	∠XOB	
1.					
2.					
3.					

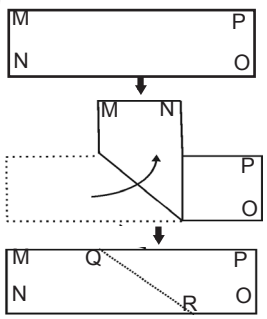
- माथिका तीनओटै चित्रहरूमा कोणहरू ∠AOX र ∠BOY बिच कस्तो सम्बन्ध पायौ ?
- त्यस्तै ∠AOY र ∠XOB बिच कस्तो सम्बन्ध पायौ ?
- अब माथिको परीक्षणबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख । प्राप्त निष्कर्षलाई तलको निष्कर्षसँग तुलना गरी हेर ।

निष्कर्ष : दुईओटा रेखाखण्डहरू आपसमा काट्दा बनेका शीर्षाभिमुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

परीक्षण 2 **तथ्य : सरल रेखाको कुनै बिन्दुमा एकैतिर रहेका कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ ।**

प्रयोग 1: कागज पट्याएर गरिने परीक्षण (Verification by Paper Folding)

1. एउटा आयतकार कागजको टुक्रा लेऊ । चित्रमा दिए जस्तै गरी MNOP नामकरण गर ।
2. चित्रमा दिए जस्तै गरी लम्बाइतिरको भाग समाएर पट्याऊ । पट्याइएको ठाउँलाई गाढा बनाऊ ।
3. पट्याउँदा भएको ठाउँलाई स्केलले रेखा खिच । रेखाले किनारमा छोएको बिन्दुलाई क्रमश: Q र R नामकरण गर ।



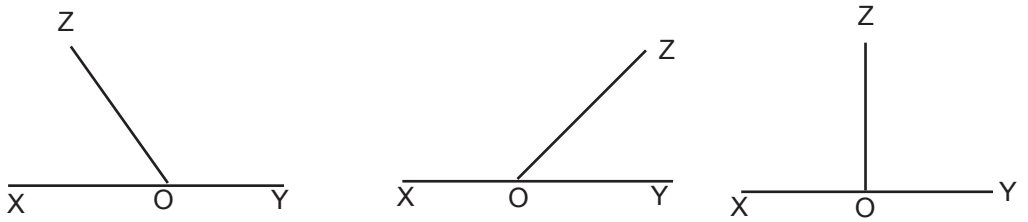
4. अब चित्रअनुसार $\angle MQR + \angle RQP = \angle MQP =$ एक सिधा कोण $180°$ (सिङ्गो टुक्रे तथ्यअनुसार)

- अब माथिको परीक्षणबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख र साथीसँग छलफल गर । निष्कर्षलाई तलको निष्कर्षसँग तुलना गरी हेर ।

निष्कर्ष : सरल रेखाको कुनै बिन्दुमा एकैतिर बनेका कोणहरूको योगफल दुई समकोण हुन्छ ।

प्रयोग 2: कोण नापेर गरिने परीक्षण (Verification by Measuring Angles)

1. चित्रमा एउटा सिधारेखा XY को कुनै बिन्दु O बाट जाने गरी अर्को रेखा OZ खिचिएको छ । यस्ता 3 ओटा फरक फरक चित्र खिचिएका छन् ।



चित्र न. 1 चित्र न. 2 चित्र न. 3

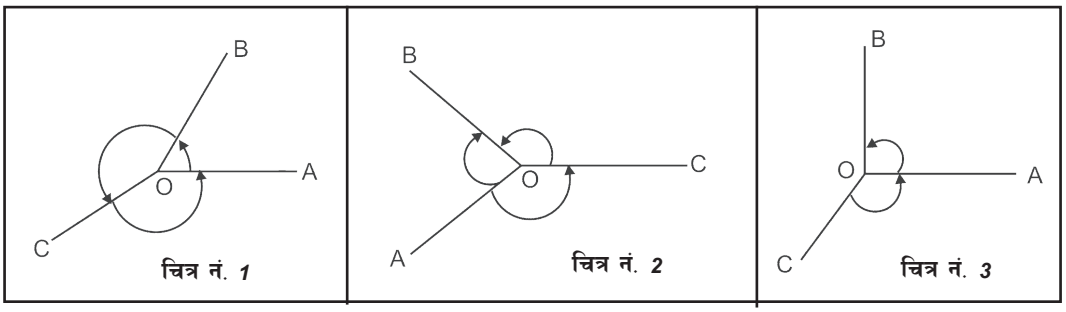
2. **प्रत्येक चित्रहरूमा $\angle XOZ$ र $\angle ZOY$ नापेर तलको तालिकामा भर :**

चित्र न.	कोणहरू र तिनको नाप			परिणाम
	$\angle XOZ$	$\angle ZOY$	$\angle XOZ + \angle ZOY$	
1				
2				
3				

- माथिका प्रत्येक चित्रहरूमा $\angle XOZ + \angle ZOY$ कति भयो, लेख ।
- $\angle XOZ$ र $\angle ZOY$ को सम्बन्ध कस्तो पायौ ?
- माथिको प्रयोगका आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ । निष्कर्ष लेखेर कक्षामा छलफल गर । प्राप्त निष्कर्षलाई तलको निष्कर्षसँग तुलना गरी हेर :

निष्कर्ष : सरल रेखाको कुनै बिन्दुमा एकैतिर रहेका सबै कोणहरूको योगफल दुई समकोण वा $180°$ हुन्छ ।

परीक्षण 3 **तथ्य : कुनै बिन्दुको वरिपरि एक परिक्रमणमा बनेका कोणहरूको योगफल $360°$ हुन्छ ।**



चित्र नं. 1 चित्र नं. 2 चित्र नं. 3

1. चित्रमा बिन्दु O को वरिपरि बनेका कोणहरू ∠AOB, ∠BOC र ∠COA छन् ।

2. तलको तालिकामा प्रत्येक चित्रका ∠AOB, ∠BOC र ∠COA नाप र तालिका पुरा गर ।

चित्र	कोणहरू र कोणका नाप			
	∠AOB	∠BOC	∠COA	∠AOB + ∠BOC + ∠COA
1				
2				
3				

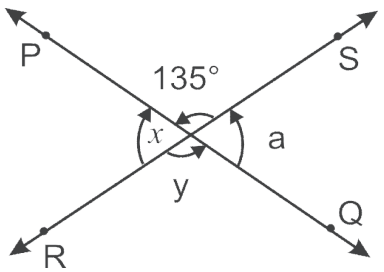
3. के माथि सबै चित्रमा ∠AOB + ∠BOC + ∠COA = 360° छ ?

4. माथिका क्रियाकलाहरूबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख । निष्कर्षलाई कक्षामा छलफल गर । निष्कर्षलाई तलको निष्कर्षसँग तुलना गरी हेर :

निष्कर्ष : कुनै बिन्दुको वरिपरि एक परिक्रमणमा बनेका कोणहरूको योगफल 360° हुन्छ ।

उदाहरण 1

चित्रमा x, y र a को मान पत्ता लगाऊ ।



समाधान

यहाँ, x + 135° = 180° (सरल कोण = 180° हुने भएकाले)

अथवा x = 180° - 135° = 45°

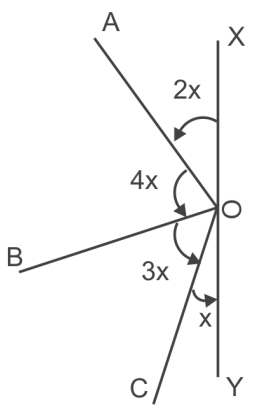
त्यस्तै a = x = 45° (शीर्षाभिमुख कोणहरू बराबर हुने भएकाले)

अनि, y = ∠POS = 135° (शीर्षाभिमुख कोणहरू भएकाले)

अत: x = 45°, y = 135° र a = 45° हुन्छ ।

उदाहरण 2

चित्रमा x को मान पत्ता लगाई 4 ओटै कोणको नाप पनि लेख ।



समाधान

यहाँ, 2x + 4x + 3x + x = ∠XOY (सिङ्गो टुक्रे तथ्यअनुसार)

अथवा 10x = 180° (∠XOY = 180°, सरल कोण भएकाले)

अथवा, $x = \frac{180°}{10} = 18°$

अब, ∠AOX = 2x = 2 x 18° = 36°

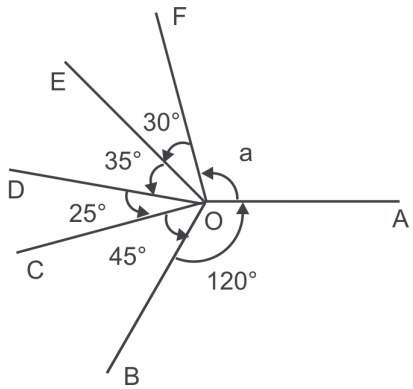
∠AOB = 4x = 4 x 18° = 72°

∠BOC = 3x = 3 x 18° = 54°

र ∠COY = x = 18° हुन्छ ।

उदाहरण 3

दिइएको चित्रका आधारमा a को मान पत्ता लगाऊ :



समाधान

यहाँ, a + 30° + 35° + 25° + 45° + 120° = 360°
(किनकि बिन्दु O मा बनेका एक पूरा परिक्रमणका कोणहरूको योगफल 360° हुन्छ ।)

अथवा, a + 255° = 360°

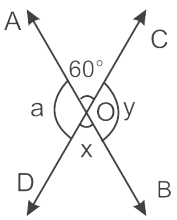
अथवा, a = 360° - 255° = 105°

तसर्थ a को मान 105° हुन्छ ।

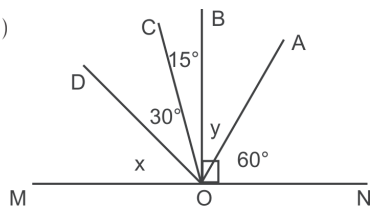
अभ्यास 1.4

1. **तलका चित्रहरूमा x, y, z र a को मान पत्ता लगाऊ :**

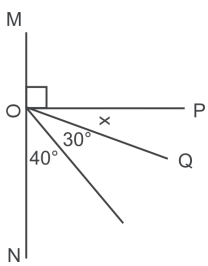
(क)



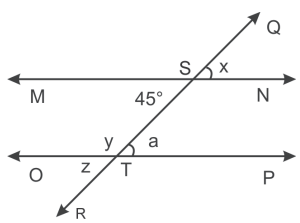
(ख)



(ग)



(घ)



2. **निम्नलिखित तथ्यहरू प्रयोग भएका एक एकओटा समस्या बनाई समाधान गर :**

(क) शीर्षाभिमुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

(ख) सरल रेखाको कुनै बिन्दुमा एकैतिर रहेका कोणहरूको योग 180° हुन्छ ।

(ग) कुनै बिन्दुको वरिपरि एक परिक्रमणमा बनेका कोणहरूको योगफल 360° हुन्छ ।

एकाइ 2

त्रिभुज, चतुर्भुज र बहुभुज (Triangle, Quadrilateral and Polygon)

2.1 त्रिभुजको रचना (Construction of a Triangle)

1. दुईओटा भुजाको नाप र तिनीहरूबिचको कोण दिएर त्रिभुजको रचना

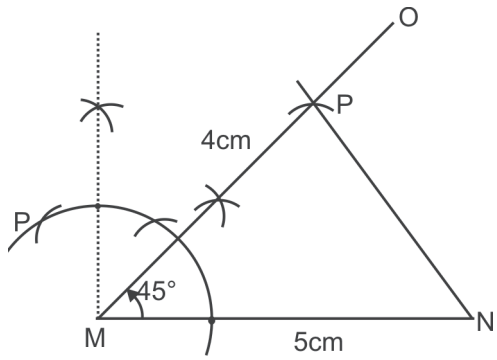
उदाहरण 1

एउटा त्रिभुज PMN रचना गर । जसमा MN = 5cm, MP = 4cm र ∠PMN= 45° छ ।

समाधान

रचना गर्ने तरिका

1. सर्वप्रथम MN=5cm को एउटा रेखाखण्ड खिच ।
2. बिन्दु M मा ∠OMN = 45° को कोण खिच ।
3. कम्पासको सहयोगले MP = 4cm हुने गरी काट ।
4. अब P र N जोड । अब आवश्यक त्रिभुज PMN तयार भयो ।



2. कुनै एउटा भुजाको नाप र त्यसमा बनेका दुईओटा कोण दिएर त्रिभुजको रचना

उदाहरण 2

एउटा त्रिभुज XYZ को रचना गर । जहाँ ∠X = 45°, ∠Y = 30°, र XY = 6 cm छ ।

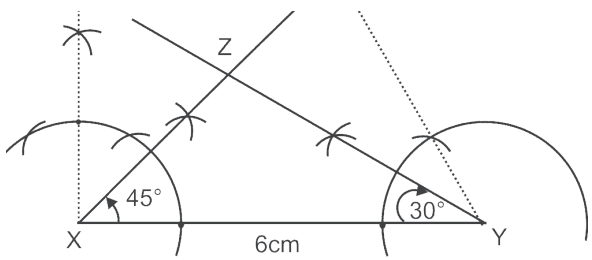
समाधान

रचना गर्ने तरिका

1. XY = 6cm भएको एउटा रेखाखण्ड खिच ।
2. बिन्दु X मा ∠X = 45° को कोण खिच ।
3. बिन्दु Y मा ∠Y = 30° को कोण खिच ।

   यसरी ∠X र ∠Y कोण खिच्दा कोण बनाउने रेखाहरूले बिन्दु Z मा काट्छ ।

   अब, आवश्यक त्रिभुज XYZ तयार भयो ।

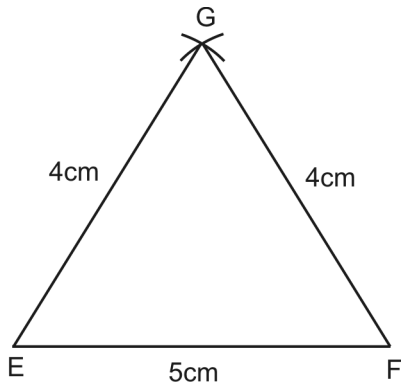


3. तीनओटा भुजाको नाप दिएर त्रिभुजको रचना

उदाहरण 3

एउटा त्रिभुज EFG को रचना गर जसमा EF = 5cm, FG = 4cm र EG = 4cm छ ।

समाधान



रचना गर्ने तरिका

1. EF = 5cm को रेखाखण्ड खिच ।
2. बिन्दु E बाट 4cm र बिन्दु F बाट 4cm को चाप लिएर दुवै चाप काटेर बन्ने बिन्दु G पत्ता लगाऊ ।
3. E र G तथा F र G जोड ।

   अब, आवश्यक त्रिभुज EFG तयार भयो ।

अभ्यास 2.1

1. तलका प्रत्येक अवस्थामा ΔABC को रचना गर :

(क) AB = 6cm, BC = 4cm र $\angle B = 135°$

(ख) BC = AC = 5.5cm र $\angle C = 45°$

(ग) AB = 3.5cm, AC=4cm र $\angle A = 45°$

2. तलका प्रत्येक अवस्थामा ΔXYZ को रचना गर :

(क) YZ = 5cm, $\angle Y = 60°$ र $\angle Z = 30°$

(ख) XZ = 4.5cm, $\angle X = 105°$ र $\angle Z = 45°$

(ग) XY = 5.3cm, $\angle X = 60°$ र $\angle Y = 90°$

3. तलका प्रत्येक अवस्थामा ΔQRS को रचना गर :

(क) QR = 4cm, RS = 5cm, र QS = 6cm

(ख) QS = 5.5cm, QR = 5.5cm, र RS = 5.5cm

(ग) RS = 4.5cm, QR = 7cm र QS = 6.5cm

4. तलका प्रत्येक अवस्थामा ΔEFG को रचना गर :

(क) EF = FG = 4.5cm र $\angle EFG = 90°$

(ख) EF = 5cm, FG = 6cm र EG = 6.3cm

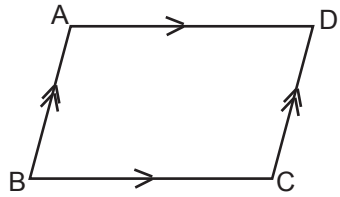
5. निम्नानुसारका अवस्थामा एक एकओटा त्रिभुजहरू रचना गर्ने समस्या बनाऊ/खोज र रचना गर :

1. दुईओटा भुजाको नाप र ती भुजाले बनाउने कोणको नाप दिएमा
2. कुनै एउटा भुजाको नाप र त्यसमा बनेका दुईओटा कोणको नाप दिएमा
3. तीनओटै भुजाको नाप दिएमा

2.2 आयत, वर्ग, समानान्तर चतुर्भुज र समबाहु चतुर्भुजका गुणहरूको खोजी

1. समानान्तर चतुर्भुजका गुणहरूको खोजी

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :



(क) चित्रमा देखाइएको चतुर्भुज ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो । कसरी ?

(ख) समानान्तर चतुर्भुज भनेको के हो ? परिभाषा लेख ।

(ग) समानान्तर चतुर्भुजका के के गुणहरू हुन सक्लान् ? साथीसँग छलफल गर ।

सम्मुख भुजाहरू समानान्तर भएको चतुर्भुजलाई समानान्तर चतुर्भुज (Parallelogram) भनिन्छ ।

अब माथिको समानान्तर चतुर्भुजको परिभाषा र क्रियाकलापका आधारमा समानान्तर चतुर्भुजका निम्नानुसार का गुणहरूको खोजी गर्ने प्रयास गर । (चित्र बनाएर तथा कागज पट्याएर)

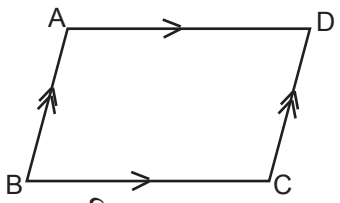
समानान्तर चतुर्भुजका गुण अथवा विशेषताहरू

1. सबै समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
2. सबै समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
3. सबै समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजन हुन्छन् ।

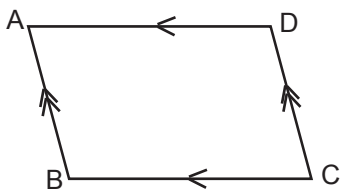
माथिका समानान्तर चतुर्भुजका गुणहरूको परीक्षणलाई तल क्रमश: प्रस्तुत गरिएको छ ।

परीक्षण 1. समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

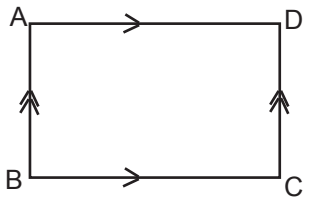
तलका प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुज ABCD का सम्मुख कोणहरू नाप र तल दिइएको तालिका भर :



चित्र न. *1*



चित्र न. *2*



चित्र न. *3*

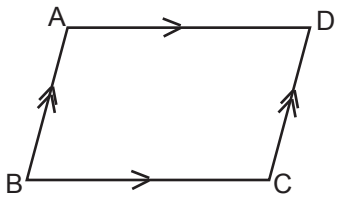
चित्र न.	सम्मुख कोणहरूको नाप		सम्मुख कोणहरूको नाप		परिणाम
	∠ABC	∠ADC	∠BAD	∠BCD	
1.					
2.					
3.					

➨माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख । आफ्नो निष्कर्षलाई साथीसँग छलफल गर ।

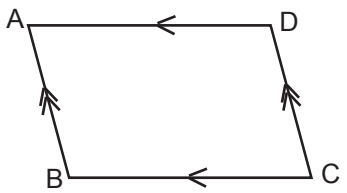
निष्कर्ष : समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

परीक्षण 2. समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।

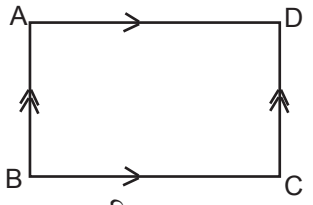
तलका प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुज ABCD का सम्मुख भुजाहरू नाप र तालिका भर :



चित्र न. *1*



चित्र न. *2*



चित्र न. *3*

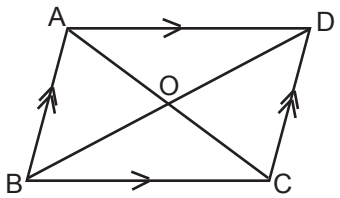
चित्र नं.	सम्मुख भुजाहरूको नाप		सम्मुख भुजाहरूको नाप		परिणाम
	AB	DC	AD	BC	
1.					
2.					
3.					

➨माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख । आफ्नो निष्कर्षलाई साथीसँग छलफल गर ।

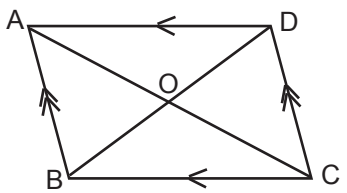
निष्कर्ष : समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।

परीक्षण 3. समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजन हुन्छन् ।

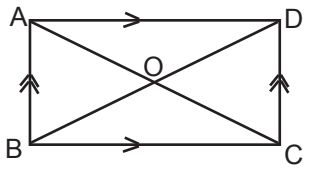
तलका प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुजहरू ABCD का विकर्णहरूका भागहरू नाप र तालिकामा भर :



चित्र नं. *1*



चित्र नं. *2*



चित्र नं. *3*

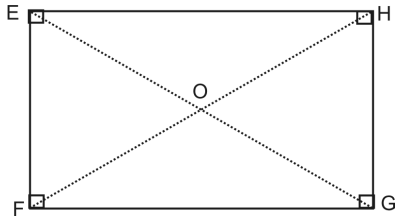
चित्र नं.	विकर्ण BD का भागहरू र नाप		विकर्ण AC का भागहरू र नाप		परिणाम
	BO	OD	AO	OC	
1.					
2.					
3.					

➨ माथिको तालिकाको आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? आफ्नो निष्कर्षलाई साथीसँग छलफल गर ।

निष्कर्ष : समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजन हुन्छन् ।

नोट : शिक्षकसँग सल्लाह गरी कागज पट्याउने विधिबाट समानान्तर चतुर्भुजका गुणहरूको खोजी गर्ने अभ्यास गर ।

2. आयतका गुणहरूको खोजी



तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

चित्रमा EFGH एउटा आयत हो । कसरी ? छलफल गर ।

(क) आयत भनेको के हो ? परिभाषा लेख ।

(ख) कुनै एउटा आयत बनाई त्यसको नामकरण गर ।

(ग) आयतका के के गुणहरू हुन सक्लान् ? साथीसँग छलफल गर ।

यदि समानान्तर चतुर्भुजको एउटा कोण 90^0 को छ भने त्यस समानान्तर चतुर्भुजलाई आयत (Rectangle) भनिन्छ ।

आयतमा समानान्तर चतुर्भुजका सबै गुणहरू हुन्छन् । साथै विकर्णहरू आपसमा बराबर हुन्छन् ।

अब माथिको आयतको परिभाषा र क्रियाकलापका आधारमा आयतका निम्नानुसारका गुणहरूको खोजी गर्ने प्रयास गर । (चित्र बनाएर तथा कागज पट्याएर)

आयतका गुण वा विशेषताहरू

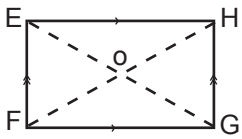
1. सबै आयतका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
2. सबै आयतका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
3. सबै आयतका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजन हुन्छन् ।
4. आयतका विकर्णहरू आपसमा बराबर हुन्छन् ।
5. आयतको प्रत्येक कोण 90° हुन्छ ।

माथिका आयतका 1, 2 र 3 नम्बरका विशेषताहरूलाई समानान्तर चतुर्भुजका गुणहरूको परीक्षणका आधारमा खोजी/परीक्षण गरेर शिक्षकलाई देखाऊ ।

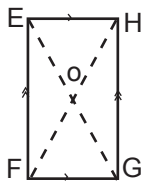
माथिका आयतका गुणहरूमध्ये 3 र 4 का गुणहरूको परीक्षणलाई तल क्रमशः प्रस्तुत गरिएको छ ।

4. आयतका विकर्णहरू आपसमा बराबर हुन्छन् ।

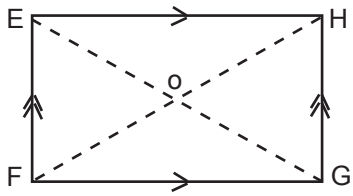
तलका चित्रहरूमा आयतका दुवै विकर्णहरू EG र FH नापेर तलको तालिकामा भर :



चित्र न. *1*



चित्र न. *2*



चित्र न. *3*

चित्र न.	विकर्णहरूको नाप		परिणाम
	EG	FH	
1.			
2.			
3.			

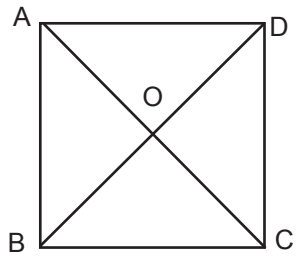
➨माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख । आफ्नो निष्कर्षलाई साथीसँग छलफल गर ।

निष्कर्ष : आयतका विकर्णहरू आपसमा बराबर हुन्छन् ।

नोट : शिक्षकको सहायतामा कागज पट्याउने विधिबाट आयतका गुणहरूको खोजी गर्ने अभ्यास गर ।

3. वर्ग (Square) का गुणहरूको खोजी

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :



(क) दिइएको चित्रमा ABCD एउटा वर्ग हो, कसरी ?

(ख) वर्ग भनेको के हो ? परिभाषा लेख ।

(ग) कुनै एउटा वर्ग बनाई त्यसको नामकरण गर ।

(घ) वर्गका के के गुणहरू हुन सक्लान् ? साथीसँग छलफल गर ।

आसन्न भुजाहरू बराबर भएको आयतलाई वर्ग (Square) भनिन्छ ।

वर्गमा समानान्तर चतुर्भुज र आयतका सबै गुणहरू हुन्छन् ।

अब माथिको वर्गको परिभाषा र आयतका गुणहरूको खोजी गर्ने क्रियाकलापका आधारमा वर्गका निम्नानुसारका गुणहरूको खोजी गर्ने प्रयास गर । (चित्र बनाएर तथा कागज पट्याएर)

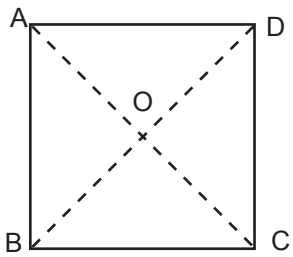
वर्गका सम्भाव्य गुण तथा विशेषताहरू

1. वर्गका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
2. वर्गका दुवै विकर्णहरू आपसमा बराबर हुन्छन् ।
3. वर्गका विकर्णहरू परस्पर समकोण हुने गरी समद्विभाजन हुन्छन् ।
4. वर्गका प्रत्येक विकर्णले शीर्षकोणलाई आधा गर्छ ।

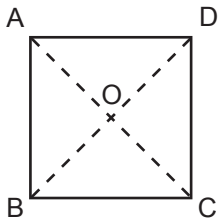
माथिका वर्गका 1 र 2 नम्बरका गुण तथा विशेषताहरूलाई समानान्तर चतुर्भुज र आयतका गुणहरूका आधारमा खोजी/परीक्षण गरेर शिक्षकलाई देखाऊ ।

3. सबै वर्गका विकर्णहरू परस्पर समकोण हुने गरी समद्विभाजन हुन्छन् ।

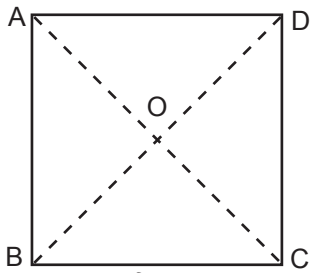
दिइएका प्रत्येक वर्ग ABCD का निम्न भागहरू नापेर तलको तालिकामा भर । (प्रत्येक चित्रका लागि तालिकामा दिइए जस्तै छुट्टा छुट्टै तीन तीनओटा तालिका बनाऊ ।)



चित्र न. *1*



चित्र न. *2*



चित्र न. *3*

चित्र	विकर्ण AC र BD का भागहरूको नाप				विकर्णले बनाएका कोणहरूको नाप				परिणाम
	AO	OC	BO	OD	∠AOB	∠AOD	∠DOC	∠COB	
1.									
2.									
3.									

माथिका तालिकाबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख र कक्षामा छलफल गर ।

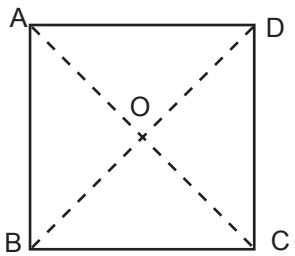
माथिको प्रत्येक वर्ग ABCD मा विकर्णहरूले बनाएका कोणहरू ∠AOB = ∠AOD = ∠DOC = ∠COB = 90° = एक समकोण छन् । त्यसैगरी विकर्ण AC का भाग AO = OC तथा विकर्ण BD का भाग BO = OD छन् ।

अब, माथिको तालिका र छलफलका आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख र कक्षामा छलफल गर ।

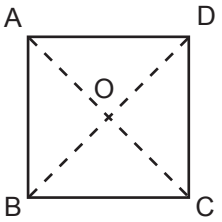
निष्कर्ष : वर्गका विकर्णहरू परस्पर समकोण हुने गरी समद्विभाजन हुन्छन् ।

4. वर्गका प्रत्येक विकर्णले शीर्षकोणलाई आधा गर्छन् ।

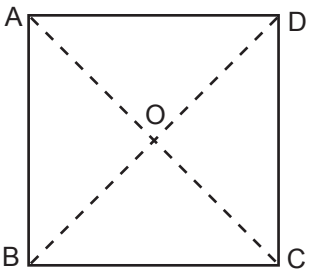
तल दिइएका प्रत्येक वर्ग ABCD का कोणहरू नापी तलको तालिका भर : (प्रत्येक चित्रका लागि छुट्टा छुट्टै तालिकामा दिइए जस्तै तीन तीनओटा तालिका बनाऊ ।)



चित्र न. 1



चित्र न. 2



चित्र न. 3

चित्र नं. 1 का लागि :

शीर्षकोणको नाप	शीर्षकोणका सहायक कोणहरूको नाप		परिणाम
∠BAD = ...	∠BAO = ...	∠OAD = ...	
∠ADC = ...	∠ADO = ...	∠ODC = ...	
∠DCB = ...	∠DCO = ...	∠OCB = ...	
∠ABC = ...	∠ABO = ...	∠OBC = ...	

माथिको तालिकाका आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख । आफ्नो निष्कर्षका बारेमा कक्षामा छलफल गर ।

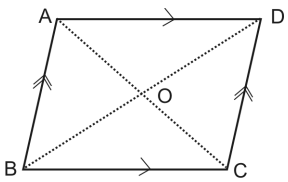
माथिको वर्ग ABCD मा शीर्षकोणहरू ∠BAD लाई विकर्ण AC ले आधा गरेको छ । शीर्षकोण ∠ADC लाई विकर्ण BD ले आधा गरेको छ । शीर्षकोण ∠DCB लाई विकर्ण AC ले आधा गरेको छ र शीर्षकोण ∠ABC लाई विकर्णले BD आधा गरेको छ ।

अब, तिम्रो निष्कर्षलाई तलको निष्कर्षसँग तुलना गरेर हेर ।

निष्कर्ष : वर्गका प्रत्येक विकर्णले शीर्षकोणलाई आधा गर्छन् ।

नोट : शिक्षकसँग सल्लाह गरी कागज पट्याउने विधिबाट वर्गका गुणहरूको खोजी गर्ने अभ्यास गर ।

2.4 समबाहु चतुर्भुज (Rhombus) का गुणहरूको खोजी



तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) समबाहु चतुर्भुज भनेको के हो ?

(ख) कुनै एउटा समबाहु चतुर्भुज बनाई त्यसको नामकरण गर ।

(ग) समबाहु चतुर्भुजका गुणहरू के के हुन सक्लान् ? साथीसँग छलफल गर ।

आसन्न भुजाहरू बराबर भएको समानान्तर चतुर्भुजलाई समबाहु चतुर्भुज (Rhombus) भनिन्छ ।

समबाहु चतुर्भुजमा समानान्तर चतुर्भुजका सबै गुणहरू हुन्छन् ।

अब माथिको समबाहु चतुर्भुजको परिभाषा र माथि समानान्तर चतुर्भुज, आयत र वर्गका गुणहरूको खोजी गर्ने क्रियाकलापका आधारमा समबाहु चतुर्भुजका निम्नानुसारका गुणहरूको खोजी गर्ने प्रयास गर । (चित्र बनाएर तथा कागज पट्याएर)

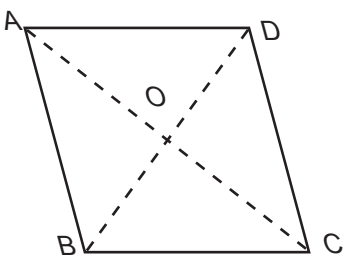
समबाहु चतुर्भुजका गुण तथा विशेषताहरू

1. समबाहु चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
2. समबाहु चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
3. समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समकोण हुने गरी समद्विभाजन हुन्छन् ।
4. समबाहु चतुर्भुजका प्रत्येक विकर्णले शीर्षकोणलाई आधा गर्छ ।

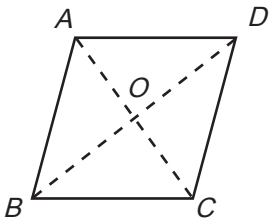
माथिका समबाहु चतुर्भुजका 1 र 2 नम्बरका गुण तथा विशेषताहरूलाई समानान्तर चतुर्भुज गुणहरूको परीक्षणका आधारमा खोजी/परीक्षण गरेर शिक्षकलाई देखाऊ ।

3. **समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समकोण हुने गरी समद्विभाजन हुन्छन् ।**

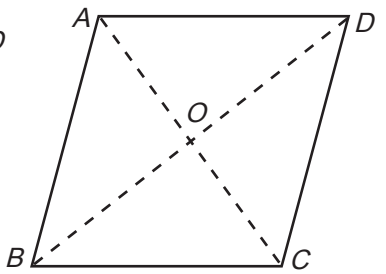
तल दिइएका प्रत्येक समबाहु चतुर्भुज ABCD का निम्न भागहरू नापेर तलको तालिका भर :



चित्र न. 1



चित्र न. 2



चित्र न. 3

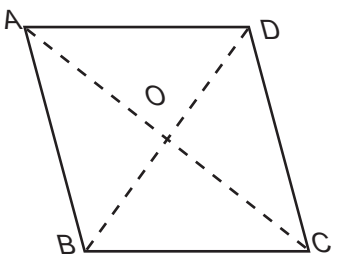
चित्र	विकर्ण AC र BD का भागहरूको नाप				विकर्णले बनाएका कोणहरूको नाप				परिणाम
	AO	OC	BO	OD	∠AOB	∠AOD	∠DOC	∠COB	
1.									
2.									
3.									

माथिका तालिकाबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख र कक्षामा छलफल गर ।

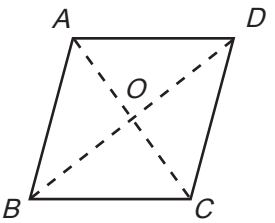
निष्कर्ष : समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समकोण हुने गरी समद्विभाजन हुन्छन् ।

4. समबाहु चतुर्भुजका प्रत्येक विकर्णले शीर्षकोणलाई आधा गर्छन् ।

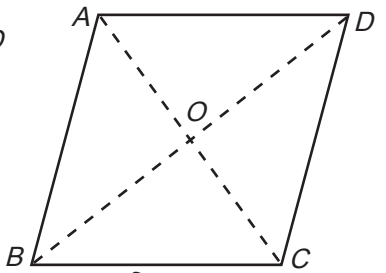
तल दिइएका प्रत्येक समबाहु चतुर्भुज ABCD का निम्नानुसारका कोणहरू नापी तलको तालिका भर : (प्रत्येक चित्रका लागि छुट्टाछुट्टै तालिकामा दिइए जस्तै तीन तीनओटा तालिका बनाऊ ।)



चित्र न. 1



चित्र न. 2



चित्र न. 3

चित्र न. 1 का लागि

शीर्षकोणको नाप	शीर्षकोणका सहायक कोणहरूको नाप		परिणाम
∠BAD = ...	∠BAO = ...	∠OAD = ...	
∠ADC = ...	∠ADO = ...	∠ODC = ...	
∠DCB = ...	∠DCO = ...	∠OCB = ...	
∠ABC = ...	∠ABO = ...	∠OBC = ...	

माथिको तालिकाका आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख । आफ्नो निष्कर्षलाई कक्षामा छलफल गर ।

माथिको समबाहु चतुर्भुज ABCD मा शीर्षकोणहरू ∠BAD लाई विकर्ण AC ले आधा गरेको छ । शीर्षकोण ∠ADC लाई विकर्ण BD ले आधा गरेको छ । शीर्षकोण ∠DCB लाई विकर्ण AC ले आधा गरेको छ र शीर्षकोण ∠ABC लाई विकर्ण BD ले आधा गरेको छ ।

अब, तिम्रो निष्कर्षलाई तलको निष्कर्षसँग तुलना गरेर हेर ।

निष्कर्ष : समबाहु चतुर्भुजका प्रत्येक विकर्णले शीर्षकोणलाई आधा गर्छन् ।

नोट : शिक्षकको सहयोगमा कागज पट्याउने विधिबाट समबाहु चतुर्भुजका गुणहरूको खोजी गर्ने अभ्यास गर ।

अभ्यास 2.2

1. **तलका भनाइ सत्य छन् वा छैनन्, छुट्याऊ :**

   (क) समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।

   (ख) आयतका सबै गुणहरू समानान्तर चतुर्भुजमा पनि हुन्छन् ।

   (ग) वर्गका सबै गुणहरू आयतमा पनि हुन्छन् ।

   (घ) समबाहु चतुर्भुजका सबै गुणहरू आयतका गुणसँग मिल्छन् ।

2. समानान्तर चतुर्भुजका कुन कुन गुणहरू आयतसँग मिल्छन् ? उदाहरणसहित चित्र बनाएर देखाऊ ।

3. समबाहु चतुर्भुज र वर्गका गुणहरूमा के फरक छ ? चित्र र उदाहरणसहित पुष्टि गर ।

4. तलको तालिकामा प्रत्येक चतुर्भुजका गुणहरूको सूची तयार पार । प्रत्येकका समान र असमान गुणहरू छुट्याएर लेख :

क्र.स.	समान/असमान गुण	समानान्तर चतुर्भुज	आयत	वर्ग	समबाहु चतुर्भुज
1.	समान गुण				
2.	असमान गुण				

5. 4cm एउटा भुजा भएको वर्ग बनाई यसका कुनै दुईओटा गुणहरूको खोजी गरी देखाऊ ।

6. एउटा भुजाको नाप 4.5cm भएको एउटा समबाहु चतुर्भुज बनाई त्यसका कुनै दुईओटा गुणहरूको खोजी गरी देखाऊ ।

2.3 चतुर्भुजको रचना (Construction of Quadrilateral)

1. आसन्न भुजा र तिनीहरूबिचको कोण दिएर समानान्तर चतुर्भजको रचना

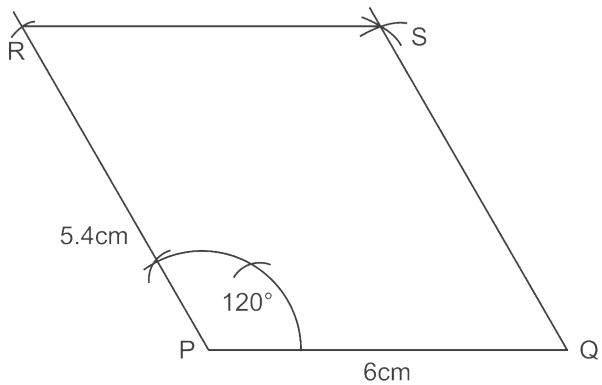
उदाहरण 1

आसन्न भुजाहरूको नाप क्रमश: 6cm र 5.4cm तथा तिनीहरूबिचको कोण 120° भएको समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर ।

समाधान

1. एउटा PQ = 6cm भएको रेखाखण्ड खिच ।
2. बिन्दु P मा कम्पासको सहायताले 120° को कोण खिच ।
3. 120° को कोण बनाउने रेखामा P बाट 5.4cm काटेर बिन्दु R पत्ता लगाऊ ।
4. R बाट 6cm र Q बाट 5.4cm चाप लिई आपसमा काटेर बिन्दु S पत्ता लगाऊ ।
5. Q र S तथा R र S जोड ।

   अब आवश्यक समानान्तर चतुर्भुज PQSR तयार भयो ।



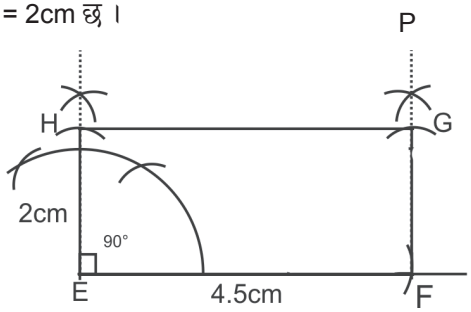
2. आसन्न भुजाहरूको नाप दिएर आयतको रचना

उदाहरण 2

एउटा आयत EFGH खिच, जसमा EF = 4.5cm र EH = 2cm छ ।

समाधान : रचना गर्ने तरिका

1. सर्वप्रथम आधार रेखा EF = 4.5cm खिच ।
2. कम्पास र रुलरका सहायताले बिन्दु E मा 90° को कोण खिच ।
3. बिन्दु E मा 90° कोण बनाउने रेखामा 2cm नापेर बिन्दु H पत्ता लगाऊ ।



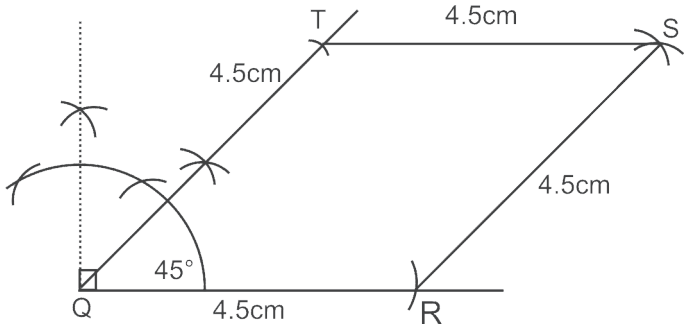
4. बिन्दु H बाट 4.5cm को चाप F बाट 2cm को चाप लिई आपसमा काटेर बिन्दु G पत्ता लगाऊ ।
5. बिन्दु G र H तथा F र G जोड ।

   अब, आवश्यक आयत EFGH तयार भयो ।

3. भुजा र कोणको नाप दिएर समबाहु चतुर्भुजको रचना

उदाहरण 3

समस्या : भुजाहरू 4.5cm र आसन्न भुजाहरूले बनाएको एउटा कोण 45° भएको एउटा समबाहु चतुर्भुजको रचना गर ।



समाधान : रचना गर्ने तरिका

1. सर्वप्रथम कुनै आधार रेखा QR = 4.5 cm हुने गरी एउटा रेखाखण्ड खिच ।
2. बिन्दु Q मा कम्पास र रुलर को प्रयोग गरी 45° को कोण रचना गर ।
3. बिन्दु Q को 45° कोण बनाउने रेखमा 4.5cm नापेर बिन्दु T पत्ता लगाऊ ।
4. बिन्दु R र T बाट 4.5cm कै चापहरू लिएर आपसमा काटेर बिन्दु S पत्ता लगाऊ ।
5. T र S तथा S र R जोड ।

   अब आवश्यक समबाहु चतुर्भुज QRST तयार भयो ।

अभ्यास 2.3

1. **तलका प्रत्येक अवस्थामा समानान्तर चतुर्भुज EFGH को रचना गर :**

   (क) EF = 4cm, EH = 5cm र ∠E = 60° (ख) HG = 6cm, FG = 6.5cm र ∠G = 45°

2. **कुनै दुई आसन्न भुजाहरूबिचको कोण निम्नानुसार भएको समानान्तर चतुर्भुज रचना गर्ने समस्या बनाऊ । प्रत्येक समस्याबाट समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर ।**

   (क) 75° (ख) 30° (ग) 105° (घ) 135° (ङ) 15°

3. **तलका प्रत्येक अवस्थामा कम्पासको प्रयोग गरी आयतको रचना गर :**

   (क) आसन्न भुजाहरू 6cm र 5cm

   (ख) आसन्न भुजाहरू 4.8cm र 3.2cm

4. **आसन्न भुजाहरूको नाप दिइएका कुनै 2 ओटा आयतको रचना गर्ने समस्या बनाऊ । सोअनुसारका आयतको रचना गर ।**

5. **तलका प्रत्येक अवस्थामा कम्पास र रुलरको प्रयोग गरी समबाहु चतुर्भुजको रचना गर :**

   (क) प्रत्येक भुजाहरू 5cm र आसन्न भुजाहरूले बनाएको कोण 60°

(ख) प्रत्येक भुजाहरू 4.5cm र आसन्न भुजाहरूले बनाएको कोण 105°

(ग) प्रत्येक भुजाहरू 6.4cm र आसन्न भुजाहरूले बनाएको कोण 135°

6. **आसन्न भुजाहरूले बनाएको कोण निम्नानुसार भएका फरक फरक समबाहु चतुर्भुजका रचना गर्ने 4 ओटा समस्या बनाऊ । प्रत्येक समस्याबाट समबाहु चतुर्भुजको रचना गर :**

(क) 90° (ख) 120°

(ग) 75° (घ) 15°

7. माथि प्रश्न नं. 1 देखि 6 सम्म दिइए जस्तै गरी एक एक ओटा थप समस्या बनाऊ/खोज । आफैँले समाधान गर । साथीसँग आपसमा साटेर समाधान गर । आफ्नो र साथीको समाधानलाई तुलना गरेर हेर र छलफल गर ।

2.4 नियमित बहुभुज (Regular Polygon)

1. बहुभुजका भित्री र बाहिरी कोणहरू

तल दिइएका बहुभुजसम्बन्धी धारणाहरू तथा क्रियाकलापमा छलफल गर :

(क) बहुभुज भनेको के हो ? लेख ।

(ख) कुनै तीनओटा बहुभुजको चित्र लेखेर देखाऊ ।

(ग) नियमित बहुभुज र सामान्य बहुभुजमा के फरक छ ?

(घ) कस्तो बहुभुजलाई नियमित बहुभुज भनिन्छ ?

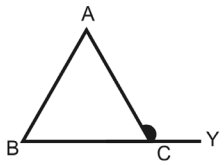
(ङ) कुनै दुईओटा नियमित र अनियमित बहुभुजको चित्र कोरेर देखाऊ ।

- तीन वा तीनभन्दा बढी भुजाहरूले बनेको सरल बन्द समतलीय आकृतिलाई बहुभुज (Polygon) भनिन्छ ।
- बहुभुजका सबै भुजाहरू बराबर छन् र भित्री कोणहरू पनि बराबर छन् भने त्यस्तो बहुभुजलाई नियमित बहुभुज (Regular polygon) भनिन्छ ।
- नियमित बहुभुजका उदाहरण समबाहु त्रिभुज, वर्ग आदि हुन् ।

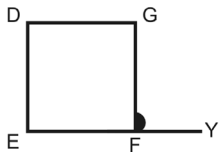
तलका चित्रहरूमा प्रत्येक बहुभुजहरूका एउटा भुजालाई एकातर्फ बिन्दु Y सम्म लम्ब्याउँदा बनेका कोणहरूलाई छाया पारेर छुट्याइएको छ ।

चित्रका आधारमा तलका प्रश्नहरूको जवाफ देऊ :

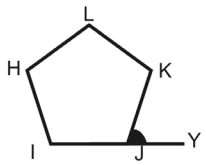
1. तलका चित्रहरू के केका हुन् ? नाम लेख ।
2. त्रिभुज ABC को भित्री कोण र बाहिरी कोणको नाम लेख । जम्मा कतिओटा भित्री कोण छन् ?
3. चित्र 3 को HIJKL केको चित्र हो ? यसका भित्री र बाहिरी कोणको नाम लेख ।



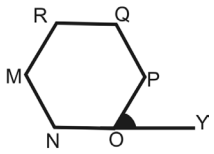
चित्र न. 1



चित्र न. 2



चित्र न. 3



चित्र न. 4

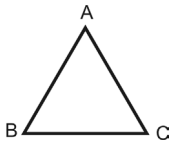
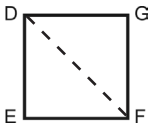
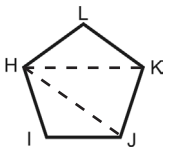
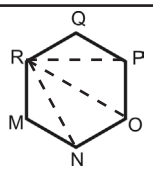
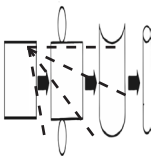
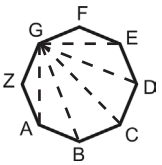
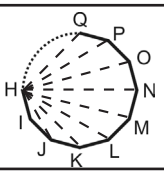
माथिका चित्रहरू क्रमश: त्रिभुज, चतुर्भुज, पञ्चभुज, षड्भुजका चित्रहरू हुन् । चित्र 3 को चित्र HIJKL पञ्चभुज हो । यसमा 5 ओटा कोण र 5 ओटा भुजाहरू छन् । यसका भित्री कोणहरू ∠IHL, ∠HLK, ∠LKJ, ∠KJI र ∠JIH छन् । यस पञ्चभुज HIJKL को एउटा भुजा IJ लाई बिन्दु Y सम्म लम्ब्याउँदा बनेको KJY पञ्चभुज HIJKL को बाहिरी कोण हो ।

बहुभुजका भुजाहरूले भित्रपट्टि बनाएका कोणहरूलाई भित्री कोणहरू (Interior Angles) भनिन्छ । कुनै पनि बहुभुजको एउटा भुजालाई लम्ब्याउँदा बाहिरपट्टि बनेको कोणलाई बाहिरी कोण (Exterior Angles) भनिन्छ ।

4. माथिका प्रत्येक चित्रमा भित्री र बाहिरी कोण छुट्याएर लेखी कक्षामा छलफल गर ।
5. माथिका प्रत्येक चित्रका भुजाहरू क्रमश: BA, ED, IH र NM लाई लम्ब्याएर बिन्दु X सम्म पुऱ्याऊ । अब बन्ने प्रत्येक चित्रका भित्री र बाहिरी कोणहरू छुट्याएर लेख ।

2. बहुभुजका भित्री कोणहरू र तिनीहरूको नाप

तल दिइएका चित्रहरू र तालिका अभ्यास पुस्तिकामा सार । प्रत्येक चित्रमा दिए जस्तै विकर्णहरू रचना गर र तालिकामा भर :

क्रस.	बहुभुजको नाम	भुजाको सङ्ख्या	त्रिभुजको सङ्ख्या	भित्री कोणको जोड
1.	त्रिभुज (Triangle) 	3	1 = 3 -2	180° = 180° x (3 - 2)
2.	चतुर्भुज (Quadri lateral) 	4	2 = 4 - 2	360° = 180° x (4 - 2)
3.	पञ्चभुज (Pentagon) 	5	3 = 5 - 2	540° = 180° x (5-2)
4.	षड्भुज (Hexagon) 	------	------	------
5.	सप्तभुज (Heptagon) 	------	------	------
6.	अष्टभुज (Octagon) 	------	------	------
7.	..... 	n	n-2	180° x (n-2)

(क) माथिको चित्रमा चतुर्भुज DEFG लाई विकर्ण DF ले कतिओटा त्रिभुजमा विभाजन गरेको छ ?

(ख) चर्तुभुज DEFG का भित्री कोणहरूको योगफल कति हुन्छ ? कसरी ?

(ग) चित्रमा पञ्चभुज HIJKL मा कति ओटा त्रिभुजहरू छन् ?

(घ) पञ्चभुज HIJKL का भित्री कोणहरूको योगफल कति हुन्छ ?

(ङ) माथिका छलफलका आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख ।

(च) के तिम्रो निष्कर्ष तल दिइएको निष्कर्षसँग मिल्छ ? तुलना गरेर हेर ।

1. चर्तुभुजका भित्री कोणहरूको योगफल = 2 x (त्रिभुजको भित्री कोणको योगफल) = 2 x 180° = 360°
2. पञ्चभुजको भित्री कोणहरूको योगफल = 3 x (त्रिभुजका भित्री कोणको योगफल) = 3 x 180° = 540°

(छ) के माथिकै तरिकाबाट अन्य बहुभुजहरू, षड्भुज, सप्तभुज, अष्टभुजका भित्री कोणहरूको योगफल निकाल्न सक्छौ ? प्रयास गरी हेर ।

(ज) माथिका क्रियाकलापका आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख ।

निष्कर्ष : बहुभुजका भित्री कोणहरूको योगफल = 180° x (भुजाहरूको सङ्ख्या - 2) = 180° x (n - 2) हुन्छ ।

3. नियमित बहुभुजहरूको भित्री कोणको नाप

हामीले कुनै पनि बहुभुजको भित्री कोणको योगफल = 180° x (n - 2) हुन्छ भन्ने कुरा पत्ता लगाएका छौँ । अब हामी नियमित बहुभुजको प्रत्येक भित्री कोण पत्ता लगाउने प्रयास गरौँ ।

(क) यदि नियमित बहुभुजको भुजाको सङ्ख्या = n छ भने नियमित बहुभुजको भित्री कोणको योगफल = 180° x (n - 2) हुन्छ ।

(ख) प्रत्येक बहुभुजमा भुजा र कोणको सङ्ख्या बराबर हुन्छन् । त्यसैले n ओटा भुजा भएको नियमित बहुभुजमा n ओटा भित्री कोणहरू हुन्छन् ।

त्यसैले n भुजा भएको नियमित बहुभुजको प्रत्येक भित्री कोण = $\frac{\text{भित्री कोणको योग}}{\text{भुजाहरूको सङ्ख्या}}$ हुन्छ ।

> अत: यदि नियमित बहुभुजको प्रत्येक भित्री कोण x र भुजाहरूको सङ्ख्या n छ भने,
>
> प्रत्येक भित्री कोण $(x) = \frac{180^\circ \times (n-2)}{n}$ हुन्छ ।

तलको उदाहरण अध्ययन गरी छलफल गर । आफूले पनि उदाहरणका समस्या समाधान गर्ने प्रयास गर ।

उदाहरण 1

नियमित पञ्चभुजको भित्री कोणको मान निकाल ।

समाधान

यहाँ नियमित पञ्चभुजमा भुजाको सङ्ख्या (n) = 5

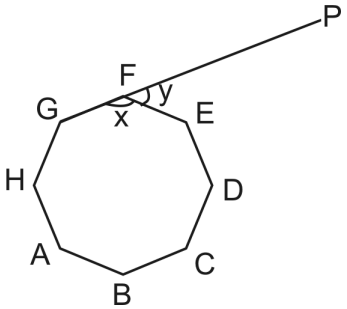
भित्री कोण (x) = ?

सूत्रअनुसार, बहुभुजको भित्रीकोण $(x) = \frac{180^\circ \times (n-2)}{n}$

अथवा $(x) = \frac{180^\circ \times (5-2)}{n} = \frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = \frac{180^\circ \times 3}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$

तसर्थ, नियमित पञ्चभुजको प्रत्येक भित्री कोणको मान 108° हुन्छ ।

4. नियमित बहुभुजको बाहिरी कोणको नाप



हामीले नियमित बहुभुजको भित्री कोणको नाप निकाल्ने तरिका र सूत्र पत्ता लगायौँ । अब हामी नियमित बहुभुजको बाहिरी कोण पत्ता लगाउने तरिका र यसको सूत्र पत्ता लगाउने प्रयास गरौँ ।

सँगैको चित्र एउटा नियमित बहुभुजको चित्र हो । यसमा भुजा GF लाई बिन्दु P सम्म लम्ब्याउँदा बन्ने बाहिरी कोण $\angle PFE = y$ मानौँ । त्यस्तै y को आसन्न कोण $\angle GFE = x$ मानौँ ।

अब, $x + y = \angle GFP$ (सिङ्गो टुक्रे तथ्य)

अथवा, $x + y = 180°$ ($\angle GFP$ सरल कोण भएकाले)

अथवा, $y = 180 - x = 180 \frac{180° \times (n-2)}{n} = \frac{180°n - 180°n + 360°}{n} = \frac{360°}{n}$ $\therefore$ $y = \frac{360°}{n}$

➨ माथिको क्रियाकलापबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख ।

निष्कर्ष : नियमित बहुभुजको बाहिरी कोण $(y) = \frac{360°}{n}$ हुन्छ, जहाँ n = बहुभुजका भुजाहरूको सङ्ख्या छ ।

तलको उदाहरण अध्ययन गरी छलफल गर । आफूले पनि उदाहरणका समस्या समाधान गर्ने प्रयास गर ।

उदाहरण 2 नियमित षड्भुजको बाहिरी कोण पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, नियमित षड्भुजको भुजाको सङ्ख्या (n) = 6

बाहिरी कोण (y)= ?

सुत्रानुसार, नियमित बहुभुजको बाहिरी कोण $(y) = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{6} = 60°$

तसर्थ, नियमित षड्भुजको बाहिरी कोण = 60° हुन्छ ।

अभ्यास 2.4

1. **तल दिइएका नियमित बहुभुजको भित्री कोणको सूत्र प्रयोग गरी नाप पत्ता लगाऊ :**

   (क) त्रिभुज (Triangle) (ख) चतुर्भुज (Quadrilateral) (ग) पञ्चभुज (Pentagon)
   (घ) षड्भुज (Hexagon) (ङ) अष्टभुज (Octagon) (च) नवभुज (Nonagon)
   (छ) दशभुज (Decagon) (ज) द्वादशभुज (Dodecagon)

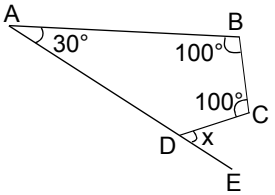
2. **तल दिइएका प्रत्येक नियमित बहुभुजको बाहिरी कोणको सूत्र प्रयोग गरी नाप पत्ता लगाऊ :**

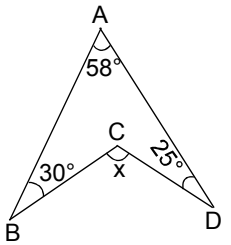
   (क) त्रिभुज (Triangle) (ख) चतुर्भुज (Quadrilateral) (ग) पञ्चभुज (Pentagon)

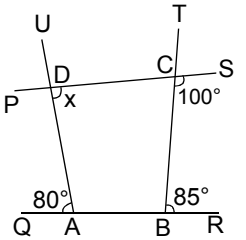
(घ) षड्भुज (Hexagon) (ङ) अष्टभुज (Octagon) (च) नवभुज (Nonagon)

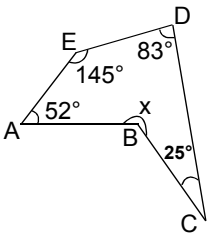
(छ) दशभुज (Decagon) (ज) द्वादशभुज (Dodecagon)

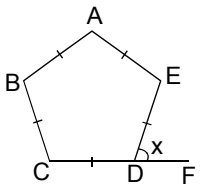
3. **तल दिइएका बहुभुजहरूमा X को मान पत्ता लगाऊ :**

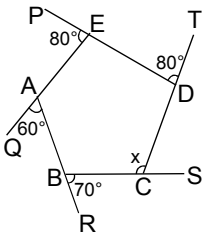
(क)


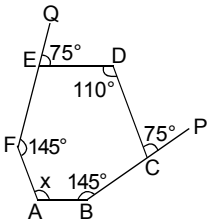
(ख)


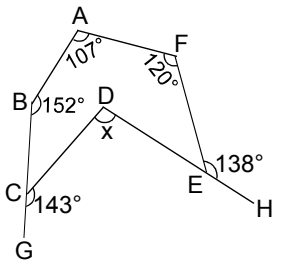
(ग)


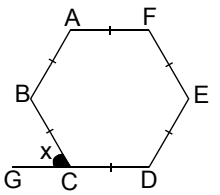
(घ)


(ङ)


(च)


(छ)


(ज)


(झ)


4. त्रिभुज XYZ को एउटा भुजा YZ लाई P सम्म लम्ब्याइएको छ ।

(क) $\angle XZP + \angle XZY = ?$

(ख) $\angle XZP = ?$

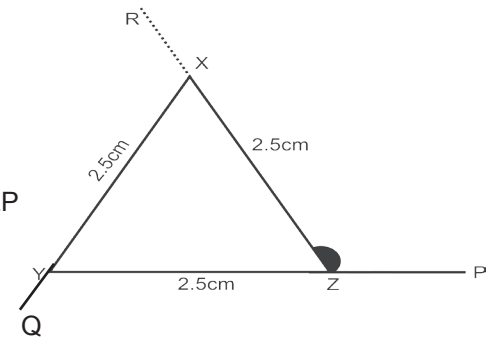
(ग) $\angle X + \angle Y = ?$

(घ) $\angle XYZ = ?$

(ङ) $\angle YXZ = ?$

(च) के $\angle X$ र $\angle Y$ को योगफलसँग $\angle XZP$ को नाप बराबर छ ?

(छ) (च) का आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख ।



(ज) यदि भुजा ZX लाई R सम्म लम्ब्याइयो भने $\angle RXY$ कुन कुन कोणको योगफलसँग बराबर हुन्छ ।

(झ) भुजा XY लाई Q सम्म लम्ब्याउँदा $\angle YXZ + \angle XZY$ कुन कोणसँग बराबर हुन्छ ?

एकाइ 3 समरूपता र अनुरूपता (Similarity and Congruency)

3.1 समरूप र अनुरूप आकृतिको परिचय (Introduction of Similar and Congruent Figures)

1. समरूप आकृतिहरू (Similar Figures)

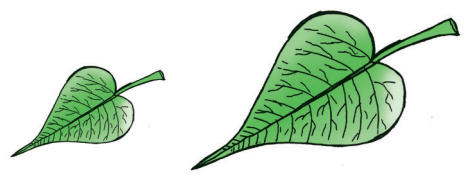
तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) दिइएका जोडी चित्रहरू अध्ययन गर । के समानता छ ? लेख र साथीसँग छलफल गर ।

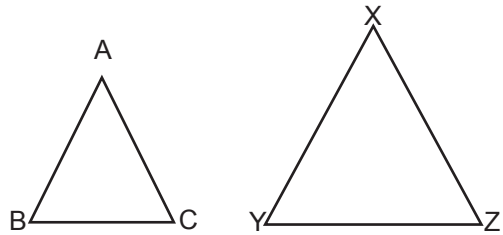
(ख) दिइएका प्रत्येक जोडी चित्रहरू (ट्रेसिङ पेपरको सहायताले) कापीमा बनाऊ ।

(ग) एउटा ठुलो चित्रलाई अर्को जोडी चित्रसँग खप्ट्याऊ (माथि राख) र तुलना गरी हेर ।

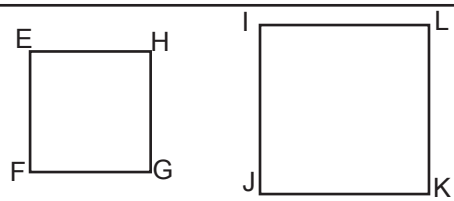
(घ) निष्कर्षलाई लेख र साथीसँग छलफल गर । दिइएका चित्रहरूमा प्रत्येक जोडी चित्रहरू उस्तै आकारका छन् । तर दुवै जोडी चित्रहरू साना ठुला तथा फरक फरक नापका छन् । यस्ता चित्रहरूलाई समरूप चित्र वा समरूप आकृतिहरू भनिन्छ ।



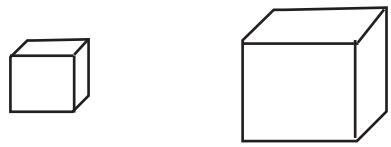
चित्र नं. 3.1



चित्र नं. 3.2



चित्र नं. 3.3



चित्र नं. 3.4

उदाहरण 1

चित्र 3.1 मा दुईओटा पातका आकृतिहरू छन् । यी चित्रहरू उस्तै आकारका छन् । तर यिनीहरू एक अर्कामा साना ठुला अर्थात् आकारमा फरक छन् ।

(ङ) त्यस्तै चित्र 3.2, 3.3 र 3.4 का प्रत्येक जोडी चित्रहरूमा के के समानता र के के फरक छन् ? लेख र साथीसँग छलफल गर ।

(च) माथिका सम्पूर्ण क्रियाकलापहरूका आधारमा समरूप आकृतिको परिभाषा लेख । आफूले लेखेको परिभाषालाई साथी समूह तथा कक्षामा छलफल गर । के तिमीले छलफल गरी लेखेको परिभाषा तलको परिभाषासँग मिल्छ ? तुलना गरी हेर ।

> उस्तै आकार तर फरक नाप भएका आकृतिहरूलाई समरूप आकृतिहरू भनिन्छ ।

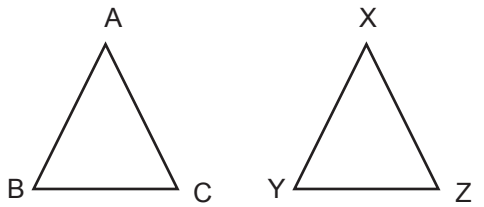
2. अनुरूप आकृतिहरू (Congruent Figures)

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

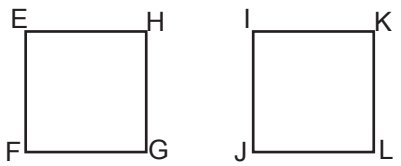
(क) दिइएका जोडी चित्रहरू अध्ययन गर । के के कुरामा समानता छ ? लेख र साथीसँग छलफल गर ।

(ख) दिइएका प्रत्येक जोडी चित्रहरूलाई कापीमा बनाऊ । (ट्रेसिङ पेपरको सहायताले) आफूले बनाएका ती प्रत्येक जोडी चित्र काट अथवा फोटोकपी गर । एउटा चित्रमाथि अर्को जोडी चित्र राख र तुलना गरी हेर । निष्कर्षलाई कापीमा लेख र साथीसँग छलफल गर ।

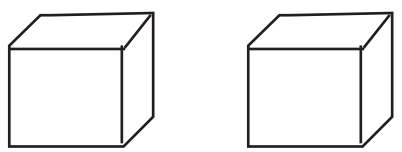
दिइएका चित्रहरूमा प्रत्येक जोडी चित्रहरू उस्तै आकारका छन् । त्यस्तै प्रत्येक जोडी चित्रहरू नापमा पनि बराबर छन् । यस्ता चित्रहरूलाई अनुरूप आकृति (congruent figures) भनिन्छ ।



चित्र नं. 3.5



चित्र नं. 3.6



चित्र नं. 3.7

उदाहरण 2

माथिको चित्र 3.5 मा दुवै त्रिभुजहरूका आकृतिहरू हेर्दा उस्तै आकारका छन् । त्यस्तै गरी दुवै चित्रलाई एक आपसमा खप्टाई दाँजेर हेर्दा बिन्दु A माथि बिन्दु X, बिन्दु B माथि बिन्दु Y र बिन्दु C माथि बिन्दु Z रहेका हुन्छन् । त्यसैगरी त्रिभुज ABC का रेखाहरू त्रिभुज XYZ सँग क्रमशः बराबर हुन्छन् । जस्तैः AB = XY, BC = YZ र CA = ZX ।

(ग) त्यस्तै गरी चित्रहरू 3.6 र 3.7 का प्रत्येक जोडी चित्रहरूमा के के कुराहरूमा समानता छ ? लेख र साथीसँग छलफल गर ।

(घ) माथिका सम्पूर्ण क्रियाकलापहरूका आधारमा अनुरूप आकृतिको परिभाषा लेख । आफूले लेखेको परिभाषालाई कक्षामा छलफल गर । के तिमीले लेखेको छलफलबाट प्राप्त गरेको परिभाषा तलको परिभाषासँग मिल्छ ? तुलना गरेर हेर ।

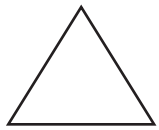
उस्तै आकार र उही नाप भएका चित्रहरूलाई अनुरूप आकृति (congruent figures) भनिन्छ ।

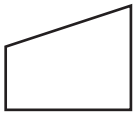
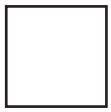
अभ्यास 3.1

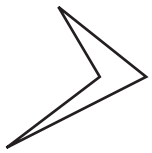
(क) तलका चित्रहरूमा कुन कुन समरूप आकृतिहरू हुन् ?

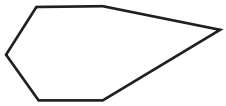
1. (अ)

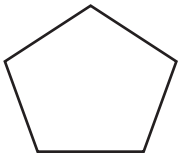
(आ)

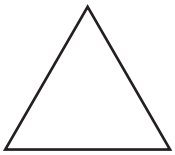
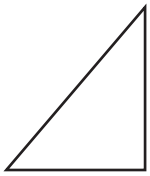
2. (अ)
(आ) 

3. (अ) 
(आ) 

4. (अ)
(आ) 

5. (अ)
(आ) 

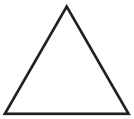
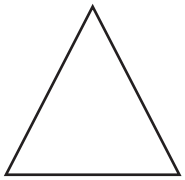
6. (अ) 
(आ)

7. (अ) 
(आ) 

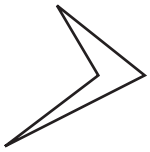
(ख) तलका कुन कुन अनुरूप आकृति हुन् ?

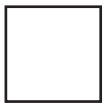
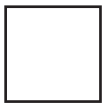
1. (अ)

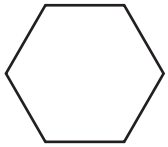
(आ)

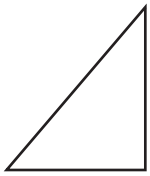
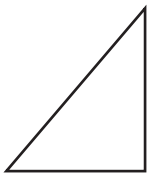
2. (अ) 
(आ) 

3. (अ)
(आ)

4. (अ)
(आ) 

5. (अ)  (आ) 

6. (अ) (आ) 

7. (अ)  (आ) 

8. (अ) (आ)

(ग) माथिका चित्रहरूका आधारमा समरूप र अनुरूप चित्रहरू छुट्याएर चित्रसहित तिनको वर्णन गर ।

(घ) तल दिइएअनुसार चित्र कोर । ती चित्रहरू समरूप वा अनुरूप के हुन्, छुट्याऊ ।

1. दुईओटा वर्गहरू एउटा 4cm र अर्को 3cm भुजा भएको

2. दुईओटा समभुज त्रिभुजहरू एउटा 3cm र अर्को 5cm भुजा भएको

(ङ) चार चारओटा समरूप र अनुरूप आकृतिहरू खिचेर देखाऊ ।

(च) तलका भनाइहरूमध्ये ठिक र बेठिक छुट्याऊ :

1. सबै वर्गहरू अनुरूप हुन्छन् ।

2. सबै वर्गहरू समरूप हुन्छन् ।

3. सबै समभुज त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् ।

4. सबै समभुज त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् ।

5. 3.5cm भुजा भएका त्रिभुजहरू आपसमा अनुरूप हुन्छन् ।

6. 3cm भुजा भएको समद्विवाहु त्रिभुज र 4cm भुजा भएको समबाहु त्रिभुज अनुरूप हुन्छन् ।

(छ) तिम्रो घर, समुदायमा पाइने कुनै 5 ओटा अनुरूप र समरूप आकृतिहरूको नाम लेख ।

एकाइ 4

वृत्त (Circle)

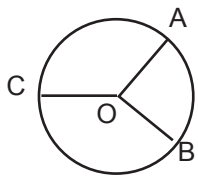
4.1 वृत्त र यसका विभिन्न भागहरू (Circle and its Different Parts)

1. वृत्तको परिचय (Introduction of Circle)

तलका क्रियाकलापहरू गर्दा केको चित्र बन्ला ? छलफल गर ।

- एउटा सिक्का लिएर बाहिरी घेरा ट्रेस गर्दा
- एउटा चुरा लिएर बाहिरी घेरा ट्रेस गर्दा
- एउटा कागतीलाई काटेर वरिपरिको घेराले कस्तो आकार देखाउँछ ?
- एउटा पेन्सिल कम्पासले एक फन्को लगाई चित्र बनाउँदा

यसरी बन्ने आकृतिहरूलाई वृत्त (circle) भनिन्छ ।



दायाँको चित्रमा OA, OB र OC को नाप लेऊ र तलको तालिका भर :

क्र.सं.	रेखाखण्डको नाप
1.	OA = ...
2.	OB = ...
3.	OC = ...

- के OA = OB = OC भयो ?

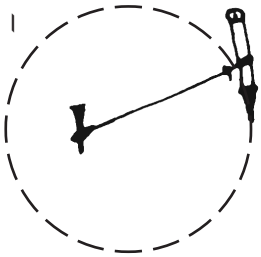
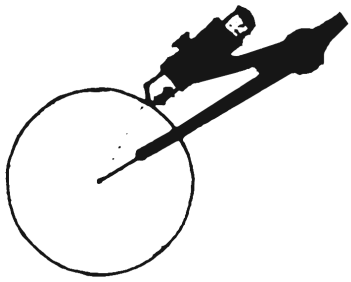
माथिको चित्रमा OA = OB = OC =1cm छ । यसरी बन्ने चित्र ABC वृत्त (circle) हो । वृत्तको बाहिरी घेरा ABC केन्द्रबिन्दु O देखि बराबर दुरीमा पर्दछ । यसलाई सङ्केतमा ABC ले जनाइन्छ ।

कुनै एउटा निश्चित बिन्दुबाट बराबर दुरीमा पर्ने बिन्दुहरूको बिन्दुपथलाई वृत्त (circle) भनिन्छ ।

२. वृत्तका विभिन्न भागहरू (Different Parts of a Circle)

तलका क्रियाकलाप गर र साथीसँग छलफल गर

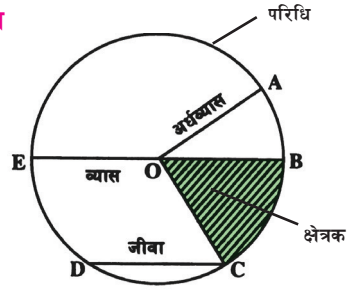
टेबलमा एउटा ठुलो आकारको कागज राख । तल दिइए जस्तै गरी दुई खण्ड बनाऊ ।

खण्ड 1	**खण्ड 2**
कागजको एउटा खण्डको बिचमा पर्ने गरी तल चित्र नं. 4.1 देखाए जस्तै गरी थम्पिनमा धागाले बाँधेर गाड । धागाको अर्को छेउ सिसाकलममा बाँधेर सिसाकलमलाई डोरीले तन्किने गरी वरिपरि घुमाऊ ।  **चित्र नं.** 4.1	कागजको अर्को खण्डको बिच भागमा चित्र नं. 4.2 मा देखाए जस्तै कम्पासको सियोलाई कुनै एक ठाउँमा अड्याएर सिसाकलम भएको चुच्चो घुमाउँदै जाऊ ।  **चित्र नं. 4.2**

तलका प्रश्नहरूका बारेमा साथीसँग छलफल गर :

1. माथिको चित्र नं 4.1 र 4.2 मा के के समानता र के के फरक छन् ?
2. माथि प्रश्न नं. 1 अनुसार बनेका दुवै चित्रलाई के भनिन्छ ?
3. उक्त चित्रमा थम्पिन गाडिएको ठाउँ वा कम्पासको सियो अडिएको ठाउँलाई के भनिन्छ ?

अब तलको चित्र र विषय वस्तु अध्ययन गरी वृत्तका भागहरू चिन



चित्र नं. 4.3

1. **वृत्तको केन्द्रबिन्दु (Centre)**

कुने पनि वृत्तको परिधिको बराबर दुरीमा पर्ने वृत्तभित्रको बिन्दुलाई वृत्तको केन्द्रबिन्दु भनिन्छ ।

चित्रमा O वृत्तको केन्द्रबिन्दु हो ।

2. **वृत्तको अर्धव्यास (Radius)**

वृत्तको केन्द्रबिन्दुबाट परिधिसम्म खिचिएको रेखाखण्डलाई त्यस वृत्तको अर्धव्यास (radius) भनिन्छ । दिइएको वृत्तमा OA, OC र OE सबै अर्धव्यासहरू हुन् ।

3. **वृत्तको परिधि (Circumference)**

वृत्तको वरिपरिको घेरालाई वृत्तको परिधि (circumference) भनिन्छ । दिइएको वृत्तमा बिन्दुहरू E, D, C, B र A जोडिएको वृत्ताकार घेरा वृत्तको परिधि हो ।

4. **वृत्तको जीवा (Chord)**

वृत्तको परिधिका कुनै दुई बिन्दुहरू जोड्ने रेखाखण्डलाई त्यस वृत्तको जीवा (chord) भनिन्छ । दिइएको वृत्तमा DC एउटा जीवा हो ।

5. **वृत्तको व्यास (Diameter)**

वृत्तको केन्द्रबिन्दु भएर जाने जीवालाई त्यस वृत्तको व्यास (diameter) भनिन्छ । दिइएको वृत्तको चित्रमा EB एउटा व्यास हो ।

6. **वृत्तको क्षेत्रक (Sector)**

दुईओटा अर्धव्यासको बिचमा परेको क्षेत्रलाई त्यस वृत्तको क्षेत्रक (sector) भनिन्छ । दिइएको वृत्तको चित्रमा छाया परेको भाग BOC एउटा क्षेत्रक हो ।

7. **अर्धवृत्त (Semi-circle)**

वृत्तको ठिक आधा भागलाई अर्धवृत्त (semi-circle) भनिन्छ । चित्रमा EDCB ले घेरिएको वृत्तको भाग अर्धवृत्त हो ।

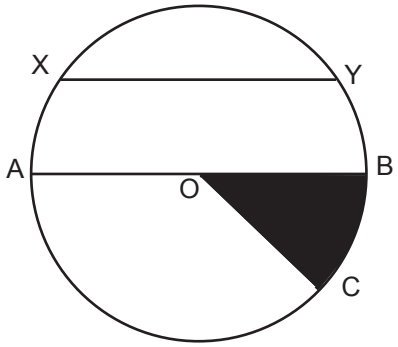
माथिका वृत्तका भागहरूको परिचयका आधारमा चित्र नं 4.1 र 4.2 मा केन्द्रबिन्दु, अर्धव्यास, परिधि, जीवा, व्यास, क्षेत्रक र अर्धवृत्त बनाएर देखाऊ ।

अभ्यास 4.1

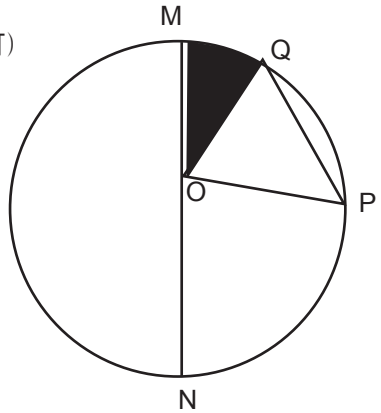
1. तिम्रो वरिपरि भएका वस्तुहरूमध्ये वृत्तको आकार आउने कुनै 5 ओटा वस्तुहरूको नाम लेख ।

2. तलका चित्रहरूमा वृत्तका विभिन्न भागहरू छुट्याएर देखाऊ :

(क)



(ख)



3. अर्धव्यास भनेको के हो, चित्र बनाएर देखाऊ ।

4. वृत्तको अर्धव्यास र व्यासमा के फरक छ, चित्रसहित फरक छुट्याऊ र यिनीहरूबिचको सम्बन्ध पत्ता लगाऊ ।

5. जीवा भनेको के हो, जीवा र व्यासमा के फरक छ, चित्रसहित उल्लेख गर ।

6. के सबै जीवा व्यास हुन सक्छन्, किन ?

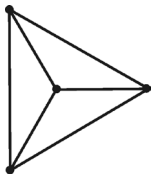
7. एउटा वृत्तको चित्र बनाई वृत्तका विभिन्न भागहरू छुट्याएर देखाऊ ।

एकाइ 5

ठोस आकृति (Solid Figure)

5.1 टेट्राहेड्रन, अक्टाहेड्रन, सोली र बेलनाका खोक्रा नमुनाहरू (Skeleton models of Tetrahedron, Octahedron, Cone & Cylinder)

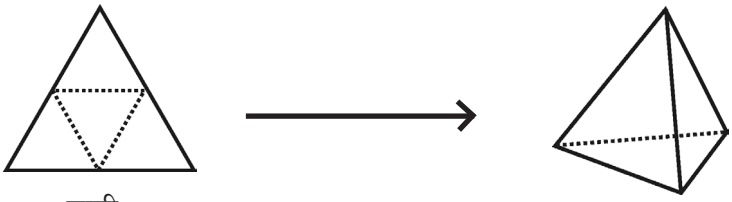
1. टेट्राहेड्रन र यसको नमुना



दिइएको ज्यामितीय आकृति टेट्राहेड्रनको हो । टेट्राहेड्रन एउटा नियमित ज्यामितीय ठोस आकृति हो । यसका प्रत्येक सतहहरू समबाहु त्रिभुजबाट बनेका हुन्छन् । यसमा जम्मा 4 ओटा सतहहरू हुन्छन् । यसका 4 ओटा शीर्षबिन्दु र 6 ओटा किनारा हुन्छन् ।

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर

(क) तलको टेट्राहेड्रनको जाली र नमुना अध्ययन गरी छलफल गर :



जाली नमुना

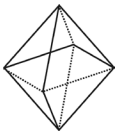
(ख) टेट्राहेड्रनका नमुनाका आधारमा तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर ।

1. टेट्राहेड्रन नियमित ठोस वस्तु वा अनियमित ठोस वस्तु कुन हो ?
2. टेट्राहेड्रनका प्रत्येक सतहका किनारा नाप र नाम लेख । के सबै किनारा बराबर छन् ?
3. टेट्राहेड्रनका प्रत्येक सतहका आकार कस्ता हुन्छन् ? के प्रत्येक सतह समबाहु त्रिभुज आकारका छन् ?
4. यस्ता सतहहरू कतिओटा छन् ?

(ग) माथिको जाली बनाऊ वा ट्रेसिङ गर । यसबाट टेट्राहेड्रन बनाउने अभ्यास गर ।

(घ) जुस खाने पाइप वा अन्य स्थानीय सामग्री प्रयोग गरी टेट्राहेड्रन बनाई कक्षामा छलफल गरी प्रदर्शन गर ।

2. अक्टाहेड्रन र यसका नमुनाहरू (Octahedran and its Skeleton Models)



दिइएको ज्यामितीय चित्र अक्टाहेड्रन हो । अक्टाहेड्रन एउटा नियमित ठोस वस्तु हो । यसका प्रत्येक सतहहरू समबाहु त्रिभुजबाट बनेका हुन्छन् । यसमा जम्मा 8 ओटा सतहहरू हुन्छन् । यसमा 6 ओटा शीर्षबिन्दु र 12 ओटा किनारा हुन्छन् ।

नोट : टेट्राहेड्रन, अक्टाहेड्रन, घन, षड्भुज आदि जुस खाने पाइपका साथै मसिनो निगालो, छ्वाली, बाँसका लट्ठीका टुक्रा आदि स्थानीय सामग्रीहरूबाट पनि बनाउन सकिन्छ ।

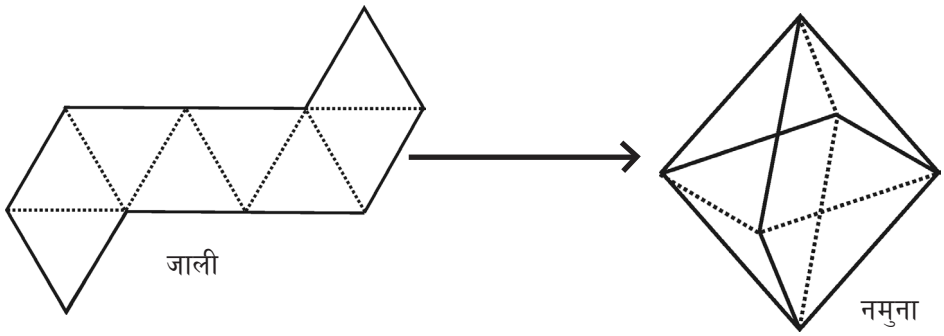
तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर

(क) एउटा अक्टाहेड्रनको खोक्रो नमुना वा कागजको नमुना लेऊ/सङ्कलन गर र कक्षामा छलफल गर ।

1. अक्टाहेड्रन नियमित ठोस वस्तु वा अनियमित ठोस वस्तु कुन हो ?
2. अक्टाहेड्रनका प्रत्येक सतहका किनारा नाप र नाप लेख । के सबै किनारा बराबर छन् ?
3. अक्टाहेड्रनका प्रत्येक सतह (faces) कस्ता आकारका छन् ? के प्रत्येक सतह समबाहु त्रिभुज आकारका छन् ?
4. यस्ता सतहहरू कतिओटा छन् ?
5. अक्टाहेड्रनमा कतिओटा शीर्षबिन्दु र किनारा छन् ?

माथिका क्रियाकलापबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ, लेख ।

(ख) तलको अक्टाहेड्रनको जाली र नमुना अध्ययन गरी छलफल गर :



(ग) माथिको जाली बनाऊ । ट्रेसिङ गर । यसबाट अक्टाहेड्रन बनाई कक्षामा प्रस्तुत गरी छलफल गर ।

(घ) जुस खाने पाइप, छ्वाली वा अन्य स्थानीय सामग्री प्रयोग गरी अक्टाहेड्रन बनाई कक्षामा प्रदर्शन गरी छलफल गर ।

3. नियमित बहुभुजका केही महत्त्वपूर्ण तथ्यहरू

नियमित बहुभुजहरूका केही विशेषताहरू तल दिइएका छन्, अध्ययन गरी छलफल गर ।

(क) नियमित बहुभुजका सबै सतह वा मोहडा (faces) अनुरूप हुन्छन् ।

(ख) नियमित बहुभुजका कुनै दुईओटा सतहहरू जोड्ने रेखाखण्डलाई किनारा (edge) भनिन्छ ।

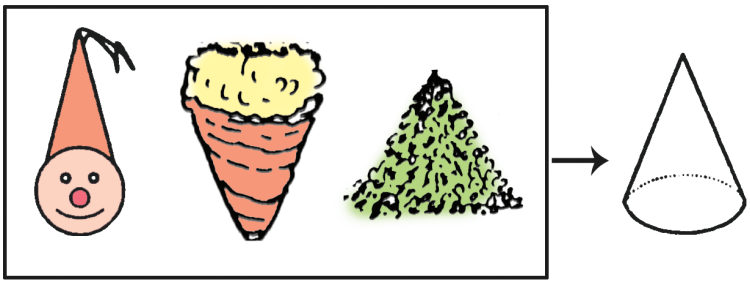
(ग) नियमित बहुभुजका 3 वा 3 भन्दा बढी किनारा मिलेर एउटा शीर्षबिन्दु (vertex) बनेको हुन्छ ।

(घ) **टेट्राहेड्रन, हेक्साहेड्रन र अक्टाहेड्रनका नमुनाहरू लेऊ र तलको तालिकामा दिइएका तथ्यहरू तुलना गरी हेर :**

क्र.सं.	नियमित बहुभुज (Regular Polyhedran)	शीर्षबिन्दु (Vertices (V)	किनारा Edges (E)	सतह Faces (F)	सतहको आकृति Figure of Face	V, E र F को सम्बन्ध
1.	टेट्राहेड्रन	4	6	4	समबाहु त्रिभुज	4 - 6 + 4 =2
2.	हेक्साहेड्रन (षड्मुखा)	8	12	6	वर्ग	8 - 12 + 6 = 2
3.	अक्टाहेड्रन	6	12	8	त्रिभुज	6 -12 + 8 = 2
4.	कुनै पनि नियमित बहुभुज	V	E	F		V - E + F = 2

माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष निकाल्न सकिएला ? छलफल गर र लेख ।

4. सोली र यसको नमुना (Cone and its Skeleton Models)



तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) माथिका प्रत्येक आकृति कस्ता आकारका छन् ?

(ख) प्रत्येक आकृतिका आधारहरू के आकारका छन् ?

(ग) प्रत्येक आकृतिको सतह कस्तो आकारको छ ?

माथिका चित्रहरू सबै सोली (cone) का चित्रहरू हुन् । सोलीका आधारहरू वृत्ताकार हुन्छन् । यसको सतह वक्र रूपमा रहेको हुन्छ । तर वक्र सतह अर्कोपट्टि एउटा बिन्दुमा मिलेको हुन्छ ।

(घ) माथि जस्तै सोली आकारका कुनै दुई वस्तुहरू जम्मा गर । यसका सतह र आधारका बारेमा छलफल गर ।

सोलीका केही विशेषताहरू

1. सोली एउटा ठोस आकृति हो ।
2. यसको आधार वृत्ताकार हुन्छ ।
3. यसको सतह वक्र रूपमा रहेको हुन्छ ।
4. तर वक्र सतह एउटा बिन्दुमा मिलेको हुन्छ ।

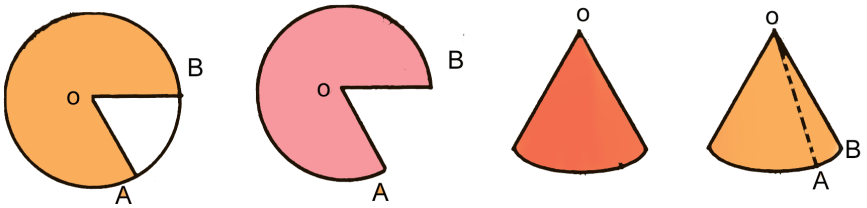
(ङ) माथिको छलफलका आधारमा सोलीको परिभाषा लेख र कक्षामा छलफल गर । के तिम्रो परिभाषा तलको परिभाषासँग मिल्छ ? तुलना गर ।

सोली (cone) एउटा ठोस आकृति हो, जसका आधार वृत्ताकार भई सतह वक्र रूपमा रहेको हुन्छ तर वक्र सतह एउटा बिन्दुमा मिलेका हुन्छन् ।

(च) सोलीको निर्माण

तलका चरणहरूका आधारमा एउटा सोलीको निर्माण गर :

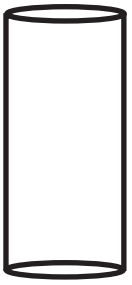
1. चित्र नं. 5.1 मा जस्तै गरी कुनै वृत्त काट । त्यसमा कुनै क्षेत्रक AOB चिह्न लगाऊ ।



चित्र नं. *5.1* चित्र नं. *5.2* चित्र नं. *5.3* चित्र नं. *5.4*

2. क्षेत्रक AOB लाई चित्र नं. 5.2 मा जस्तै गरी वृत्ताकार काटेर हटाऊ ।
3. चित्र नं. 5.4 मा जस्तै गरी OA र OB लाई जोडौँ ।
4. केको चित्र बन्यो, लेख ।

5. बेलना र यसका नमुनाहरू (Cylinder and its skeleton models)



तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर

(क) प्रत्येक आकृतिहरू अध्ययन गरी र तलका प्रश्नको उत्तर खोज ।

1. माथि दिएका वस्तुहरू कस्ता आकारका छन् ?
2. यी वस्तुहरूका आधार कस्ता आकारका छन् ?

माथिका वस्तुहरू बेलना आकारका छन् । यिनीहरूका आधारहरू वृत्ताकार छन् ।

(ख) माथि दिइए जस्तै बेलना आकारका वस्तुहरूका उदाहरण दिन सक्छौ ? लेखेर छलफल गर ।

(ग) कुनै 5 ओटा बेलनाकार वस्तुहरू सङ्कलन गर । तिनीहरूका सतह र आधारका बारेमा कक्षामा छलफल गर ।

(घ) माथिका क्रियाकलापका आधारमा बेलना वा बेलनाकार वस्तुका गुणहरू पत्ता लगाऊ । ती तथ्यहरूबारे साथीसँग छलफल गर ।

बेलना वा बेलनाकार वस्तुका गुणहरू

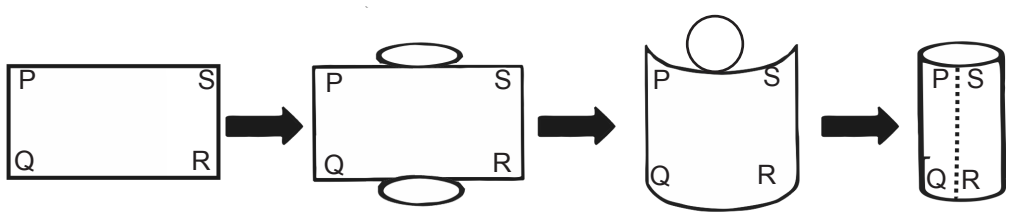
1. बेलना एक ठोस वस्तु हो ।
2. यसको आधार वृत्ताकार हुन्छ ।
3. यसको सतह वक्र हुन्छ ।
4. बेलनाका आकारका वस्तुहरूलाई बेलनाकार वस्तु भनिन्छ ।
5. बेलनाका आधारहरू आपसमा समानान्तर हुन्छन् ।

(ङ) माथि उल्लिखित तथ्यहरूका आधारमा बेलना वा बेलनाकार वस्तुको परिभाषा लेख । आफ्नो परिभाषालाई साथीसँग छलफल गर ।

के तिम्रो परिभाषा तलको परिभाषासँग मिल्छ ? तुलना गरी हेर ।

> आधारहरू वृत्ताकार र समानान्तर भई सतह वक्र सतहका रूपमा रहेका ठोस वस्तुहरूलाई बेलना वा बेलनाकार वस्तु भनिन्छ । अथवा
> बेलना एउटा ठोस वस्तु हो, जसका आधारहरू वृत्ताकार र समानान्तर तथा सतह वक्र सतहका रूपमा रहेका हुन्छन् ।

(च) बेलनाको खोक्रा नमुनाको निर्माण



एउटा आयताकार कागजको पाना लेऊ । त्यसलाई दिइएका चित्र तथा नमुना निर्माणका चरणअनुसार बनाउँदै जाऊ :

- आयताकार कागजलाई उत्रै दुईओटा वृत्तहरूको परिधिमा पर्ने गरी बेरौं ।

- कागजका धारहरूलाई आपसमा सिधा हुने गरी टाँसौँ ।
- अब केको आकार बन्छ हेरौँ र छलफल गरौँ ।
- अब बनेको आकृति बेलना हो । बेलना तयार भयो ।
- के यस बेलनाका आधारहरू समानान्तर छन् ? छलफल गर ।

अभ्यास 5.1

1. टेट्राहेड्रनको परिचय देऊ ।
2. अक्टाहेड्रनको परिचय देऊ ।
3. टेट्राहेड्रनको जाली, नमुना र खोक्रो नमुनाको चित्र बनाऊ ।
4. अक्टाहेड्रनको जाली, नमुना र खोक्रो नमुनाको चित्र बनाऊ ।
5. नियमित बहुभुजका कुनै तीनओटा तथ्यहरू उल्लेख गर ।
6. टेट्राहेड्रन, हेक्साहेड्रन (षड्मुख), घन र अक्टाहेड्रनका तथ्यहरूलाई तलको तालिकामा भर :

क्र.स.	नियमित बहुभुज (Regular polygon)	शीर्षबिन्दु सङ्ख्या Number of Vertices (V)	किनाराको सङ्ख्या Number of Edges (E)	सतहको सङ्ख्या Number of Faces (F)	सतहको आकृति Figure of Surface
1.	घन (Cube)				
2.	षड्मुखा (Hexahedron)				
3.	टेट्राहेड्रन (Tetrahedron)				
4.	अक्टाहेड्रन (Octahedron)				

7. सोलीको उदाहरणसहित परिचय देऊ । नमुना चित्र पनि बनाऊ ।
8. बेलनाको उदाहरणसहित परिचय देऊ । नमुना चित्र पनि बनाऊ ।

एकाइ 6

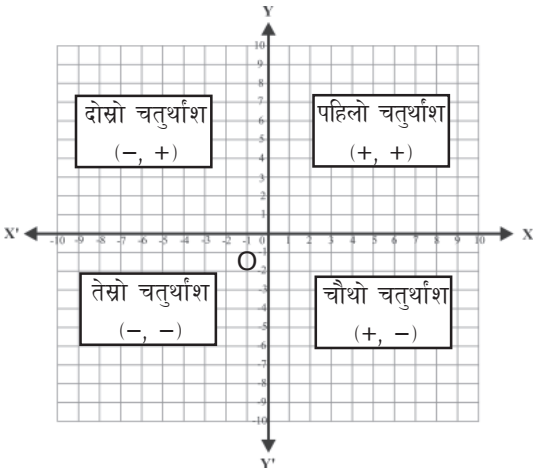
निर्देशाङ्क (Co-ordinate)

6.1. लेखाचित्रमा दिइएका बिन्दुहरूको निर्देशाङ्क

(Co-ordinate of the Given Points in Graphs)

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर ।

1. चतुर्थांशहरूको परिचय



सँगैका लेखाचित्रमा,

दुई सङ्ख्या रेखाहरू XOX' र YOY' आपसमा लम्ब हुने गरी बिन्दु O मा काटिएका छन् ।

तेर्सो रेखा X'OX लाई X - अक्ष (X-axis) भनिन्छ । त्यस्तै ठाडो रेखा YOY' लाई Y - अक्ष (Y-axis) भनिन्छ । बिन्दु O लाई उद्‌गम बिन्दु (origin) भनिन्छ । बिन्दु O लाई प्रसङ्गको बिन्दु (point of Reference) भनिन्छ ।

- चित्रमा कति ओटा क्षेत्रहरू छन् ? तिनीहरूको नाम लेख ।

  माथिको चित्रमा YOX, YOX', X'OY' र XOY' चार क्षेत्रहरू (चतुर्थांश) हुन् ।

क्षेत्र YOX लाई पहिलो चतुर्थांश, YOX' लाई दोस्रो चतुर्थांश, X'OY' लाई तेस्रो चतुर्थांश र XOY' लाई चौथो चतुर्थांश भनिन्छ ।

2. लेखाचित्रमा बिन्दुहरूको निर्देशाङ्क

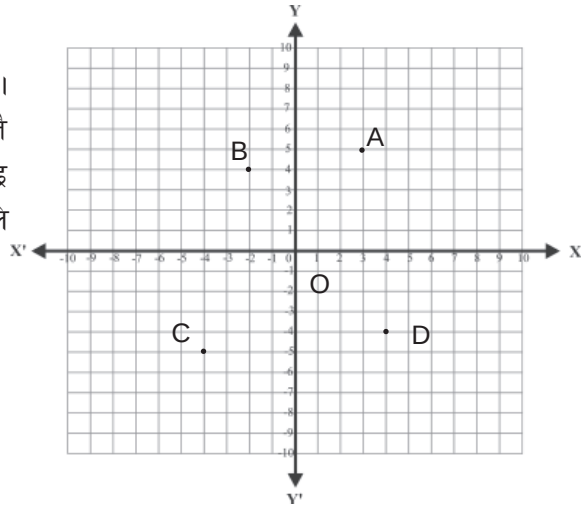
अब हामी लेखाचित्रमा चारओटै चतुर्थांशका बिन्दुहरू क्रमशः A, B, C र D का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउन कोसिस गरौँ ।

(क) बिन्दु A को निर्देशाङ्क

तलको चित्रमा, X- अक्षमा उद्‌गम बिन्दुको दायाँतिर धनात्मक सङ्ख्याहरू लेखिएको छ । त्यस्तै Y- अक्षमा उद्‌गम बिन्दुबाट माथितिर धनात्मक सङ्ख्याहरू लेखिएका छन् । यसरी YOX क्षेत्रमा X र Y का दुवै निर्देशाङ्कहरू धनात्मक हुन्छन् ।

- बिन्दु A कुन चुतर्थांशमा पर्छ ?
- बिन्दु A को x- निर्देशाङ्क कति होला ?
- त्यस्तै बिन्दु A को y - निर्देशाङ्क कति होला ?

अब A(x,y) को निर्देशाङ्क निकालौँ :



चित्रमा बिन्दु A बाट YY' सम्मको दुरी 3 एकाइ छ । त्यसैले बिन्दु A को x - निर्देशाङ्क 3 हुन्छ । त्यस्तै गरी बिन्दु A बाट XX' सम्मको दुरी 5 एकाइ छ । त्यसैले बिन्दु A को y- निर्देशाङ्क 5 छ । त्यसैले बिन्दु A को निर्देशाङ्क A(x,y) = A(3,5) हुन्छ ।

(ख) क्रियाकलाप (क) का आधारमा बिन्दु B को निर्देशाङ्क B(x,y) पत्ता लगाऊ ।

(ग) के बिन्दु C(x,y) को निर्देशाङ्क C(-4,-5) हुन्छ ?

(घ) अब बिन्दु D को निर्देशाङ्क कति होला ?

चित्रमा दिइएका बिन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू निम्नानुसार हुन्छन् :

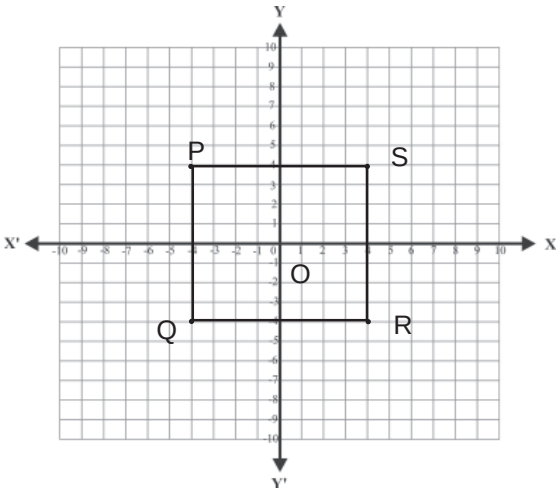
A(x,y) = A(3,5), B(x,y) = B(-2,4), C(x,y) = C(-4,-5) र D(x,y) = D(4,-4) हुन्छ ।

यसरी X - अक्ष र Y - अक्षका सङ्ख्या रेखाहरूको मानका आधारमा दिइएका प्रत्येक बिन्दुहरूको (x,y) निर्देशाङ्क निकालिन्छ ।

कुनै पनि बिन्दुको निर्देशाङ्कले त्यस बिन्दुको अवस्थितिलाई जनाउँदा x - निर्देशाङ्कले उद्गम बिन्दुभन्दा कति एकाइ दायाँ बायाँ भन्ने बुझाउँछ । त्यस्तै y - निर्देशाङ्कले उद्गम बिन्दुभन्दा कति एकाइ माथि वा तल भन्ने बुझाउँछ ।

उदाहरण 1

दिइएको चित्रमा,



(क) बिन्दुहरू P, Q, R र S का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाऊ ।

(ख) प्रत्येक बिन्दुहरूलाई क्रमशः जोड्दै जाऊ । केको चित्र बन्यो लेख ।

समाधान

(क) चित्रमा बिन्दुहरू P, Q, R र S का निर्देशाङ्कहरू निम्नानुसार छन् :

P को निर्देशाङ्क = P(-4,4)

Q को निर्देशाङ्क = Q(-4,-4)

R को निर्देशाङ्क = R(4,-4) र

X को निर्देशाङ्क = S(4,4)

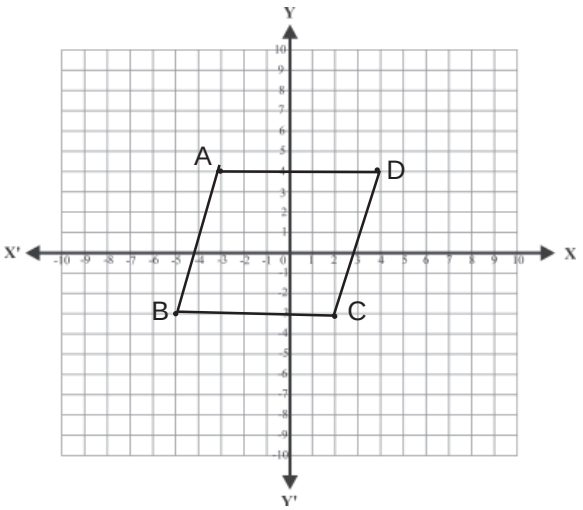
(ख) बिन्दुहरू क्रमशः P,Q,R र S जोड्दा एउटा वर्ग PQRS बन्यो । जसमा प्रत्येक भुजाको लम्बाइ 8 एकाइ छ । कसरी ? शिक्षकसँग परामर्श गर ।

उदाहरण 2

दिइएको लेखाचित्रमा समानान्तर चतुर्भुज ABCD का प्रत्येक शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, बिन्दु A को निर्देशाङ्क निकाल्दा,



बिन्दु A बाट YY' सम्मको दुरी 3 एकाइ छ । बिन्दु A दोस्रो चतुर्थांशमा पर्ने भएकाले A को x निर्देशाङ्क (-3) हुन्छ । त्यस्तै गरी A बाट XX' सम्मको दुरी 4 एकाइ छ । बिन्दु A दोस्रो चतुर्थांशमा भएकाले बिन्दु A को y- निर्देशाङ्क 4 हुन्छ । त्यसैले बिन्दु A को निर्देशाङ्क = A(x,y) = A (-3, 4) हुन्छ ।

त्यसैले, बिन्दु A को जस्तै प्रक्रियाबाट क्रमशः बिन्दुहरू B, C र D का निर्देशाङ्कहरू निकाल्दा,

बिन्दु B को निर्देशाङ्क = B(x, y) = B (-5, -3)

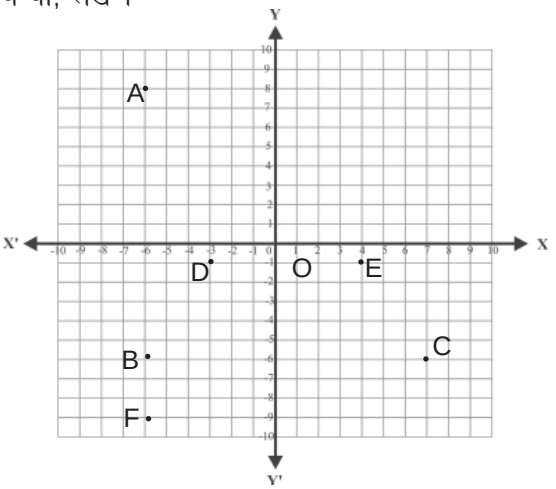
बिन्दु C को निर्देशाङ्क = C(x,y) = C(2,-3)

बिन्दु D को निर्देशाङ्क = D (x,y) = D(4,4)

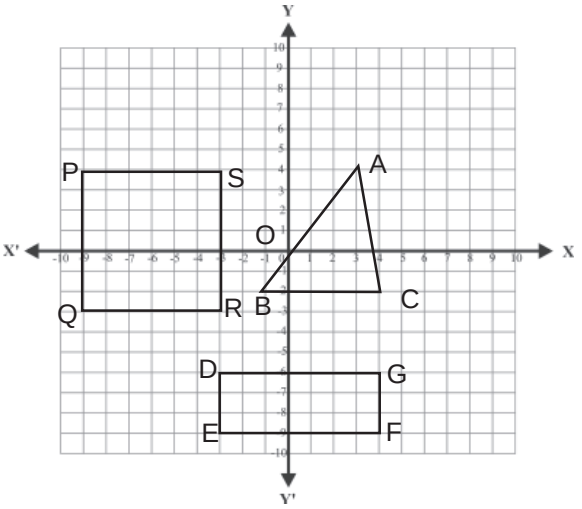
तसर्थ, समानान्तर चतुर्भुज ABCD का प्रत्येक शीर्षबिन्दुका निर्देशाङ्कहरू क्रमशः A(-3,4), B(-5, -3) C(2,-3) र D (4,4) हुन्छन् ।

अभ्यास 6.1

1. **लेखाचित्रका आधारमा** निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाऊ । क्रमशः बिन्दुहरू F, B, C, D, E, A र B जोड । केको चित्र बन्यो, लेख ।



2. लेखाचित्रमा दिइएको प्रत्येक आकृतिका शीर्षबिन्दुहरूको निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाऊ ।



3. तिम्रो साथीले लेखाचित्रमा देखाएको कुनै बिन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाऊ ।

4. प्रश्न नं. 1 र 2 मा जस्तै गरी एक एकओटा समस्या बनाई समाधान गर । साथीसँग आपसमा समस्या साटेर समाधान गर । उत्तरलाई जाँचेर पनि हेर ।

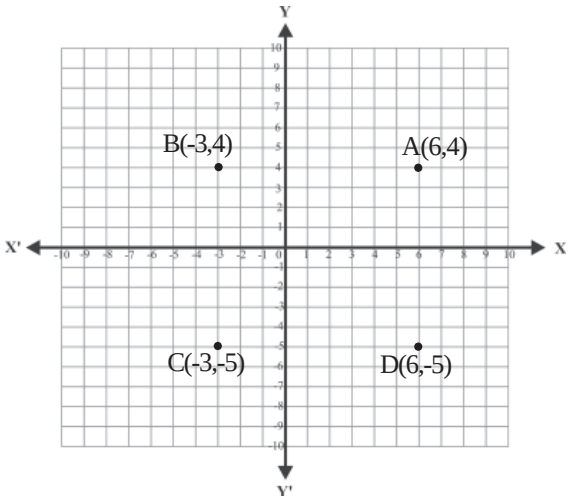
6.2 लेखाचित्रमा दिइएका बिन्दुहरूको अङ्कन (Plotting the Given Points in the Graph)

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

लेखाचित्रमा दिइएका बिन्दुहरूको अङ्कन गर्ने तरिका

सँगैको लेखाचित्रमा बिन्दुहरू A(6,4), B(-3,4), C(-3,-5) र D(6,-5) लाई पेन्सिलले लेखाचित्रमा अङ्कन गर्ने प्रयास गर ।

(क) सर्वप्रथम कापीमा चित्रमा देखाइए जस्तै X- अक्ष र Y- अक्षमा सङ्ख्या रेखाहरू बनाई लेखाचित्र तयार गर ।



(ख) A(6, 4) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्न के गर्नुपर्ला ?

- X- अक्षमा उद्गम बिन्दुदेखि धनात्मक दिशामा (दायाँ) 6 एकाइ जाने
- त्यही 6 एकाइ बाट Y- अक्षको धनात्मक दिशा (माथि) 4 एकाइ जाने र बिन्दुलाई सङ्केत गर्ने
- त्यस बिन्दु नजिकै A(6,4) लेख्ने
- बिन्दु A(6, 4) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्ने काम सकियो ।

(ग) अब B(-3,4) लाई (क) कै प्रक्रिया अपनाई कसरी माथिको लेखाचित्रमा अङ्कन गर्न सकिन्छ होला ? साथीसँग पनि छलफल गर ।

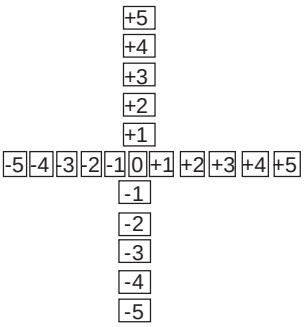
(घ) त्यसै गरी क्रमशः C(-3,-5) र D(6,-5) लाई पनि लेखाचित्रमा अङ्कन गर ।

(ङ) अब A, B, C र D बिन्दुहरूलाई जोड । केको चित्र बन्यो, लेख ।

यहाँ ABCD एउटा वर्ग हो । वर्ग ABCD ले कति क्षेत्रफल ओगटेको छ ? कोठा गनेर पत्ता लगाऊ ।

निर्देशाङ्क खेल

कक्षामा साथीहरूसँग मिलेर चित्रमा देखाएजस्तै गरी कागजका टुक्राहरूमा X- अक्ष र Y- अक्षका सङ्ख्या रेखाहरू बनाऊ । दुई समूहमा बाँडिएर निर्देशाङ्क खेल खेल ।



खेलको नियम तथा खेल्ने तरिका

1. सर्वप्रथम सङ्ख्याहरूलाई चित्रमा देखाएजस्तै आपसमा लम्ब हुने गरी चौरमा राख । निर्देशाङ्कको वरिपरि दुई समूहहरूमा छुट्टाछुट्टै लाइन लागेर बस ।

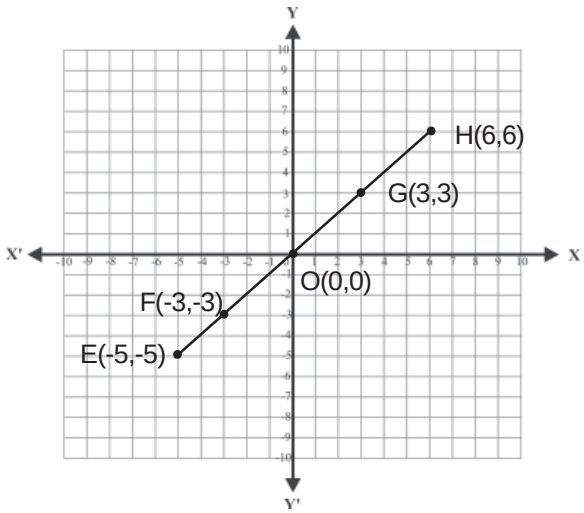
2. समूह (क) को पहिलो साथीले समूह (ख) को सामुन्नेको साथीलाई कुनै निर्देशाङ्कमा उभिन भन्ने । उसले सोअनुसार उभिनुपर्छ । उभिन नसकेमा बाहिर गई दर्शक बन्दछ । तर नसक्ने साथीलाई उभिनुपर्ने स्थानको जानकारी साथीहरूबाट सिकाइदिनुपर्छ ।
3. अब लेखाचित्रको आफ्नो निर्देशाङ्कमा उभिएको साथीले नै समूह (क) को अर्को साथीलाई नं. 2 मा जस्तै गरी कुनै अर्को नयाँ निर्देशाङ्क भन्ने र सोअनुसार उभिन लगाउनुपर्छ ।
4. दुवै समूहमध्ये जुन समूहमा धेरै साथी ठिक निर्देशाङ्कमा उभिन सके उही समूहको जित हुन्छ ।

उदाहरण 1

बिन्दुहरू E(-5, -5), F(-3, -3), O(0, 0), G(3, 3) र H(6, 6) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर । सबै बिन्दुलाई जोडी हेर, के के चित्र बन्यो ? लेख । निर्देशाङ्कको तालिका पनि बनाऊ ।

समाधान

बिन्दुहरू E(-5, -5), F(-3, -3), O(0, 0), G(3, 3) र H(6, 6) लाई जोड्दा बन्ने लेखाचित्रलाई दायाँतिर उल्लेख गरिएको छ ।



निर्देशाङ्कको तालिकामा राख्दा,

x	-5	-3	0	3	6
y	-5	-3	0	3	6

यसरी माथि दिइएका बिन्दुहरू जोड्दा एउटा सिधा रेखा बन्यो ।

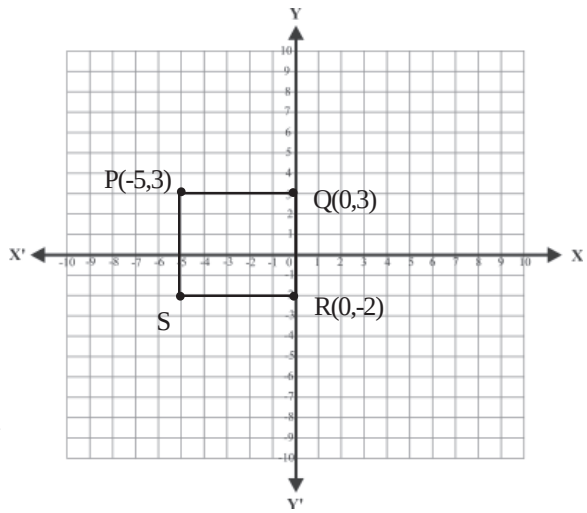
उदाहरण 2

बिन्दुहरू P(-5,3), Q(0,3), R(0,-2) र S एउटा वर्गका शीर्षबिन्दुहरू हुन् भने,

(क) लेखाचित्रमा दिइएका बिन्दुहरूलाई अङ्कन गर ।

(ख) बिन्दु S को निर्देशाङ्क पत्ता लगाऊ ।

(ग) उक्त वर्गको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।



समाधान

(क) दिइएका बिन्दुहरू P(-5, 3), Q(0, 3), R(0, -2) लाई क्रमशः अङ्कन गरी दायाँ लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।

(ख) PQRS एउटा वर्ग भएकाले सो वर्गको लम्बाइ QR = 5 एकाइ छ, अब R(0, -2) बाट PQ सँग X-अक्षको ऋणात्मक दिशातिर अथवा -5 मा S बिन्दु पत्ता लगाऊ । अब बिन्दु S को निर्देशाङ्क S(-5, -2) हुन्छ ।

(ग) अब, उक्त वर्ग PQRS को क्षेत्रफल निकाल्दा,

वर्गको क्षेत्रफल $= \ell^2$ वर्ग एकाइ

$= 5^2$ वर्ग एकाइ

$= 25$ वर्ग एकाइ

यसर्थ, वर्गले ओगटेका कोठाहरू गन्दा पनि 25 वर्ग एकाइ नै हुन्छ । त्यसैले उक्त वर्ग PQRS को क्षेत्रफल 25 वर्ग एकाइ हुन्छ ।

अभ्यास 6.2

1. तलका प्रत्येक बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर :

   A(3, -2), B(7, 0), C(-1, 2), D(1, 1), P(4, 4), Q(-5, 0), R(0, 5), S(7, -2)

   E(0, 4), F(-3,-3), G(-5,-4) र H(-3,-4)

2. प्रश्न नं. 1 का कुन कुन बिन्दुहरू X- अक्षबाट बराबर दुरीमा पर्छन्, लेख ।

3. प्रश्न नं. 1 का कुन कुन बिन्दुहरू Y- अक्षबाट बराबर दुरीमा पर्छन्, लेख ।

4. तलका प्रत्येक बिन्दुहरूलाई लेखाचित्र बनाई अङ्कन गर । प्रत्येक बिन्दुलाई क्रमशः जोड्दै जाऊ । यसरी बन्ने आकृतिको नाम पनि लेख :

   (क) A(-4,2), B(4,3) र C(2,-5) (ख) P(-6,4), Q(0,4), R(0,0) र S(-6,0)

   (ग) H(-5,-4), I(-2,1), J(1,7), K(4,2), L(1,3), M(4,0) र N(-2,1)

5. बिन्दुहरू P(2, 5) र Q(2, -5) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर र तलका प्रश्नको जवाफ लेख :

   (क) PQ को मध्यबिन्दु R भए R को निर्देशाङ्क कति होला ?

   (ख) PQ को लम्बाइ कति होला ?

6. एउटै लेखाचित्रमा र उही उद्गमबिन्दु लिएर तलका दुई समूहहरू (क) र (ख) मा दिइएका बिन्दुहरू अङ्कन गरी प्रत्येक समूहका बिन्दुहरू क्रमैसँग जोड्दै जाऊ ।

   (क) A(-6, 5), B(-4, 5), C(0, 5), D(2, 5) र E(6, 5)

   (ख) F(5, -5), G(5, -3), H(5, 0) र I(5, 6)

   उक्त दुई समूहका लेखाचित्रहरू काटिएको बिन्दु J को निर्देशाङ्क पत्ता लगाऊ ।

एकाइ 7

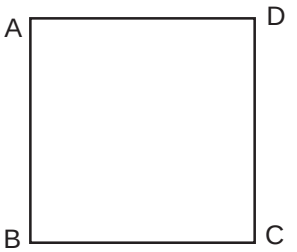
परिमिति र क्षेत्रफल (Perimeter and Area)

7.1. वर्ग र आयतको परिमिति (Perimeter of Square and Rectangle)

वर्ग र वर्गको परिमिति (Square and Perimeter of Square)

क्रियाकलाप 1

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी कक्षामा छलफल गर ।



- सँगैको चित्रमा भुजाहरू AB, BC, CD र DA नाप । के सबै भुजाहरू बराबर छन् ?
- त्यस्तै भित्री कोणहरू ∠A, ∠B, ∠C र ∠D पनि नाप । के प्रत्येक कोणहरू एक समकोण (=90°) को नापका छन् ?
- के चतुर्भुज ABCD एउटा वर्ग हो ? कसरी ? छलफल गर ।
- वर्ग ABCD को वरिपरिको घेराको लम्बाइको नाप कति होला ?

यहाँ, सबै भुजाहरू बराबर छन् । अर्थात् AB = BC = CD = DA = 3cm छन् । मानौँ, वर्ग ABCD को एउटा भुजाको लम्बाइ ℓ छ भने AB = BC = CD = AD = ℓ = 3cm हुन्छ ।

अब, वर्ग ABCD को परिमिति भन्नाले वरिपरिका चार ओटै भुजाहरू AB, BC, CD र AD को नापको योगफल हुन्छ ।

तसर्थ, वर्ग ABCD को परिमिति (P) = AB + BC + CD + DA हुन्छ ।

= 3cm + 3cm + 3cm + 3cm

= 12cm

अब के 12cm लाई 4 x 3cm = 4ℓ लेख्न सकिन्छ कसरी ? छलफल गर । किनकि ℓ = 3cm छ ।

- के वर्गको परिमिति पत्ता लगाउने अन्य उपायहरू छन् ?
- के यसका लागि कुनै सूत्र पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

निष्कर्ष : कुनै पनि वर्गको परिमिति त्यस वर्गको एउटा भुजाको लम्बाइको चार गुणा हुन्छ ।

अब माथिको तथ्यलाई सङ्केत सूत्रमा लेख्ने प्रयास गरौँ ।

वर्गको परिमितिलाई P र लम्बाइलाई ℓ मान्दा,

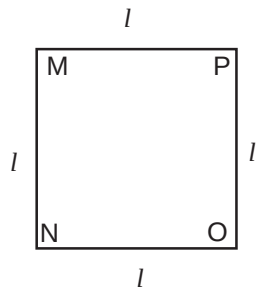
वर्गको परिमिति (P) = ($\ell + \ell + \ell + \ell$) एकाइ = 4ℓ एकाइ हुन्छ ।

तसर्थ, सूत्र : वर्गको परिमिति (P) = 4ℓ हुन्छ ।

सबै भुजाहरू बराबर भएको र प्रत्येक भित्री कोणहरू एक समकोण (=90°) भएको चतुर्भुजलाई वर्ग भनिन्छ । परिमिति भनेको वरिपरिको घेराको लम्बाइ हो । तसर्थ वर्ग ABCD को वरिपरिको घेरा (AB + BC + CD + DA) को लम्बाइलाई वर्ग ABCD को परिमिति भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 2

एउटा वर्गाकार कागज लेऊ/बनाऊ । त्यसलाई चित्रमा दिए जस्तै गरी MNOP नाम देऊ ।



प्रत्येक भुजा नापेर चित्रमा दिए जस्तै गरी l = ··· मा वास्तविक नाप राख ।

अब वर्ग MNOP को परिमिति नापी सूत्र प्रयोग नगरिकन तथा सूत्र प्रयोग गरेर पत्ता लगाऊ ।

क्रियाकलाप 3

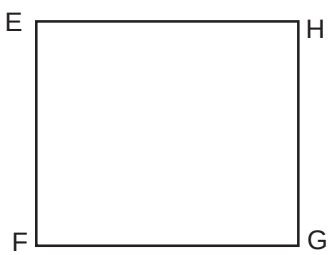
कुनै एउटा वर्गाकार सतह भएको वस्तु खोज । कापीमा सङ्केत चित्र पनि बनाऊ । त्यस वस्तुको वर्गाकार सतहको परिमिति सूत्रको प्रयोग गरी पत्ता लगाऊ । आफ्नो कार्य साथी तथा शिक्षकलाई देखाई छलफल गर ।

2. आयत र आयतको परिधि (Rectangle and Perimeter of Rectangle)

क्रियाकलाप 4

सँगैको चित्रमा भुजाहरू EF, FG, GH र HE नाप । के EF = HG भयो ? त्यस्तै के HE = FG भयो ?

- त्यस्तै गरी भित्री कोणहरू ∠E, ∠F, ∠G र ∠H पनि नाप । के प्रत्येक कोणहरू एक समकोण (= 90°) छन् ?
- सँगैको चित्रमा सम्मुख भुजाहरू EF = HG = 3cm र HE = FG = 3.5 cm छन् । त्यस्तै भित्री कोणहरू ∠E = ∠F = ∠G = ∠H = 90° छन् ।



यहाँ, चतुर्भुज EFGH का सम्मुख भुजाहरू बराबर छन् र प्रत्येक भित्री कोणहरू एक समकोण (=90°) का छन् । त्यसैले चतुर्भुज EFGH एउटा आयत हो ।

अब, आयत EFGH को परिमिति भन्नाले वरिपरिका चारओटै भुजाहरू EF, FG, GH र EH को योगफल हुन्छ ।

तसर्थ, आयत EFGH को परिमिति (P) = EF + FG + GH + HE हुन्छ ।
= 3cm + 3.5cm + 3cm + 3.5cm
= 13cm

अब के 13cm लाई 2(3.5+3)cm = 2(l+b) एकाइ लेख्न सकिन्छ, कसरी ? छलफल गर । किनकि l = 3.5cm र b = 3cm छ ।

- के आयतको परिमिति पत्ता लगाउने अन्य उपायहरू छन् ?
- के यसका लागि कुनै सूत्र पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

निष्कर्ष : कुनै पनि आयतको परिमिति त्यस आयतको लम्बाइ र चौडाइको योगफलको दुई गुणा वा दोब्बर हुन्छ ।

अब माथिको तथ्यलाई सङ्केत सूत्रमा लेख्ने प्रयास गरौँ ।

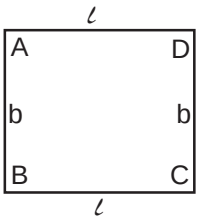
आयतको परिमितिलाई P, लम्बाइ l, र चौडाइलाई b मान्दा,

आयतको परिमिति (P) = ($l + b + l + b$) एकाइ = $2l + 2b = 2(l+b)$ एकाइ हुन्छ ।

तसर्थ, सूत्र : आयतको परिमिति (P) = $2(l+b)$ हुन्छ ।

सम्मुख भुजाहरू बराबर भएको र सबै भित्री कोणहरूको नाप एक समकोण (=90°) भएको चतुर्भुजलाई आयत (rectangle) भनिन्छ । कुनै पनि आयतका वरिपरिका घेरा अर्थात् चारओटै भुजाहरूको योगलाई त्यस आयतको परिमिति भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 5



एउटा आयताकार कागज लेऊ/बनाऊ । त्यसलाई चित्रमा दिए जस्तै गरी नाम देऊ । सूत्र प्रयोग नगरिकन तथा सूत्र प्रयोग गरेर दुवै तरिकाले उक्त आयताकार कागजको परिमिति पत्ता लगाऊ ।

क्रियाकलाप 6

तिम्रो घर वा विद्यालयमा एउटा आयताकार वस्तु खोज । त्यसको परिमिति सूत्र प्रयोग नगरिकन तथा सूत्र प्रयोग गरेर पत्ता लगाऊ । सङ्केत चित्र पनि बनाऊ । आफ्नो कार्य साथी र शिक्षक समक्ष देखाई छलफल गर ।

उदाहरण 1

छिरिङसँग भएको एउटा वर्गाकार रुमालको लम्बाइ 15cm भए त्यस रुमालको परिमिति पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, दिएअनुसार वर्गाकार रुमालको लम्बाइ (l) = 15cm

परिमिति (P) = ?

सूत्रअनुसार, वर्गको परिमिति (P) = $4l$ = 4 x 15cm = 60 cm

अत: त्यस वर्गाकार रुमालको परिमिति = 60cm हुन्छ ।

उदाहरण 2

सिर्जनासँग परिमिति 120 मिटर भएको एक टुक्रा वर्गाकार जग्गा छ । यसको लम्बाइ पत्ता लगाऊ ।

समाधान : यहाँ, दिइएअनुसार जग्गा (वर्ग) को परिमिति (P) = 120m

लम्बाइ (l)= ?

सूत्रअनुसार, वर्गको परिमिति (P) = 4ℓ

अथवा, $120m = 4\ell$

अथवा, $4\ell = 120m$

अथवा $\ell = \frac{120}{4} = 30$ m

तसर्थ, उक्त जग्गाको लम्बाइ 30 मिटर छ ।

उदाहरण 3

आइते तामाङले आफ्नो 40 m लम्बाइ भएको वर्गाकार तरकारी बारीको वरिपरि पर्खालमाथि 7 फन्को काँडेतार बनाउनलाई कति काँडेतार चाहिन्छ ?

समाधान

प्रश्नमा दिइएअनुसार,

वर्गाकार तरकारी बारीको लम्बाइ (ℓ) = 40 m

परिमिति (P) = ?

7 फन्को बारीको लम्बाइ = ?

सूत्रअनुसार,

वर्गका क्षेत्रको परिमिति (P) = 4ℓ = 4 x 40 m = 160 m

तर 7 फन्को काँडेतार लगाउन चाहिने तार = 7 x P = 7 x 160 m = 1120 m

तसर्थ, 7 फन्को बार लगाउन 1120 m काँडेतार चाहिन्छ ।

उदाहरण 4

लखन चौधरीसँग 900 m लम्बाइ र 600 m चौडाइ भएको एउटा आयतकार आँपको बगैंचा छ । त्यस बगैंचाको वरिपरिको घेरा (परिमिति) कति होला ?

समाधान

यहाँ दिइएअनुसार,

आँपको बगैंचाको लम्बाइ (ℓ) = 900m

चौडाइ (b) = 600m

परिमिति (P) = ?

सूत्रअनुसार,

आयताकार वस्तु वा क्षेत्रको परिमिति (P) = $2(\ell+b)$ =2(900m+600m) = 3000m = 3km

तसर्थ, उक्त बगैंचाको परिमिति 3km छ ।

उदाहरण 5

शर्मिलाको एउटा आयताकार नर्सरीको परिमिति 200 मिटर छ । यदि त्यस नर्सरीको लम्बाइ 60 मिटर भए चौडाइ कति होला ?

समाधान

यहाँ प्रश्नमा दिइएअनुसार,

नर्सरीको परिमिति (P) = 200m

लम्बाइ (ℓ) = 60m

चौडाइ (b) = ?

सूत्रानुसार,

आयताकार वस्तु वा क्षेत्रको परिमिति (P) = 2 (ℓ + b)

अथवा, 200m = 2(60m + b)

अथवा, 200m = 120m + 2b

अथवा, 2b = 200m - 120m

अथवा, $b = \frac{80m}{2}$

अथवा, b = 40m

तसर्थ, उक्त नर्सरीको चौडाइ 40 मिटर हुन्छ ।

उदाहरण 6

कलादेवी राईले 20m लम्बाइ र 15m चौडाइ भएको तरकारी बारीको वरिपरि 5 फन्को सिङ्गो निगालाको बार लगाउने विचार गरिछन् । उनले कति निगालो किन्नुपर्ला ?

समाधान

प्रश्नानुसार, उक्त आयताकार तरकारी बारीको लम्बाइ (ℓ) = 20m

चौडाइ (b) = 15m

परिमिति (P) = ?

5 फन्को निगालाको लम्बाइ = ?

सूत्रअनुसार,

आयताकार क्षेत्रको परिमिति (P) = 2(ℓ + b) = 2(20m + 15m) =2(35m) = 70m

अब 5 फन्को निगालाको बार लगाउनुपर्ने भएकाले,

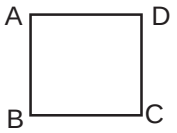
जम्मा निगालाको लम्बाइ ℓ = 5 x P = 5 x 70m = 350m

तसर्थ, उक्त तरकारी बारीमा बार लगाउन 350 मिटर निगालो चाहिन्छ ।

अभ्यास 7.1

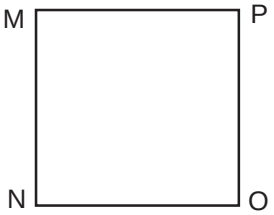
1. **तल दिइएका प्रत्येक आकृतिको लम्बाइ र चौडाइ नापी सूत्र प्रयोग गरेर परिमिति निकाल :**

(क)



(ख)

(ग)



(घ)

2. **तल दिइएका वर्गाकार वा आयतकार वस्तुको परिमिति निकाल :**

(क) वर्गाकार कागज, लम्बाइ = 13cm

(ख) वर्गाकार रुमाल, लम्बाइ = 18cm

(ग) आयताकार टेबल, लम्बाइ = 73cm, चौडाइ = 56cm

(घ) आयताकार करेसाबारी, लम्बाइ = 5m, चौडाइ = 3m

3. **एउटा वर्गाकार नर्सरीको लम्बाइ** 7m **छ भने,**

(क) उक्त क्षेत्रको वरिपरिको घेरा कति हुन्छ ?

(ख) यदि सो नर्सरीको वरिपरि 8 फन्को काँडेतार लगाउनुपरेमा कति काँडेतार चाहिएला ?

4. **एउटा वर्गाकार रुमालको परिमिति** 225cm **रहेछ भने त्यस रुमालको लम्बाइ कति होला ?**

5. **एउटा आयताकार टेबलको लम्बाइ** 78cm **र चौडाइ** 65cm **छ भने त्यस टेबलको परिमिति पत्ता लगाऊ ।**

6. **कान्छी दनुवारको** 650m **परिमिति भएको आयताकार तरकारी बारीको लम्बाइ** 205m **रहेछ भने चौडाइ कति होला ?**

7. **श्याम वि.क.ले एउटा 5m लम्बाइ भएको एउटा वर्गाकार घडेरी किने छन् :**

(क) उनको सो घडेरीको परिमिति कति होला ?

(ख) उनले 8 फन्को डोरीले बेर्नुपर्दा कति डोरी चाहिएला ?

8. **धनियाँले आफ्नो 23m लम्बाइ र 21m चौडाइ भएको घरको वरिपरिको कम्पाउन्डको पर्खाल लगाउन चाहिछन् :**

(क) उक्त कम्पाउन्डको परिमिति कति होला ?

(ख) उनले कम्पाउन्डको माथि वरिपरि 4 फन्को काँडेतार लगाउनका लागि कति लामो काँडेतार किनेर ल्याउनुपर्ला ?

9. **माथि उल्लिखित सङ्ख्या 1 देखि 8 सम्म दिइए जस्तै गरी आफैँ प्रश्नहरू निर्माण गरी थप अभ्यास गर । आफ्नो कार्यलाई साथी तथा शिक्षकसँग छलफल गर ।**

7.2 षड्मुखा र घनको पूरा सतहको क्षेत्रफल

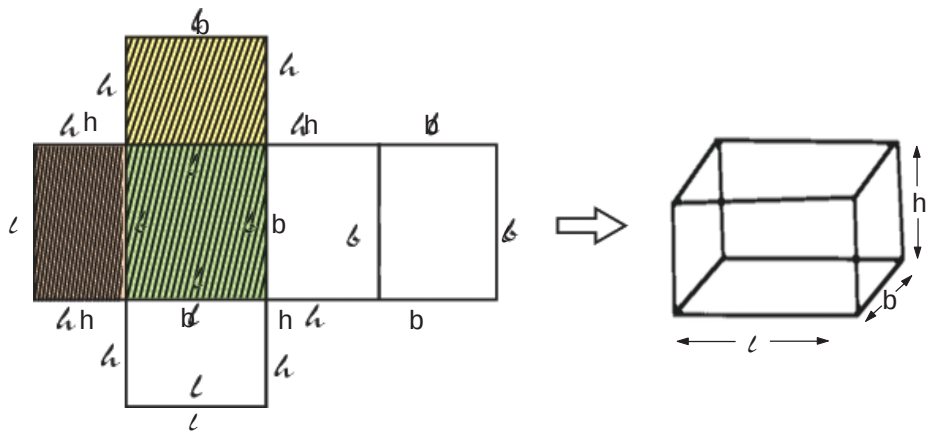
(Total Surface area of Cuboid and Cube)

हामीले कक्षा 6 मा षड्मुखा र घनको परिचय, खोक्रा नमुनाहरू र आयतनसम्बन्धी सरल समस्याहरूबारे छलफल गरिसकेका छौँ । अब हामी यस पाठमा षड्मुखा र घनको सतहको क्षेत्रफलका बारेमा छलफल गर्ने छौँ । यसका साथै यससम्बन्धी व्यावहारिक समस्याहरू समाधान गर्ने सिप पनि हासिल गर्ने छौँ ।

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर ।

1. षड्मुखाको पूरा सतहको क्षेत्रफल

षड्मुखाको जाली बनाई निम्नानुसार लम्बाइ (ℓ), चौडाइ (b), र उचाइ (h), छुट्याएर लेख । अनि तलका प्रश्नमा छलफल गर ।



(क) माथिका दुईओटा चित्रमा के सम्बन्ध छ ? (जाली र नमुनामा)

(ख) षड्मुखाको जाली कतिओटा आयत मिलेर बनेको रहेछ ?

(ग) षड्मुखाका सबै आयत बराबर छन् कि छैनन् ?

(घ) कतिओटा आयतको क्षेत्रफल ℓ x b छन् ?

(ङ) कतिओटा आयतको क्षेत्रफल ℓ x h छन् ?

(च) कतिओटा आयतको क्षेत्रफल b x h छन् ?

(छ) चित्रमा छाया परेको भागले जालीको कति भाग जनाउँछ ?

(ज) चित्रमा छाया परेको भागको क्षेत्रफल कति होला ?

रुलरले लम्बाइ (ℓ), चौडाइ (b), उचाइ (h), नापेर प्रत्येक सतहको क्षेत्रफल निकाल । सबै सतहको क्षेत्रफल जोडेर निकाल । यही कुल क्षेत्रफल नै सिङ्गो षड्मुखाको सतह क्षेत्रफल हुन्छ ।

माथिका दुईओटा चित्रहरूमा पहिलो षड्मुखाको जाली र नमुना दोस्रो हो । षड्मुखाको जाली जम्मा 6 ओटा आयत मिलेर बनेको छ । प्रत्येक आमनेसामनेका दुई दुई जोडी आयतहरू समानान्तर र बराबर छन् । सबै आयत बराबर छैनन् ।

चित्रमा 2 ओटा आयतको क्षेत्रफल ℓ x b छ ।

त्यस्तै 2 ओटा आयतको क्षेत्रफल ℓ x h छ ।

र 2 ओटा आयतको क्षेत्रफल b x h छ ।

यहाँ षड्मुखाको सतह क्षेत्रफल (A) = सबै आयतको क्षेत्रफलको योगफल हुन्छ ।

अब, छाया परेको भागको क्षेत्रफल (A)= (ℓ x b) + (ℓ x h) + (b x h) हुन्छ ।

त्यसैले पुरै जालीको क्षेत्रफल (A)= 2(ℓ x b)+2(ℓ x h) +2(b x h) = 2(ℓb + ℓh + bh) हुन्छ ।

सूत्र : तसर्थ कुनै पनि षडमुखाको सतहको क्षेत्रफल (TSA)= 2(ℓb+ℓh+bh) वर्ग एकाइ हुन्छ । जहाँ, षड्मुखाको ℓ = लम्बाइ, b = चौडाइ, र h = उचाइ ।

माथिको क्रियाकलापमा बनाएको षडमुखाको लम्बाइ (l), चौडाइ (b), र उचाइ (h) छुट्याएर लेख । उक्त षड्मुखाको सतहको क्षेत्रफल सूत्र प्रयोग गरी निकाल । उत्तर जाँचेर पनि हेर ।

2. घनको पूरा सतहको क्षेत्रफल

लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ बराबर भएको षड्मुखालाई घन (Cube) भनिन्छ । त्यसैले घनमा ℓ = b = h हुन्छ ।

अब सूत्र : षड्मुखाको सतहको क्षेत्रफल (A) = 2(ℓb + ℓh + bh) मा ℓ = b = h = a (मानौँ) हुँदा :

घनको क्षेत्रफल (A) = 2(aa+aa+aa) = 2($3a^2$) = $6a^2$

> सूत्र : घनको सतह क्षेत्रफल (A)=$6a^2$ वर्ग एकाइ हुन्छ, जहाँ घनको एउटा भुजाको लम्बाइ = a एकाइ छ ।

उदाहरण 1

एउटा बाकसको लम्बाइ (ℓ) = 42cm, चौडाइ (b)=39cm र उचाइ (h) = 28cm छ । अब त्यसको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ दिएअनुसार, उक्त बाकसको लम्बाइ (ℓ)= 42cm

चौडाइ (b)= 39cm

र उचाइ (h)= 28cm छ ।

बाकस षड्मुखा हो ।

सूत्रअनुसार, षड्मुखाको पूरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A.)=2(ℓb+ℓh+bh) वर्ग एकाइ

$= 2[(42 \times 39) + (42 \times 28) + (39 \times 28)]cm^2$

$= 2(1638 + 1176 + 1092)cm^2$

$= 2 \times 3906cm^2$

$= 7812cm^2$

अत: उक्त बाकसको पूरा सतहको क्षेत्रफल $7812cm^2$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

एउटा सलाईको बट्टाको लम्बाइ 4cm, चौडाइ 3cm र पूरा सतहको क्षेत्रफल $45cm^2$ रहेछ । अब त्यसको उचाइ पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ प्रश्नानुसार, उक्त सलाईको बट्टाको लम्बाइ (ℓ) = 4cm

चौडाइ (b) = 3cm

पूरा सतहको क्षेत्रफल (A) = $45cm^2$

र उचाइ (h) = ?

यहाँ, सलाईको बट्टा एउटा षड्मुखा हो ।

सूत्रानुसार, षड्मुखाको पूरा सतहको क्षेत्रफल (A)= 2(ℓb+ℓh+bh) वर्ग एकाइ

अथवा, $45cm^2 = 2[(4 \times 3) + (4 \times h) + (3 \times h)]$

अथवा, $45 = 2(12 + 4h + 3h)$

अथवा, $45 = 2(12 + 7h)$

अथवा, $45 = 24 + 14h$

अथवा, $14h = 45 - 24$

अथवा, $h = \frac{21}{14} = 1.5\,cm$

अत: उक्त सलाईको बट्टाको उचाइ 1.5cm हुन्छ ।

उदाहरण 3

पेम्बाले एउटा किनारा 15.4cm भएको घनको नमुना बनाइछन् । उक्त घनको पूरा सतहको क्षेत्रफल कति होला ?

समाधान

यहाँ दिएअनुसार, घनको एउटा भुजाको लम्बाइ (a)= 15.4cm

पूरा सतहको क्षेत्रफल (A)= ?

सूत्रअनुसार, घनको पूरा सतहको क्षेत्रफल (A)= $6a^2$

$= 6x(15.4)^2cm^2$

$=(6x237.16)cm^2$

$=1422.96cm^2$

अत : उक्त घनको नमुनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल (A) = $1422.96cm^2$ हुन्छ ।

उदाहरण 4

एउटा घनाकार वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल (A) = $4056cm^2$ लेखिएको रहेछ । अब त्यस वस्तुको एउटा भुजाको लम्बाइ कति होला ?

समाधान

प्रश्नमा दिएअनुसार, उक्त घनाकार वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल (A)= $4056cm^2$

र एउटा भुजाको लम्बाइ (a) = ?

सूत्रअनुसार, घनको पूरा सतहको क्षेत्रफल (A)= $6a^2$ वर्ग एकाइ

अथवा, $4056cm^2 = 6a^2$

अथवा, $a^2= \frac{4056}{6}\ cm^2$

अथवा, $a^2 = 676cm^2$

अथवा, $a = \sqrt{676cm^2}$

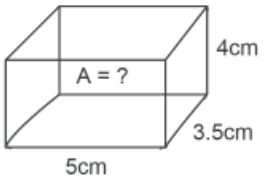
अथवा, a = 26cm

अत : त्यस घनाकार वस्तुको एउटा भुजाको लम्बाइ 26cm हुन्छ ।

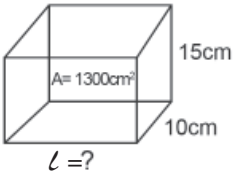
अभ्यास 7.2

1. **तल चित्रमा दिइएका प्रत्येक ठोस वस्तुको सोधिएको कुरा पत्ता लगाऊ (A = षड्मुखाको पूरा सतहको क्षेत्रफल)**

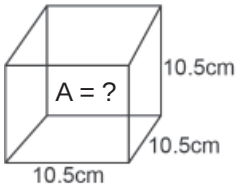
(क)



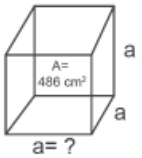
(ग)



(ख)



(घ)



(ङ) माथि क र ख मा दिइए जस्तै गरी 2/2 ओटा समस्या बनाऊ । साथीसँग मिलेर पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

(च) माथि ग र घ मा दिइए जस्तै गरी 2/2 ओटा समस्या बनाऊ र साथीसँग मिलेर अज्ञात भुजाको लम्बाइ पत्ता लगाऊ ।

2. **तलका प्रत्येक षड्मुखाको पूरा सतहको क्षेत्रफल निकाल :**

(क) ℓ = 5cm, b = 3cm र h = 4.5cm

(ख) ℓ = 6.2m, b = 3.3m र h = 6.8m

(ग) माथि क र ख मा जस्तै गरी दुई दुईओटा समस्या बनाऊ/खोज । साथीसँग मिलेर आपसमा प्रत्येक षड्मुखाको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

3. **तलका प्रत्येक अवस्थामा घनको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ :**

(क) a = 6cm (ख) a = 3.5cm (ग) a = 12m

(घ) माथि क, ख, र ग मा जस्तै 5 ओटा समस्याहरू बनाऊ । साथीसँग प्रत्येक घनको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

4. **तलका प्रत्येक अवस्थामा षड्मुखाको नदिइएको भुजा पत्ता लगाऊ :**

(क) A = 350cm^2, ℓ = ?, b = 10cm र h = 2.5cm

(ख) A= 136.24cm^2, ℓ = 4.2cm, b= 3.6cm र h=?

5. **तलका प्रत्येक अवस्थामा घनको एउटा भुजा पत्ता लगाऊ :**

(क) A= 600cm^2, a =?

(ख) A = 5400cm^2, a =?

6. एउटा षड्मुखाको पूरा सतहको क्षेत्रफल 6.3 m^2 लम्बाइ 1.5m र उचाइ 1.2m छ भने,

(क) उक्त षड्मुखाको चौडाइ कति होला ?

(ख) उक्त षड्मुखालाई कोठामा राख्दा कोठाको कति सतह ओगट्ला ?

7. एउटा बाकसको लम्बाइ 125cm, चौडाइ 85cm र उचाइ 70cm छ भने,

(क) उक्त बाकसको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

(ख) त्यस बाकसले कोठाको कति सतह ढाक्ला ?

8. एउटा प्राथमिक उपचार बाकस (First Aid Box) को लम्बाइ 18cm, चौडाइ 10cm र उचाइ 12cm छ भने,

(क) उक्त बाकस जनाउने जाली (Net) को चित्र बनाऊ ।

(ख) उक्त जालीका आधारमा पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

(ग) उक्त बाकसलाई टेबलमाथि राख्दा टेबलको कति सतह ढाक्ला ?

(घ) उक्त बाकसको बिर्को च्यातिएर हराएछ । अब बिर्को नभएको बाकसको पूरा सतहको क्षेत्रफल कति होला ?

9. उचाइ 7cm र चौडाइ 8cm भएको एउटा चकको बट्टालाई टेबलमा राख्दा टेबुलको सतह 80cm^2 ढाकेछ भने,

(क) उक्त बट्टाको लम्बाइ पत्ता लगाऊ ।

(ख) उक्त बट्टाको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

10. माथि प्रश्न 6 देखि 9 सम्म दिइए जस्तै गरी 2/2 ओटा समस्या बनाई हिसाब गर । उक्त हिसाब साथी साथीबिच साटेर एकअर्काको समाधान गर । छलफल गरी साथीको उत्तर जाँचेर पनि हेर ।

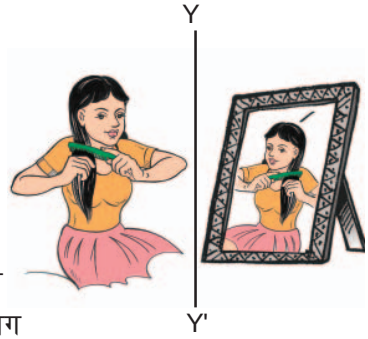
एकाइ 8

स्थानान्तरण (Transformation)

8.1 परावर्तन (Reflection)

तलका क्रियाकलाप तथा तथ्यहरू अध्ययन गरी छलफल गर ।

(क) चित्रमा के देख्छौ ?



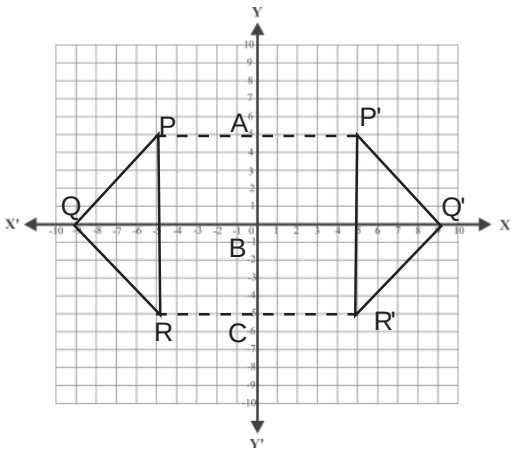
चित्रमा परावर्तन (reflection) लाई देखाइएको छ । यहाँ छात्राको प्रतिबिम्ब (image) ऐनामा देखाइएको छ । तिमीले पनि ऐनाको नजिक र टाढा गई हेर । प्रतिबिम्ब परावर्तन पनि टाढा र नजिक हुन्छ ।

(ख) अङ्ग्रेजी वर्णमालाको ठुलो अक्षर V लाई बिन्दु रेखा YY' मा पट्याउँदा ठिक दुई बराबर भागमा पट्टिन्छ । यहाँ प्रत्येक भाग एकअर्काको प्रतिबिम्ब वा परावर्तन हो ।

(ग) त्रिभुज PQR लाई बिन्दु रेखा YY' मा परावर्तन गराउँदा ΔP'Q'R' बनेको छ । यहाँ PP', QQ' र RR' रेखा परावर्तन अक्ष YY' मा लम्ब छन् । त्यस्तै PA = AP', QB = BQ' र RC = CR' पनि हुन्छ । यहाँ PQR र प्रतिबिम्ब P'Q'R' अनुरूप छन् ।

माथिका प्रत्येक क्रियाकलापमा प्रत्येक आकृति र प्रतिबिम्ब परावर्तन अक्षबाट बराबर दुरीमा परेका छन् । कसरी ?

माथिका 3 ओटा क्रियाकलापका आधारमा परावर्तनका केही तथ्यहरू पत्ता लगाउने कोसिस गरौँ ।



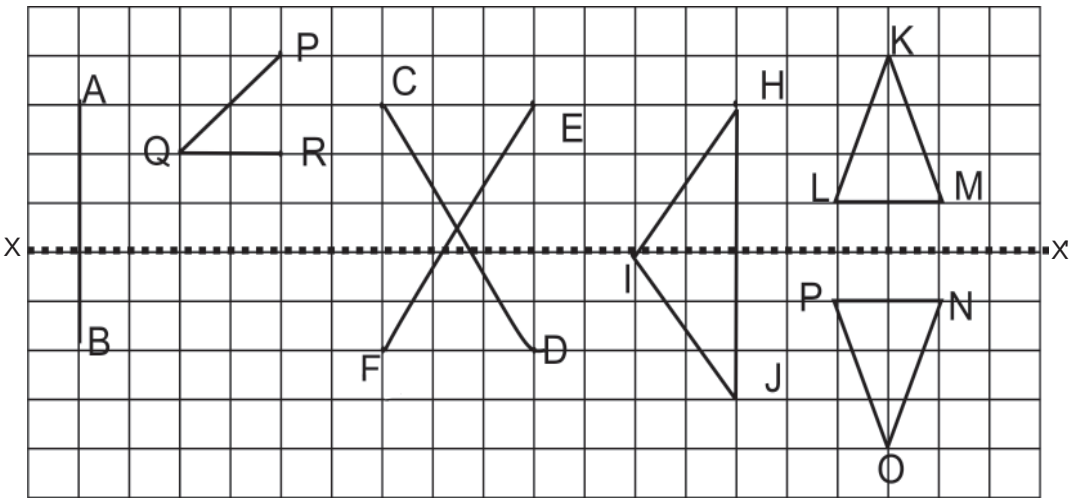
1. कुनै पनि वस्तु वा चित्रको प्रतिबिम्बलाई परावर्तन भनिन्छ । माथि चित्रहरूमा क्रमश: केटी, V को आधा भाग र P'Q'R' सबै बिन्दु रेखा YY' मा परावर्तन भएका छन् ।
2. जुन रेखामा प्रतिबिम्ब बनेको छ त्यसलाई परावर्तन अक्ष (axis of reflection) भनिन्छ । चित्रहरूमा बिन्दु रेखा YY' परावर्तनको अक्ष हो ।
3. वास्तविक आकृति परावर्तन भई प्रतिबिम्ब बन्छ ।
४. वास्तविक आकृति र प्रतिबिम्बअनुरूप हुन्छन् । अर्थात् वास्तविक आकृति र प्रतिबिम्बको क्षेत्रफल पनि आपसमा बराबर हुन्छन् ।
5. कुनै पनि ज्यामितीय चित्र वा आकृतिलाई परावर्तन गर्दा आकृति र प्रतिबिम्ब परावर्तन अक्षबाट बराबर दुरीमा पर्छन् ।

अभ्यास 8.1

1. तलका ज्यामितीय चित्रहरूलाई परावर्तन अक्ष XX' बिन्दुरेखामा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब लेख :

(क) बिन्दु A (ख) बिन्दु P (ग) रेखा PQ (घ) ∠PQR (ङ) बिन्दु E (च) ∠CGE

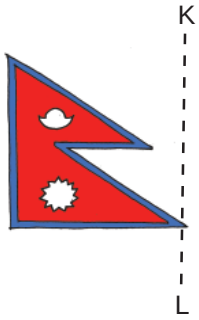
(छ) रेखा IH (ज) बिन्दु *I* (झ) ∠KLM (ञ) ∠LKM



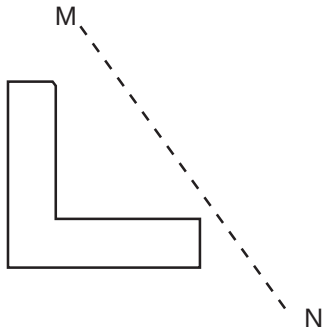
2. माथि प्रश्न नं. (क) देखि (ञ) सम्म दिए जस्तै अरू समस्या बनाई साथीसँग छलफल गरी शिक्षकको सहयोगमा आकृतिको प्रतिबिम्ब चिन्ने खेल खेल ।

3. तलका प्रत्येक आकृतिलाई परावर्तनको अक्षसँग परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब खिचेर देखाऊ :

(क)



(ख)

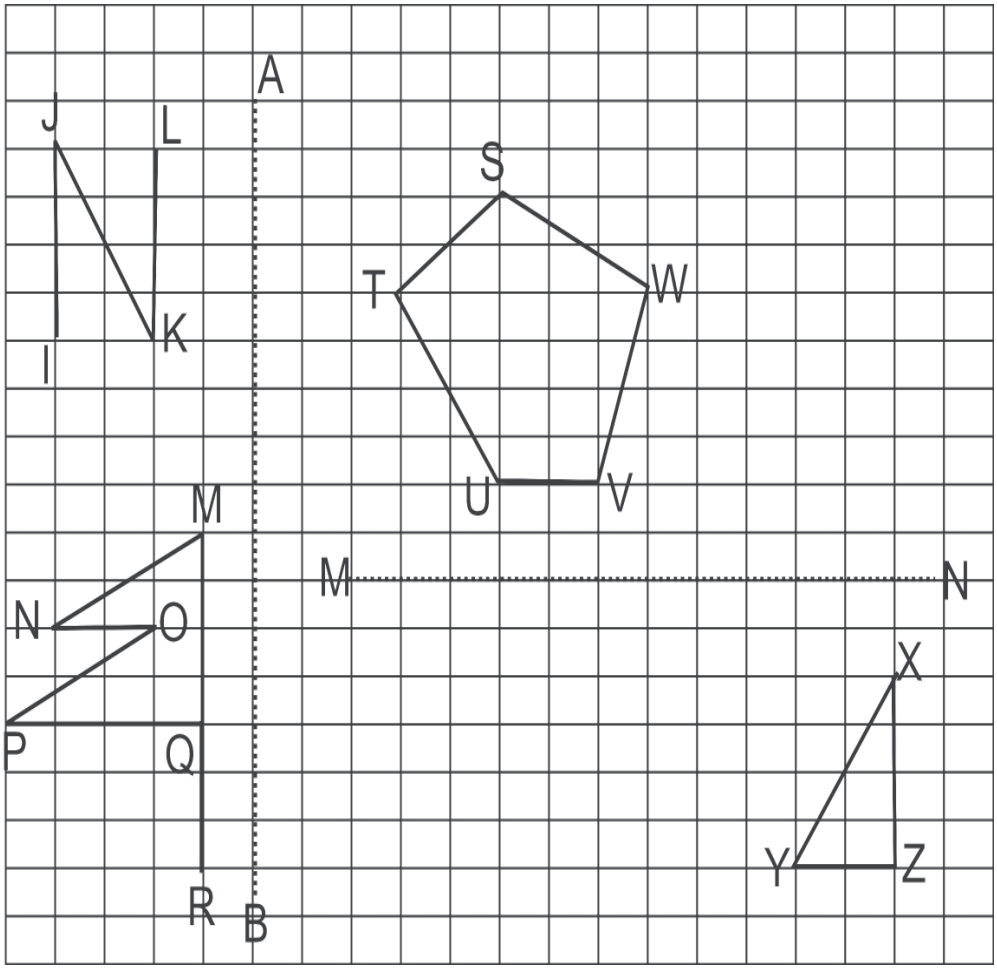


(ग)

(ज) माथि दिए जस्तै गरी कुनै 5 ओटा फरक फरक आकृतिहरू र परावर्तन अक्ष बनाई समस्या बनाऊ । साथीसँग छलफल गरी आपसमा परावर्तन गरी प्रतिबिम्ब खिचेर देखाऊ ।

नोट : प्रत्येक आकृतिका शीर्षबिन्दुहरूदेखि परावर्तनको अक्षमा लम्ब खिचेर (सेट स्क्वायरले वा कम्पासले) प्रतिबिम्ब बनाऊ ।

4. ग्राफ पेपरमा कुनै रेखा AB र MN लाई परावर्तनका अक्षहरू मानी तलका आकृतिका प्रतिबिम्ब बनाऊ :



8.2 परिक्रमण (Rotation)

तलका क्रियाकलापहरूमा छलफल गर :

1. परिक्रमण (Rotation)

(क) धारा खोल्दा र बन्द गर्दा के गर्नुपर्छ ?

(ख) दाँत माझ्ने मन्जनको बिर्को खोल्दा र बन्द गर्दा के गरिन्छ ?

(ग) साँचोले ताल्चा खोल्दा र बन्द गर्दा के गरिन्छ ?

(घ) ढोका खोल्दा र बन्द गर्दा के गर्नुपर्छ ?

(ङ) घडी मिलाउनका लागि सुईहरूलाई के गर्नुपर्छ ?

उल्लिखित कार्यहरू गर्दा वस्तुलाई निश्चित बिन्दुमा घुमाउने कार्य गरिन्छ । यो घुमाउने काम होसियारीका साथ आवश्यक मात्रामा गर्नुपर्छ । यसरी वस्तुहरूको घुमाइको प्रक्रियालाई नै परिक्रमण भनिन्छ ।

माथिका छलफलका आधारमा परिक्रमणको परिभाषा लेख । साथीसँग छलफल गरी निष्कर्ष निकाल ।

निश्चित बिन्दुमा वस्तुहरूको घुमाइलाई परिक्रमण भनिन्छ ।

2. परिक्रमणका प्रकार

(क) दिइएका घडीका चित्रहरू हेर र छलफल गर :

- दोस्रो घडीमा कति बजेको छ ?
- यसलाई घडीको दिशामा 15 मिनेट परिक्रमण गर्दा कति हुन्छ ?
- अब दोस्रो घडीलाई घडीको विपरीत दिशामा 15 मिनेटले परिक्रमण गर्दा कति हुन्छ ?

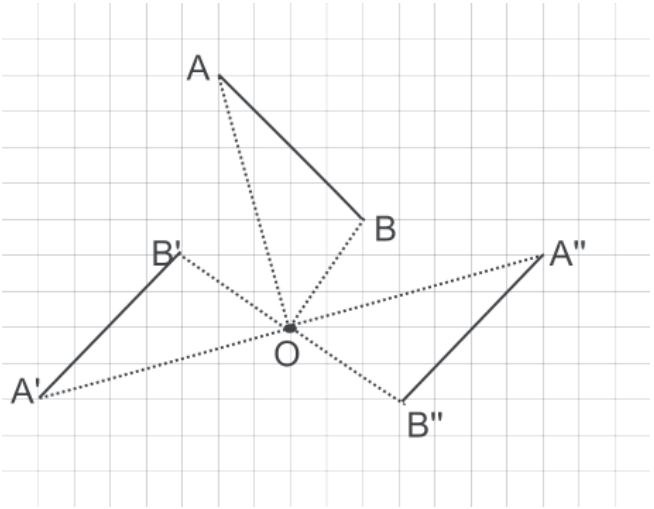
चित्र नं. 1 *चित्र नं. 2* *चित्र नं. 3*

माथि दोस्रो घडीमा 2.00 बजेको छ । यसलाई घडीको दिशामा 15 मिनेट (90°) मा परिक्रमण गर्दा 2.15 बजेको छ । यस्तो घडीको सुईको चालअनुसारको परिक्रमणलाई ऋणात्मक परिक्रमण (negative rotation) भनिन्छ ।

त्यसै गरी यदि दोस्रो घडीलाई घडीको विपरीत दिशामा 15 मिनेट (90°) मा परिक्रमण गरियो भने 1.45 बजेको हुन्छ । यस्तो परिक्रमणलाई धनात्मक परिक्रमण (positive rotation) भनिन्छ ।

(ख) ज्यामितीय चित्रको परिक्रमण

चित्र नं. (4) मा रेखा AB लाई बिन्दु O को घडीको सुईको विपरीत दिशा वा धनात्मक दिशामा 90° को परिक्रमण गर्दा बनेको प्रतिबिम्ब A' B' हो । त्यस्तै रेखा AB लाई बिन्दु O को घडीको दिशा वा ऋणात्मक दिशामा 90° को परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब A" B" हो ।



चित्र नं. 4

3. परिक्रमणका तथ्यहरू

माथिका छलफलहरूबाट परिक्रमणका बारेमा के के तथ्यहरू पत्ता लगाउन सक्छौ ? लेख । ती तथ्यहरूलाई साथीसँग छलफल गर । तल दिइएका तथ्यहरूसँग तुलना गरी हेर ।

- कुनै पनि ज्यामितीय आकृतिलाई दिइएको कोण र दिशामा दिइएको बिन्दुको वरिपरि घुमाएर स्थानान्तरण गर्नुलाई परिक्रमण (rotation) भनिन्छ ।
- घडीको सुईको दिशामा भएको परिक्रमणलाई ऋणात्मक परिक्रमण (negative rotation) भनिन्छ ।
- घडीको सुईको विपरीत दिशामा भएको परिक्रमणलाई धनात्मक परिक्रमण (positive rotation) भनिन्छ ।
- परिक्रमणले समतल सतहमा रहेका ज्यामितीय आकृतिहरूलाई कुनै बिन्दुबाट एउटै दिशा र उत्तिकै कोणमा स्थानान्तरण गर्दछ ।

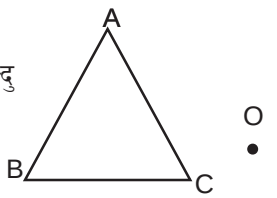
उदाहरण 1

तल दिइएको चित्र ABC लाई बिन्दु O को वरिपरि 60° को धनात्मक दिशामा परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब खिचेर देखाऊ ।

समाधान

तरिका

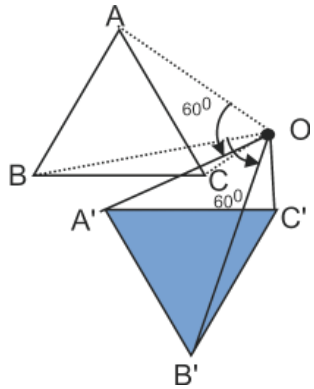
1. A र O जोडौँ । O लाई परिक्रमण बिन्दु मानेर OA अर्धव्यास लिएर बिन्दु A लाई 60° को धनात्मक दिशा (घडीको विपरीत दिशा) मा परिक्रमण गरी A को प्रतिबिम्ब A' पत्ता लगाऔँ ।



2. B र O जोडौँ । O लाई केन्द्र मानेर OB अर्धव्यास लिएर बिन्दु B लाई 60° को धनात्मक दिशामा परिक्रमण गरी B को प्रतिबिम्ब B' पत्ता लगाऔँ ।

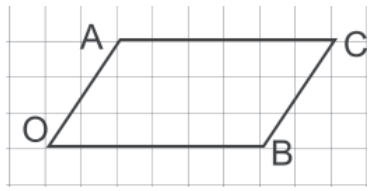
3. C र O जोडौँ । O लाई केन्द्र मानेर OC अर्धव्यास लिएर बिन्दु C लाई 60° धनात्मक दिशामा परिक्रमण गरी C को प्रतिबिम्ब C' पत्ता लगाऔँ ।

4. रुलरको सहायताले A'B'C' क्रमैसँग जोडौँ । अब बन्ने चित्र ΔA'B'C' दिइएको ΔABC को आवश्यक धनात्मक परिक्रमण हो ।



उदाहरण 2

दिइएको चित्रमा समानान्तर चतुर्भुज OACB लाई केन्द्र बिन्दु O को वरिपरि 180° को ऋणात्मक दिशामा परिक्रमण गर । यसरी बन्ने प्रतिबिम्बको चित्र खिचेर देखाऊ ।

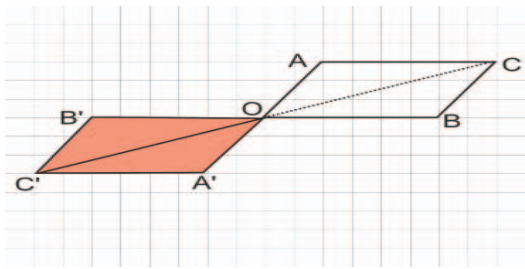


समाधान

तरिका

1. बिन्दु A लाई OA अर्धव्यास लिएर 180° को ऋणात्मक दिशामा O बाट परिक्रमण गरी A' पत्ता लगाऔँ ।

2. त्यस्तै गरी क्रमश: बिन्दुहरू B र C लाई पनि क्रमश: OB र OC अर्धव्यास लिएर 180° को ऋणात्मक दिशामा परिक्रमण गरी प्रतिबिम्बहरू B' र C' पत्ता लगाऔँ ।



3. अब क्रमश: O र A', O र B', B' र C' तथा C' र O जोडौँ ।

यसरी बन्ने समानान्तर चतुर्भुज OA'C'B' दिइएको समानान्तर चतुर्भुज OABC को आवश्यक ऋणात्मक परिक्रमणको प्रतिबिम्ब हो ।

नोट : के 180° को ऋणात्मक र धनात्मक दुवै परिक्रमणले एउटै प्रतिबिम्ब देलान् ? छलफल गर ।

अभ्यास 8.2

1. **तलका समयमा घडीको मिनेट सुईले कति पटक परिक्रमण गर्छ ? पत्ता लगाऊ :**

(क) 1 घण्टा (ख) 1/2 घण्टा (ग) 15 मिनेट (घ) 20 मिनेट (ङ) 45 मिनेट

2. **घडीका सुईहरूले निम्नानुसारका परिक्रमण गर्दा कति समय घटी वा बढी हुन्छ ?**

(क) मिनेट सुईको धनात्मक दिशामा एक चौथाइ फन्का (90°) को परिक्रमण

(ख) मिनेट सुईको ऋणात्मक दिशामा दुई चौथाइ वा आधा फन्का (180°) को परिक्रमण

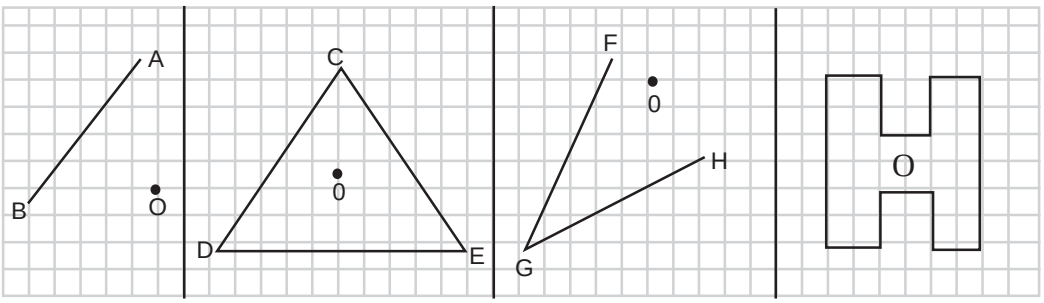
(ग) मिनेट सुईको धनात्मक दिशामा एक पूरा फन्का (360°) को परिक्रमण

(घ) घण्टा सुईको ऋणात्मक दिशामा एक चौथाइ (90°) को परिक्रमण

(ङ) सेकेन्ड सुईको धनात्मक दिशामा तीन चौथाइ (270°) को परिक्रमण

3. तलका ज्यामितीय आकारहरूलाई दिइएका परिक्रमणको बिन्दु O, दिशा र कोणमा परिक्रमण गर । परिक्रमणको तरिका पनि लेख । यसरी बन्ने प्रतिबिम्बको चित्र खिचेर देखाऊ ।

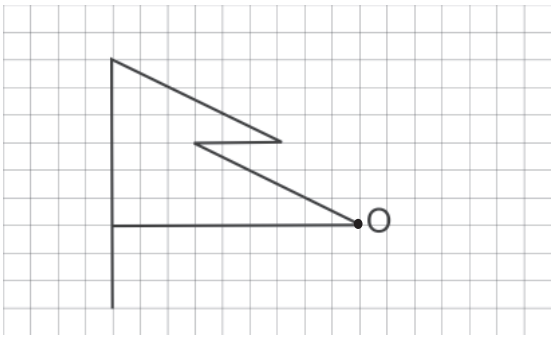
(क) (ख) (ग) (घ)



बिन्दु O मा 90° धनात्मक दिशामा | बिन्दु O मा 270° को ऋणात्मक दिशामा | बिन्दु O मा 30° को ऋणात्मक दिशामा | बिन्दु O मा 180° को ऋणात्मक दिशामा

नोट : 270° को ऋणात्मक परिक्रमण = 90° को धनात्मक परिक्रमण हुन्छ ? कसरी ? शिक्षकसँग परामर्श गरी पत्ता लगाऊ ।

4. दिइएको चित्रलाई ऋणात्मक दिशामा 90° र 180° मा परिक्रमण गर्दा बन्ने चित्र खिचेर देखाऊ । परिक्रमण गर्दा कुन कुन प्रक्रिया अपनायौ ? बुँदागत रूपमा लेख ।



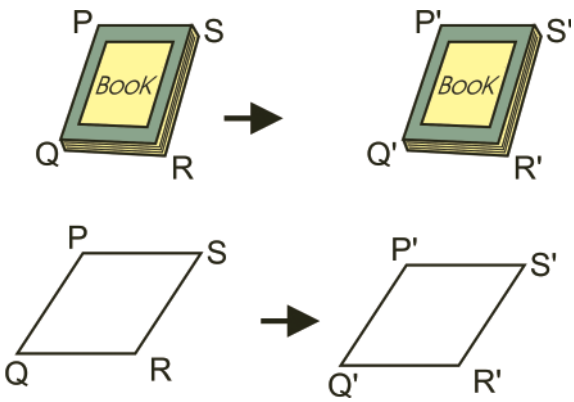
8.3 विस्थापन (Displacement)

1. विस्थापनको परिचय

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गर र छलफल गर :

(क) एउटा पुस्तकलाई ठुलो सेतो कागजमाथि राखौँ । त्यसबाट ट्रेस गरी एउटा PQRS चतुर्भुज बनाऔँ । यस पुस्तकलाई सिधा रेखामा अलि पर सारौँ । त्यसबाट पनि ट्रेस गरी अर्को चतुर्भुज P'Q'R'S' बनाऊ ।

अब PP',QQ',RR' र SS' को सम्बन्ध के होला छलफल गर । यहाँ पुस्तक PQRS लाई P'Q'R'S' मा विस्थापन गरिएको भनिन्छ ।



के आकृति र प्रतिबिम्ब अनुरूप छन् ?

अब माथिको क्रियाकलापका आधारमा विस्थापनको परिभाषा लेख । आफूले लेखेको परिभाषालाई साथीसँग तुलना गरी हेर र छलफल गर । अब निष्कर्षलाई तलका तथ्यहरूसँग तुलना गरी हेर ।

1. समतल सतहमा रहेका ज्यामितीय आकृतिका हरेक बिन्दुलाई उत्तिकै दुरी र उही दिशामा स्थान्तरण गर्नुलाई विस्थापन (displacement) भनिन्छ ।
2. विस्थापनलाई परिभाषित गर्नका लागि विस्थापनको परिमाण वा नाप र दिशा उल्लेख गर्नुपर्दछ ।
3. विस्थापनका आकृति र प्रतिबिम्बअनुरूप हुन्छन् ।
4. कुनै पनि बिन्दुलाई विस्थापन गर्दा दिइएको परिमाण र दिशामा समानान्तर रेखा खिच्नुपर्छ ।

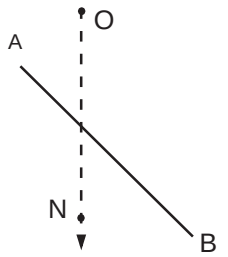
छलफल गर

(क) एउटा मोटर 15 मिटर सोझै अगाडि बढायो भने के त्यसका सबै बिन्दुहरू बराबर दुरी र उही दिशामा स्थानान्तरण हुन्छन् ? के यो विस्थापन हो ?

(ख) भुइँमा राम्ररी मिलाएर बिछ्याइएको कम्मल वा ठुलो कार्पेटको कुनै एउटा मात्र टुप्पो समातेर 1 मिटर आफूतिर तान्दा के बाँकी सबै टुप्पाहरू उही दिशा र परिमाणमा स्थानान्तरण होलान् ?

उदाहरण 1

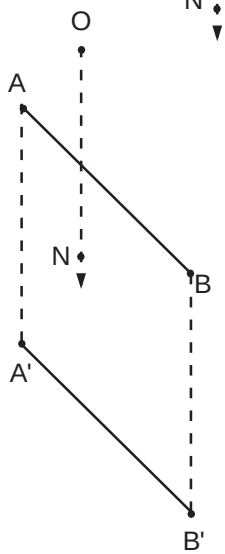
सँगैको रेखाखण्ड AB लाई किरण रेखा (ray) ON को परिमाण र दिशामा विस्थापित गर :



समाधान तरिका

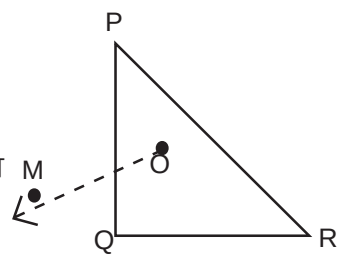
1. बिन्दु A बाट ON को दिशा र परिमाणसँग बराबर र समानान्तर हुने गरी AA' खिच ।
2. बिन्दु B बाट ON को दिशा र परिमाणसँग बराबर र समानान्तर हुने गरी BB' खिच ।
3. A' र B' जोड ।

   यसरी रेखाखण्ड A'B' नै रेखाखण्ड AB को ON मा दिशा र परिमाणमा विस्थापित प्रतिबिम्ब हो ।



उदाहरण 2

दिइएको चित्रमा ΔPQR लाई दिएको किरण रेखा OM को दिशा र परिमाणमा विस्थापन गर ।

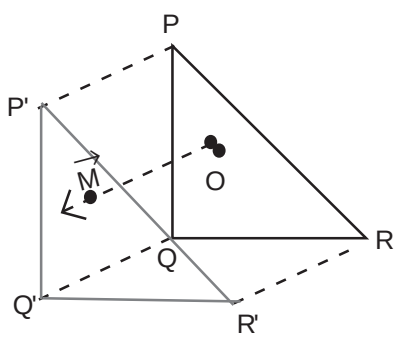


समाधान तरिका

1. P बाट OM सँग बराबर र समानान्तर हुने गरी OM को दिशामा PP' खिच ।
2. Q बाट OM सँग बराबर र समानान्तर हुने गरी OM को दिशामा QQ' खिच ।
3. R बाट OM सँग बराबर र समानान्तर हुने गरी OM को दिशामा RR' खिच ।

४. अब P', Q' र R' लाई क्रमैसँग जोड ।

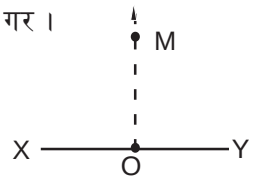
यसरी बनेको $\Delta P'Q'R'$ नै ΔPQR को OM को दिशा र परिमाणमा विस्थापित प्रतिबिम्ब हो ।



नोट : किरण रेखाको नाप लिँदा दुईओटा बिन्दुहरूको बिचको मात्र लम्बाइको नाप लिनुपर्छ । समानान्तर रेखा खिच्दा सेटस्क्वायरको प्रयोग गर्नुपर्छ ।

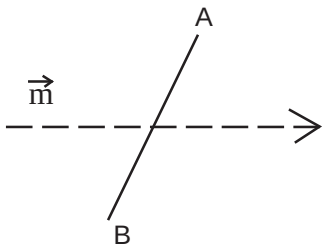
अभ्यास 8.3

1. विस्थापनको उदाहरणसहित परिचय देऊ ।
2. विस्थापनमा कुन कुन तथ्यहरू हुन्छन् ? चित्रसहित लेख ।
3. विस्थापनका कुनै 3 ओटा तथ्यहरूलाई उदाहरण र चित्रसहित उल्लेख गर ।
4. रेखा XY लाई OM को नाप र दिशामा विस्थापन गरेर देखाऊ ।

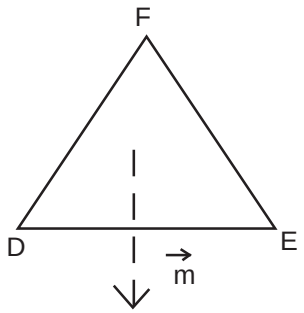


5. एउटा पेन्सिललाई न्युजप्रिन्ट वा ड्राइङ पेपरको बिच भागमा राखी ट्रेस गर । त्यसलाई चारै दिशामा 5cm को परिमाणमा क्रमश: विस्थापन गरी आकृतिहरू बनाऊ । उक्त आकृतिहरूलाई कक्षामा छलफल गरी सजाएर राख ।
6. साथीले दिएको दिशा र परिमाणमा एक एकओटा चित्र वा वस्तुहरूलाई विस्थापन गर ।
4. तलका प्रत्येक ज्यामितीय चित्रहरूलाई दिशामा विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब खिचेर देखाऊ ।

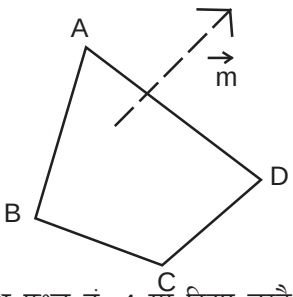
(क)

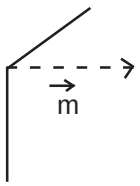


(ख)



(ग)





5. माथि प्रश्न नं. 4 मा दिइए जस्तै 5 ओटा समस्या बनाऊ र विस्थापन गरी प्रतिबिम्ब पनि बनाऊ । आफ्ना प्रत्येक समस्या साथीसँग आपसमा समाधान गर । साथीको प्रतिबिम्ब र विस्थापन तरिकालाई तिम्रोसँग तुलना गरी हेर ।

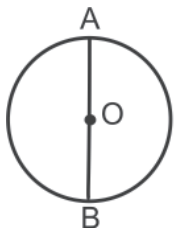
एकाइ 9

सममिति र टेसलेसन (Symmetry and Tessellation)

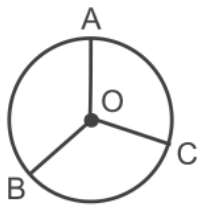
9.1 रेखा र बिन्दु सममिति (Line and Point Symmetry)

तलका बिन्दु सममितिहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

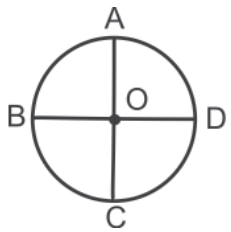
(क) तलका चित्रहरू र क्रियाकलापका आधारमा बिन्दु सममिति पत्ता लगाऊ ।



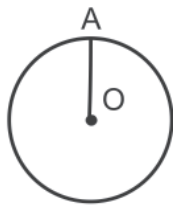
चित्र नं. 9.1



चित्र नं. 9.2



चित्र नं. 9.3



चित्र नं. 9.4

1. चित्र 9.1 को आकृतिलाई एउटा पातलो कागजमा ट्रेस गर । यसरी ट्रेस गरिएको चित्र, चित्र 9.1 सँग सर्वाङ्गसम अर्थात् अनुरूप हुन्छ ।
2. यसलाई चित्र 9.1 मा ठिक मिल्ने गरी वृत्तको केन्द्र O मा पेन्सिलको टुप्पोले थिच ।
3. अब माथिको चित्रलाई घुमाउँदै जाँदा चित्र 9.1 मा पुरै नखप्टेसम्म घुमाउँदै जाऊ ।
4. अब एक फन्को घुमाउँदा माथिको चित्रको कति अंश घुमायौ होला ? बिन्दु A कहाँ पुग्यो होला ?
5. अब यस स्थितिबाट फेरि नखप्टेसम्म घुमाऊ । यस पटक एक फन्कोको कति पटक घुमायौ होला ।

चित्र नं. 9.1 मा ट्रेस गरिएको सर्वाङ्गसम आकृतिलाई बिन्दु O मा पूरा एक फन्को घुमाउँदा 2 पटक खप्टियो । यस्ता चित्रमा श्रेणी 2 (order -2) को बिन्दु वा परिक्रमिक सममिति भएको मानिन्छ । त्यसैले चित्र 9.1 को बिन्दु सममितिको श्रेणी 2 भयो । (चित्र नं. 9.2 मा ट्रेस गरिएको सर्वाङ्गसम आकृतिलाई बिन्दु O मा पूरा एक फन्को घुमाउँदा 3 पटक खप्टियो । त्यसैले यस चित्रको बिन्दु सममितिको श्रेणी 3 भयो ।)

चित्र 9.2 को क्रियाकलाप

1. चित्र नं. 9.2 लाई पातलो कागजमा ट्रेस गर ।
2. यसलाई चित्र नं. 9.2 को O बिन्दुमा केन्द्र पर्ने गरी एक पूरा फन्को घुमाऊ ।
3. यसरी घुमाउँदा कति पटक चित्र खप्टियो ? लेख ।
4. अब चित्र नं. 9.2 को बिन्दु सममितिको श्रेणी पत्ता लगाऊ ।

चित्र 9.3 को क्रियाकलाप

1. चित्र नं. 9.3 लाई पातलो कागजमा ट्रेस गर ।
2. यसलाई चित्र नं. 9.3 माथि राखी पूरा एक फन्को घुमाउँदा कति पटकअनुरूप आकृति खप्टिन्छ ? हेर र लेख ।
3. यसको बिन्दु सममितिको श्रेणी पत्ता लगाऊ ।
4. के तिम्रो श्रेणी 4 आयो, कसरी ?

चित्र 9.4 को क्रियालाप

1. चित्र नं. 9.4 लाई पनि पातलो कागजमा ट्रेस गर ।
2. यसलाई वृत्त ABC माथि राखेर पूरा एक फन्को घुमाऊ ।
3. कतिपटक आकृति खप्टियो ? लेख ।

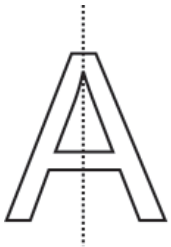
बिन्दु O मा चित्र नं. 9.4 मा ट्रेस गरिएको सर्वाङ्सम आकृति बिन्दु O मा घुमाउँदा आकृति एक पटक पनि खप्टिएन । त्यसैले यो आकृतिक बिन्दु सममिति हुँदैन ।

चित्र 9.4 को क्रियाकलापमा बिन्दु सममिति हुँदैन ।

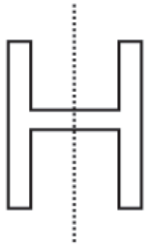
1. कुनै पनि आकृतिको अनुरूप आकृतिलाई कुनै निश्चित बिन्दुमा पूरा एक फन्को 360 डिग्री परिक्रमण गर्दा खप्टिने अवस्था आउनुलाई बिन्दु सममिति भएको भनिन्छ । माथिका चित्रहरूमध्ये चित्र नं. 9.1, चित्र नं. 9.2 र चित्र नं. 9.3 का अवस्थाहरूमा बिन्दु सममिति हुन्छ । तर चित्र नं. 9.4 मा बिन्दु सममिति हुँदैन । पूरा एक फन्को घुमाउँदा दिएको आकृति जति पटक खप्टिन्छ त्यसलाई आकृतिको श्रेणी भनिन्छ ।

2. रेखा सममिति (Line of Symmetry)

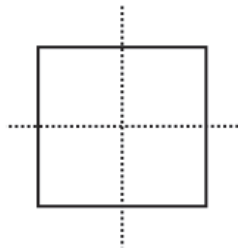
(क) तलका चित्र र क्रियाकलापका आधारमा छलफल गरी रेखीय सममिति पत्ता लगाउने प्रयास गरौं ।



चित्र नं. 9.5



चित्र नं. 9.6



चित्र नं. 9.7

माथिका प्रत्येक चित्रमा डट लाइनले चित्रलाई ठिक 2 भागमा बाँडिएको छ । त्यसैले माथिका प्रत्येक चित्र सममिति हुने खालका (symmetrical) छन् । प्रत्येक चित्रलाई दुई भागमा बाँड्ने डट रेखा (dot line) लाई रेखा वा रेखीय सममिति (line of symmetry) भनिन्छ । रेखीय सममितिलाई सममितिको अक्ष (axis of symmetry) वा ऐना रेखा (mirror line) पनि भन्ने गरिन्छ ।

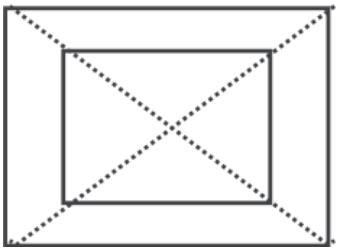
अब तलका प्रश्नहरूमा छलफल गरौँ :

1. माथिको चित्र नं. 9.5, चित्र नं. 9.6 र चित्र नं. 9.7 मा कति कतिओटा रेखीय सममितिका अक्षहरू छन् ?
2. चित्र नं. 9.5 को परिक्रमिक सममिति कति श्रेणीको होला ?
3. त्यस्तै चित्र 9.6 र 9.7 को परिक्रमिक सममिति कति कति श्रेणीका छन् ?

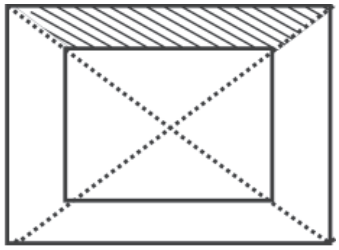
माथिका चित्रहरूमध्ये चित्र नं. 9.5 र 9.6 मा रेखीय सममितिको अक्ष एउटा छ । त्यस्तै चित्र नं. 9.7 मा सममितिका अक्ष 2 ओटा छन् ।

चित्र नं. 9.6 लाई डट रेखामा घुमाउँदा एक पटक मात्र चित्र खप्टिन्छ । त्यसैले चित्र 9.6 को रेखीय सममितिको परिक्रमिक श्रेणी (order) 1 हुन्छ । त्यस्तै चित्र नं. 9.7 को परिक्रमिकको रेखीय सममिति श्रेणी 2 हुन्छ । कसरी ?

(ख) अब तलका दुईओटा चित्रका आधारमा तलका क्रियाकलापमा छलफल गरौँ ।



चित्र नं. 9.8



चित्रं. 9.9

- चित्र 9.8 को रेखीय सममितिको परिक्रमण श्रेणी कति होला ?
- चित्र 9.8 को रेखीय सममितिको अक्ष कति ओटा छन् ?
- हो माथिको चित्र नं. 9.8 मा रेखीय सममिति र रेखीय सममितिका अक्षहरू 2 ओटा छन् । यसको परिक्रमिक सममितिको श्रेणी 4 हुन्छ ? कसरी ?

चित्र 9.8 को क्रियाकलाप

- सर्वप्रथम चित्र 9.8 लाई अभ्यास पुस्तिकामा ट्रेसिङ गर ।
- चित्र 9.9 मा पूरा कति भागमध्ये कति भागलाई छाया पारिएको छ ?
- परिक्रमिक सममितिको श्रेणी कति होला ?
- कतिओटा रेखीय सममितिका अक्षहरू छन् ।
- यसलाई कुनै अर्को भागमा छायाँ पाऱ्यो भने 2 ओटा रेखीय सममितिको अक्ष र परिक्रमिक सममितिको श्रेणी 2 भएको नयाँ आकृति बन्छ ?
- यसरी बनेको चित्रमा एउटै मात्र सममितिको अक्ष र परिक्रमिक सममितिको श्रेणी घट्ने गरी अर्को तेस्रो भागलाई छाया पार । के तिमीले परिक्रमिक सममितिको श्रेणी 2 हुने गरी चौथो भागमा छाया पार्न सक्छौ ?

➨ यसको रेखीय सममितिको अक्षहरू कतिओटा छन् ?

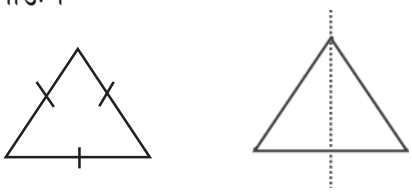
माथिका क्रियाकलापहरूबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? साथीसँग छलफल गरी लेख । के तिम्रो निष्कर्ष तलको निष्कर्षसँग मिल्छ । तुलना गरी हेर ।

ज्यामितीय आकृतिहरूमा रेखीय सममितिको परिक्रमिक श्रेणी 1 भन्दा कम हुन सक्दैन । चित्र र रेखीय सममितिको अक्षअनुसार यसको श्रेणीमा फरक पर्दछ ।

उदाहरण 1

चित्रमा बिन्दुरेखा (dot line) को प्रयोग गरी रेखीय सममिति बनाऊ ।

प्रत्येक चित्रमा कति श्रेणी भयो ? लेख ।



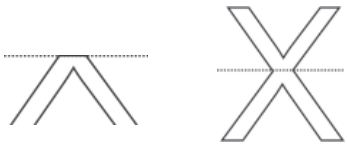
समाधान : एउटा रेखीय सममितिको अक्ष बनाउँदा,

यहाँ सममितिको श्रेणी 2 छ ।

उदाहरण 2

तल रेखा सममितिको अक्ष र आधा चित्र दिइएको छ । यसलाई पूरा गर ।

रेखीय सममितिको परिक्रमिक श्रेणी पनि पत्ता लगाऊ ।



समाधान

यसको परिक्रमिक रेखीय सममितिको श्रेणी 4 छ ।

उदाहरण 3

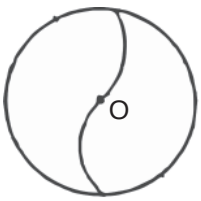
दिइएको चित्रलाई बिन्दु 0 मा परिक्रमण गर । अब बिन्दु सममितिका आधारमा परिक्रमिक श्रेणी पत्ता लगाऊ ।

समाधान : प्रश्नको चित्रलाई बिन्दु O मा एक पूरा परिक्रमण गर्दा 3 पटक खप्टिन्छ । त्यसैले यस बिन्दु सममितिको परिक्रमण श्रेणी 3 हुन्छ ।

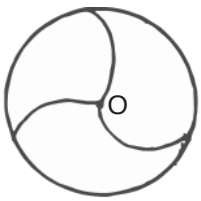
अभ्यास 9.1

1. तलका चित्रहरू अभ्यास पुस्तिकामा सार । प्रत्येक चित्रलाई ट्रेस गरी O बिन्दुमा परिक्रमण गरी हेर र परिक्रमिक श्रेणी पत्ता लगाऊ ।

(क)

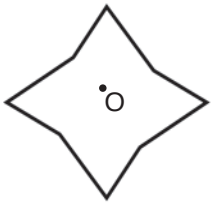


(ख)

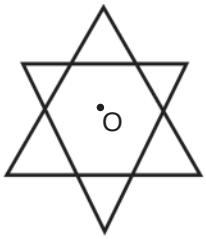


(ग)

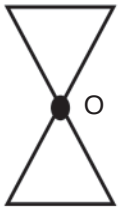
(घ)



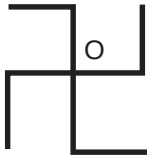
(ङ)



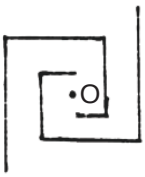
(च)



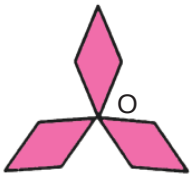
(छ)



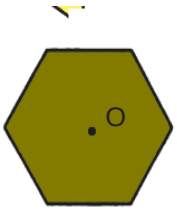
(ज)



(झ)

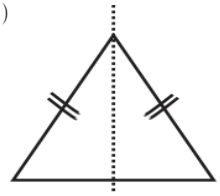


(ञ)

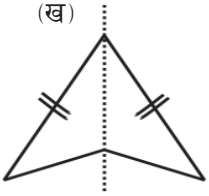


2. **तलका प्रत्येक बिन्दुरेखालाई ट्रेसिङ गर । रेखीय सममिति खिच । रेखीय सममितिको परिक्रमण श्रेणी कति भयो लेख ।**

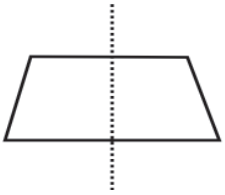
(क)



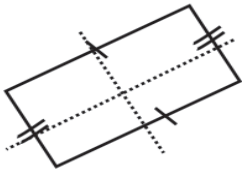
(ख)



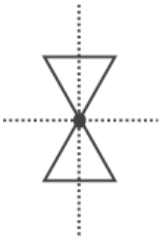
(ग)



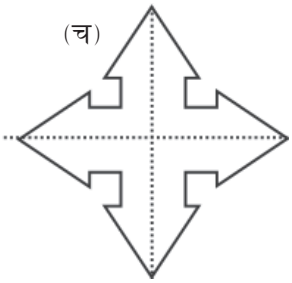
(घ)



(ङ)

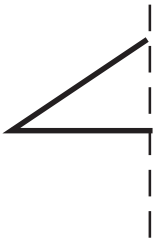


(च)

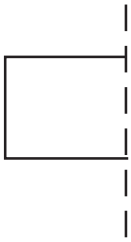


3. **तल चित्रमा रेखीय सममितिको अक्ष र आधा चित्र दिइएको छ । चित्र पूरा गर र परिक्रमिक श्रेणी पनि पत्ता लगाऊ ।**

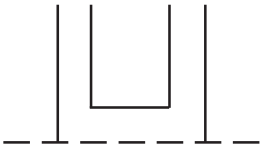
(क)



(ख)



(ग)

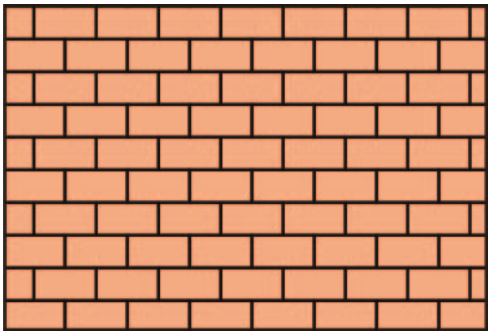


9.2 बहुभुजका ढाँचाहरूबाट टेसेलेसन (Tessellation by using Polygons)

1. टेसेलेसनको धारणा

तलका प्रश्न र क्रियाकलापमा छलफल गर ।

(क) तिमीले इँटा वा ढुङ्गाहरू छापेका देखेका छौ ? तिम्रो घर र विद्यालयमा यस्तो कहाँ कहाँ छन् ?



(ख) इँटाहरूलाई कसरी मिलाएर राखिएको छ ?

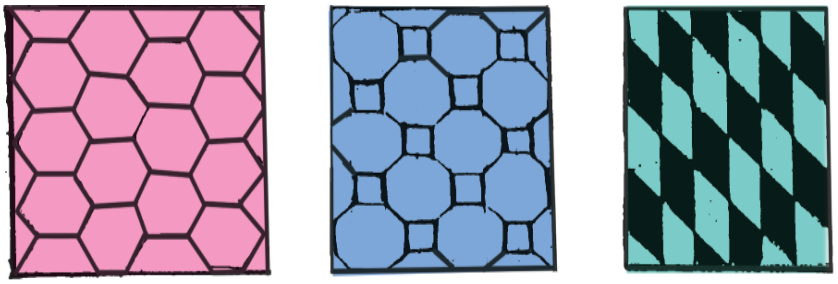
(ग) इँटाहरू कुन कुन आकारका छन् ?

(घ) के यी इँटाहरूलाई अर्को तरिकाले पनि छाप्न सकिन्थ्यो ?

(ङ) तिम्रो घरमा भएको डोको, बाँस वा प्लास्टिकको डोको तथा कलमदानीमा प्रत्येक पाताहरू कसरी राखेका छन् ?

(च) यस्ता अन्य उदाहरणहरू खोजी गर ।
(जस्तै : कार्पेट, कमिज, कुर्ता सुरुवाल, तन्ना आदि)

(छ) तलका चित्रमा कति कति ओटा उस्तै ज्यामितीय आकृतिहरू प्रयोग भएका छन् ? छलफल गर ।



(ज) मौरीले आफ्नो घार कसरी बनाएको हुन्छ ? चित्र बनाएर लेख ।

- माथिका प्रत्येक चित्रहरूमा सतहहरूलाई पूरा गर्न एकभन्दा बढी उस्तै प्रकारका ज्यामितीय आकृतिहरू प्रयोग भएका छन् ।
- माथिका सबै उदाहरणहरू टेसेलेसनका उदाहरणहरू हुन् ।

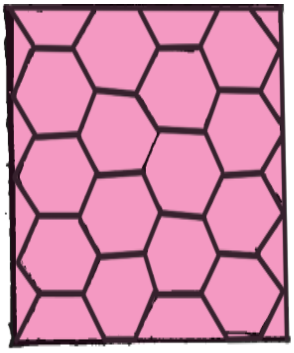
(झ) समबाहु त्रिभुज, वर्ग, आयत र नियमित बहुभुजबाट एक एक ओटा टेसेलेसन बनाई देखाऊ ।

(ञ) अब माथिका उदाहरणहरू र क्रियाकलापहरूका आधारमा टेसेलेसनको अर्थ लेख । आफ्नो परिभाषालाई साथीको परिभाषासँग तुलना गरी हेर । निष्कर्षलाई कक्षामा छलफल गर । के तिम्रो निष्कर्ष तलको भनाइसँग मिल्छ ? तुलना गरी हेर ।

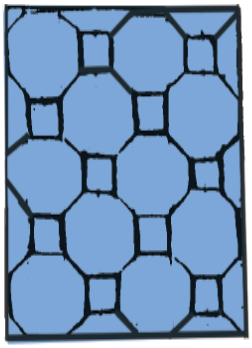
> एकभन्दा बढी उस्तै प्रकारका ज्यामितीय आकृतिका टायल वा चित्रहरू नखप्टाइकन र खाली ठाउँ नराखीकन समतल सतह ढाक्ने वा छोप्ने प्रक्रियालाई टेसेलेसन वा टायलिङ (tessellation or tilling) भनिन्छ ।

2. टेसेलेसनका प्रकार

तलका चित्रहरू अध्ययन गरी छलफल गर :



चित्र नं. 9.11



चित्र नं. 9.12

चित्र नं. 9.13

(क) चित्र नं. 9.11 मा कति प्रकारका र कस्ता ज्यामितीय चित्र प्रयोग भएका छन् ?

(ख) के चित्र नं. 9.12 मा प्रयोग भएका दुवै ज्यामितीय चित्रहरू नियमित (regular) छन् ?

(ग) चित्र नं. 9.13 मा प्रयोग भएका ज्यामितीय चित्र नियमित वा अनियमित के हुन् ?

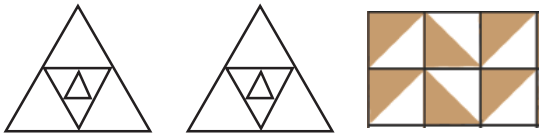
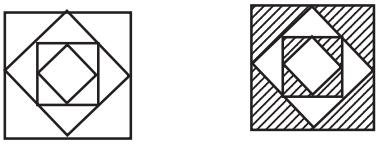
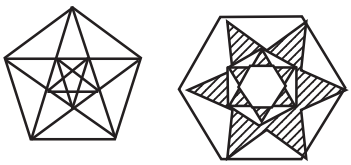
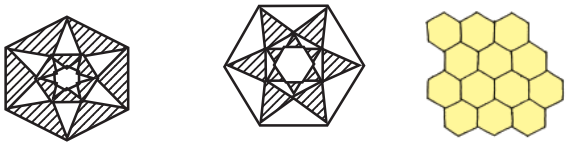
माथिका चित्रमा चित्र नं. 9.11 को चित्र नियमित टेसेलेसन (regular tessellation) हो । चित्र नं. 9.12 को अर्ध वा नियमित टेसेलेसन (semiregular tessellation) हो । त्यस्तै चित्र नं. 9.13 को चित्र अनियमित टेसेलेन (irregular tesselation) हो ।

अब माथिका छलफलका आधारमा नियमित, अर्ध नियमित र अनियमित टेसेलेसनको परिभाषा लेख । आफ्नो परिभाषालई साथीको परिभाषासँग तुलना गरी निष्कर्षलाई कक्षामा छलफल गर । के तिम्रो निष्कर्ष तलको भनाइसँग मिल्छ ? तुलना गर ।

1. टेसेलेसन नियमित, अर्ध नियमित र अनियमित गरी 3 किसिमका हुन्छन् ।
3. एकै प्रकारका नियमित ज्यामितीय आकृति प्रयोग भएर बनेका टेसेलेसनलाई नियमिति टेसेलेसन (reguar tessellation) भनिन्छ ।
3. दुई वा दुईभन्दा बढी प्रकारका नियमित ज्यामितीय आकृति प्रयोग गरी बनेका टेसेलेसनलाई अर्ध नियमित टेसेलेसन (semiregular tessellation) भनिन्छ ।
4. अनियमित ज्यामितीय आकृतिहरू प्रयोग गरी बनेका टेसेलेसनलाई अनियमित टेसेलेसन (irregular or non-ragular tessellation) भनिन्छ ।

3. बहुभुजका ढाँचाहरू

(क) तलका बहुभुजका ढाँचा अध्ययन गरी छलफल गर :

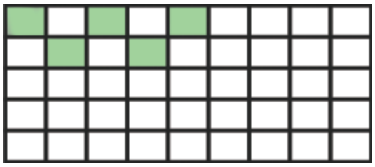
क्र.स.	ज्यामिति आकृति/ढाँचा
1.	समबाहु त्रिभुजको ढाँचा 
2.	वर्गको ढाँचा 
3.	नियमित पञ्चभुजको ढाँचा 
4.	षड्भुजको ढाँचा 

(ख) माथिका प्रत्येक टेसेलेसनलाई ड्रइङ पेपरमा बनाएर कक्षाकोठामा सजाएर राखी छलफल गर ।

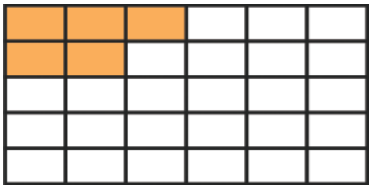
अभ्यास 9.2

1. **तलका टेसेलेसनका ढाँचाहरूलाई ट्रेसिङ गरेर ग्राफ पेपरमा सारेर पूरा गर :**

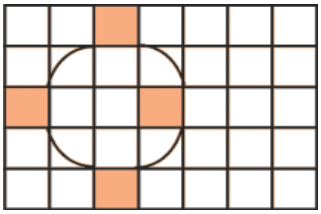
(क)

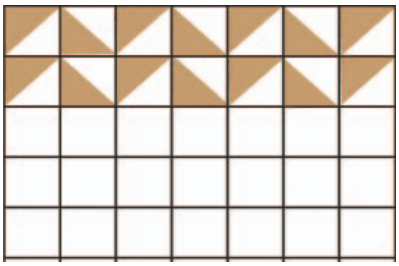


(ख)



(ग)

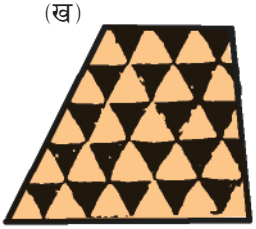




2. तलका प्रत्येक टेसेलेसनमा कुन कुन ज्यामितीय आकृति प्रयोग भएका छन्, लेख :

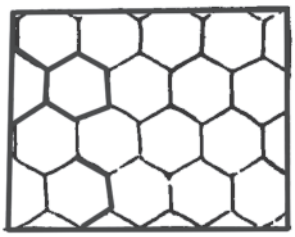
(क)

(ख)

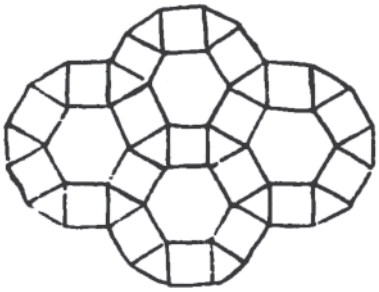


(ग)

(घ)



(ङ)



3. प्रश्न नं. 2 मा प्रयोग भएका वा अन्य 5/5 ओटा टेसेलेसन बनाऊ/खोज । प्रत्येक टेसेलेसनलाई कागजमा ट्रेस गर र आफूलाई मन पर्ने रङ लगाएर देखाऊ ।

4. प्रश्न नं. 3 का टेसेलेसनहरूमध्ये नियमित, अर्ध नियमित र अनियमिति टेसेलेसन छुट्याएर लेख ।

5. टेसेलेसनको उदाहरणसहित परिभाषा लेख ।

6. टेसेलेसन कति प्रकारका हुन्छन् ? प्रत्येकको उदाहरणसहित परिभाषा लेख ।

7. कुनै 2/2 ओटा नियमित, अर्ध नियमित र अनियमित टेसेलेसनका ढाँचा प्रयोग गरी कागज तथा कपडामा टेसेलेसन गरी कक्षामा प्रदर्शन गर । भित्तामा वा धागाले सिलिङमा झुन्ड्याएर प्रदर्शन पनि गर ।

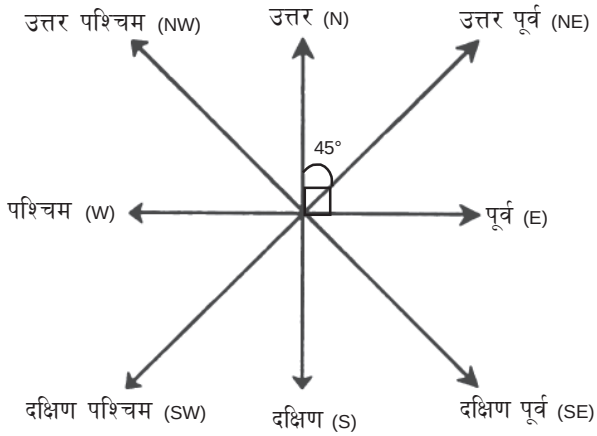
एकाइ 10 दिशास्थिति र स्केल ड्राइङ (Bearing and Scale Drawing)

10.1 दिशास्थिति र नक्साको पढाइ (Bearing and Map Reading)

1. दिशा स्थिति (Bearing)

तलका क्रियाकलापहरू

अध्ययन गरी छलफल गर ।



(क) चित्रमा कतिओटा दिशाहरू देखाइएको छ ? तिनीहरू के के हुन् ?

(ख) उत्तर र पूर्व दिशा देखाउने रेखाले कति डिग्रीको कोण बनाएको छ ? लेख ।

(ग) उत्तर र उत्तर पूर्व दिशा देखाउने रेखाबिच कति डिग्रीको कोण छ ? नापेर पत्ता लगाऊ ।

(घ) के उत्तर र पश्चिम, पश्चिम र दक्षिण तथा दक्षिण र पूर्व देखाउने रेखाहरूबिच पनि 90° का कोण बनेका छन् ?

(ङ) के उत्तर र उत्तर पश्चिम, पश्चिम र दक्षिण पश्चिम तथा दक्षिण र दक्षिण पूर्व देखाउने सबै रेखाहरूले आपसमा 45°/45° का कोण बनाएका छन् ।

(च) विद्यालय कम्पाउन्ड वा चउरमा गएर माथि चित्रमा देखाएजस्तै गरी प्रत्येक दिशामा एक एक जना साथीहरू उभिएर दिशा स्थिति पत्ता लगाउने अभ्यास गर । प्रत्येक साथीलाई दिशास्थितिको नामले बोलाऊ ।

2. नक्साको पढाइ (Map Reading)

माथिको नक्सा र नक्सामा दिइएका स्थानहरू अध्ययन गरी छलफल गर ।

(क) काठमाडौँलाई केन्द्र मानी तलका स्थानहरूको दिशा स्थिति पत्ता लगाऊ :

(अ) जनकपुर (आ) जुम्ला (इ) नेपालगन्ज (ई) इलाम

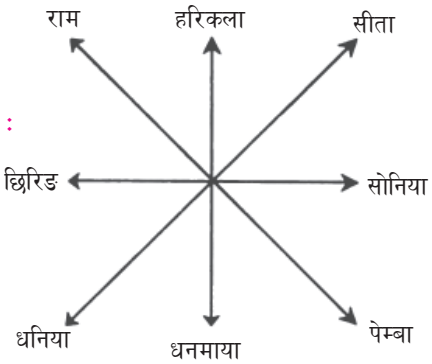
(उ) वीरगन्ज (ऊ) सगरमाथा हिमाल

(ख) पोखरालाई केन्द्र मानी निम्नलिखित स्थानहरूको दिशास्थिति पत्ता लगाऊ :

(अ) महेन्द्रनगर (आ) अन्नपूर्ण हिमाल (इ) इलाम (ई) वीरगन्ज

(ऊ) सगरमाथा हिमाल (ऊ) काठमाडौँ (ए) जुम्ला

कुनै पनि नक्सामा भौगोलिक स्थान, नदीनाला, हिमाल, वनजङ्गल, बाटोघाटो, प्रदेश छुट्याइएको हुन्छ । कुनै पनि नक्सामा दिइएको स्थान पत्ता लगाउन नक्सालाई पढ्ने बारेमा ज्ञान, सिप र क्षमता हासिल गर्नुपर्ने हुन्छ ।



अभ्यास 10.1

1. सँगैको चित्रको आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर देऊ :

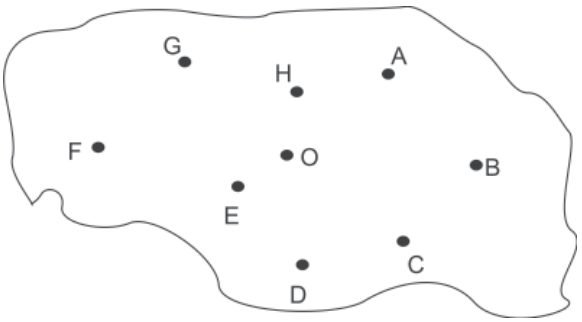
(क) छिरिङ उभिएको स्थानको दिशास्थिति कुन हो ?

(ख) धनियाको दिशास्थिति कुन होला ?

(ग) के धनमाया र पेम्बाको दिशास्थिति मिल्छ ?

(घ) माथिको चित्रबाट प्रश्न नं. (क), (ख) र (ग) बाहेक 3/3 ओटा थप प्रश्नहरू बनाई साथीसँग आपसमा दिशास्थिति पत्ता लगाउने अभ्यास गर ।

2. तलको चित्र पढी सोधिका प्रश्नहरूको जवाफ लेख :



(क) स्थान O बाट बिन्दु G को दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।

(ख) स्थान O बाट बिन्दु C को दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।

(ग) स्थान D बाट बिन्दु F को दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।

(घ) स्थान O बाट बिन्दु A को दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।

(ङ) माथिको चित्रबाट बन्न सक्ने थप समस्या बनाई समाधान गर ।

3. तलको नेपालको नक्साका आधारमा सोधिएका प्रश्नहरूको जवाफ लेख :

(क) बुटवलबाट पोखराको दिशास्थिति लेख ।

(ख) वीरगन्जबाट विराटनगरको दिशास्थिति लेख ।

(ग) वीरेन्द्रनगरबाट महेन्द्रनगरको दिशास्थिति लेख ।

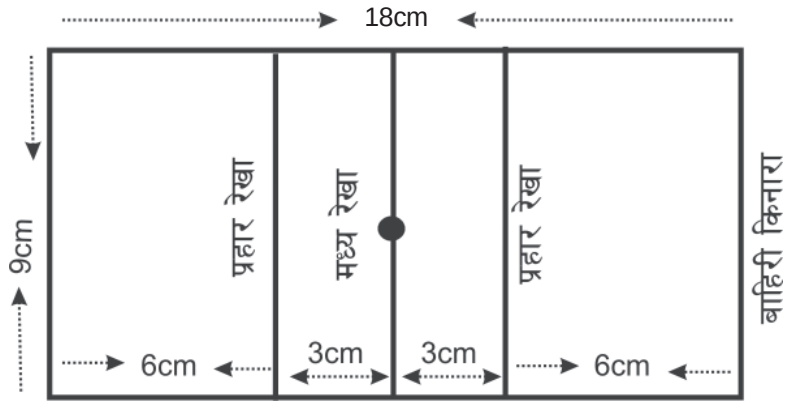
4. नेपालको राजनीतिक नक्सा लिएर कुनै एउटा जिल्ला सदरमुकामलाई केन्द्र मानी 8 ओटै दिशामा पर्ने एक एकओटा स्थान पत्ता लगाई नाम लेख ।

10.2 स्केल ड्रइङ (Scale Drawing)

तल दिइएका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर ।

(क) तलको भलिबल कोर्टको चित्रको आधारमा दिइएको तालिका भर ।

भलिबल कोर्ट



स्केल 1:200 (1cm = 200cm)

क्र.सं.	रेखाको नाम	नक्साको रेखाको नाप	वास्तविक कोर्टको नाप	वास्तविक कोर्ट र नक्साको नापको अनुपात	निष्कर्ष
1.	कोर्टको लम्बाइ	9cm	18m	1:200	
2.	कोर्टको चौडाइ				
3.	मध्य रेखादेखि प्रहार रेखासम्मको दुरी				

- के वास्तविक कोर्टको सबै दुरी र नक्साको दुरीका अनुपात 1:200 आयो ?
- माथिको क्रियाकलापहरूका आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौँ ? आफ्नो निष्कर्षलाई साथीसँग छलफल गर ।

(ग) एउटा हात्ती र आँखाले देख्न नसकिने अमिबा आदिलाई एउटै पेजमा कसरी लेख्न सकिन्छ ? लेख र छलफल गर ।

निष्कर्ष :

1. यसरी ज्यादै ठुलो र ज्यादै साना साना वस्तुलाई रेखाङ्कन गर्नुपर्दा निश्चित स्केलको प्रयोग गरिन्छ ।
2. यस्तो स्केलमा वास्तविक वस्तु र चित्र खिची आवश्यकताअनुसार ठुलो वा सानो नाप लिएर निश्चित अनुपात बनाइन्छ । जस्तै : माथि क्रियाकलाप (ख) मा भलिबल कोर्डको अनुपात 1:200cm लिइएको छ । यसको अर्थ भलिबल कोर्टको प्रत्येक 200cm दुरीलाई नक्सामा 1cm मानी स्केल बनाइएको छ ।

अभ्यास 10.2

1. एउटा बगैंचाको वास्तविक लम्बाइ 150m र चौडाइ 100m छ । 1cm:10cm को अनुपात लिएर बगैंचाको रेखाङ्कन गरी देखाऊ ।

2. 1cm ले वास्तविक 15m जनाउने गरी 90m लम्बाइ र 45m चौडाइ भएको फुटबल मैदानको चित्र बनाएर देखाऊ ।

3. सँगैको चित्रमा 1cm ले वास्तविक 4m जनाउने गरी स्केल ड्रइङ गर र वास्तविक रूपमा धरहरा कति अग्लो रहेछ ? पत्ता लगाऊ ।

4. चित्रमा दिइएको रुख 1:15cm को scale मा बनाइएको छ । स्केलले नापेर रुखको वास्तविक उचाइ पत्ता लगाऊ ।

5. 1cm = 1.5m को स्केलमा खिचेको (चित्रमा दिइएको) गाडीको वास्तविक लम्बाइ कति होला ?

6. तल गण्डकी प्रदेशको नक्सा दिइएको छ । सो नक्सामा 1 cm = 50 km को स्केलमा विभिन्न स्थानहरू दिइएको छ । अब दिइएको जिल्लाहरूबिचको सबभन्दा छोटो र सबैभन्दा लामो दुरी पत्ता लगाऊ ।

(क) कास्कीदेखि पाल्पा

(ख) बागलुङदेखि गोरखा

(ग) म्याग्दीदेखि लमजुङ

(घ) गोरखादेखि स्याङ्जा

एकाइ 11 समूह (Set)

11.1 सर्वव्यापक समूह (Universal Set)

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

1. हिमालय माध्यमिक विद्यालय म्याग्दीका कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूले समूह एकाइमा छलफल गर्दा निम्नानुसारका समूह बनाएछन्,

   (क) कक्षा 7 का केटीहरूको समूह, A = { सीता, हरिकला, फुलमाया, धनियाँ, रूपा, सरस्वती, कमला, अम्बिका, लक्ष्मी}

   (ख) कक्षा 7 का केटाहरूको समूह, B = { रामविलास, श्री गोविन्द, आइते, कृष्ण, रामकृष्ण, शालिकराम, उमेश}

   (ग) कक्षा 7 का चस्मा लगाउने विद्यार्थीहरूको समूह C = {रामविलास, उमेश, हरिकला}

   अब माथिका तीनओटै समूहहरूका गुण वा विशेषता आउन सक्ने कुनै एउटा निश्चित समूह के होला ?

   S = {कक्षा 7 का विद्यार्थीहरू} मा माथिका तीनओटै समूह पर्दछन् ?

तिमीले पनि आफ्नो कक्षाको S = {कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूको समूह} मा छलफलमा आउन सक्ने कुनै 3 समूहहरू बनाऊ । साथीसँग छलफल पनि गर ।

माथिका सबै समूहहरूका गुण वा विशेषता आउन सक्ने समूह S = {कक्षा 7 का विद्यार्थीहरू} सर्वव्यापक समूह हो ।

2. **सङ्ख्याको ज्ञानबाट बन्न सक्ने विभिन्न समूहहरू बनाउने बारेमा छलफल गर :**

   (क) वर्ग सङ्ख्याहरूको समूह S

   (ख) घन सङ्ख्याहरूको समूह C

   (ग) जोर सङ्ख्याहरूको समूह E

   (घ) बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह O

   (ङ) रूढ सङ्ख्याहरूको समूह P

   (च) संयुक्त सङ्ख्याहरूको समूह A

अब माथिका सबै समूहहरूका गुण वा विशेषता छलफलमा आउन सक्ने कुनै एउटा समूह बनाऊ ।

के N = {प्राकृतिक सङ्ख्याहरू} मा माथिका सबै समूहहरू छलफलमा आउन सक्छन् ?

हो माथिका (क) देखि (च) सम्मका सबै सङ्ख्याहरू N = {प्राकृतिक सङ्ख्याहरू} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...} मा छलफलमा आउन सक्छन् । यसरी माथिका सबै समूहहरूका लागि समूह N सर्वव्यापक समूह हुन सक्छ ।

अब माथिका दुईओटा क्रियाकलापहरू (1 र 2) का आधारमा सर्वव्यापक समूहको अर्थ लेख्न कोसिस गर । आफूले लेखेको अर्थलाई साथीसँग तुलना गरी हेर । के तिमीहरूले निकालेको निष्कर्ष तलको तथ्यहरूसँग मिल्छ ? तुलना गरी हेर ।

सर्वव्यापक समूहका केही महत्वपूर्ण आधारभूत तथ्यहरू

1. कुनै एउटा निश्चित समूहमा छलफलभित्र आउन सक्ने सबै प्रकारका समूहहरू समावेश भएछन् भने त्यो निश्चित समूहलाई सर्वव्यापक समूह (universal set) भनिन्छ ।
2. सर्वव्यापक समूहलाई U ले जनाइन्छ ।

उदाहरण 1

तलका साथीहरूबिचको कुराकानीलाई कक्षामा अभिनय गर :

शिक्षकले कालोपाटीमा कुनै एउटा समूह लेख्नुभएको छ ।

रामविलास : यसमा बिजोर सङ्ख्याहरू {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15} मात्र छन् ।

मैच्याङ : यसमा गन्ती सङ्ख्या 16 त परेन ।

फूलमाया : यसमा जोर सङ्ख्याहरू {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} छन् ?

श्रीकृष्ण : यसमा 0 पनि छ ।

आइते : यसमा रूढ सङ्ख्याहरू पनि छन् त ?

सानुमाया : यसमा उपयुक्त भिन्न परेन त ।

सचित्र : ए ! यसमा त दशमलव सङ्ख्या पनि छैन ।

अब माथिको छलफलका आधारमा शिक्षकले कालोपाटीमा लेखेको सर्वव्यापक समूह पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ 15 सम्मका पूर्ण सङ्ख्याको समूह (W) = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} मा माथिका सबै समूहहरू छलफलमा आउन सक्छन् । त्यसैले यस प्रश्नका लागि समूह W सर्वव्यापक समूह हुन्छ ।

उदाहरण 2

सर्वव्यापक समूह (U) = {50 भन्दा साना पूर्ण सङ्ख्याहरू} हो । अब तलका समस्याहरू समाधान गर ।

(क) 4 का अपवर्त्यहरूको समूह M_4 लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(ख) 6 का अपवर्त्यहरूको समूह M_6 लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(ग) समूह U मा पर्ने थप 2 समूह बनाऊ ।

समाधान

(क) 4 का अपवर्त्यहरूको समूह (M_4) = {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48}

(ख) 6 का अपवर्त्यहरूको समूह (M_6) = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}

(ग) 2 का अपवर्त्यहरूको समूह (M_2) = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...48} र 5 ले निःशेष भाग जाने सङ्ख्याहरूको समूह (A) = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45}

अभ्यास 11.1

1. सर्वव्यापक समूह U = {30 भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याहरू} छ । अब निम्नलिखित समस्याहरू समाधान गर :

(क) रूढ सङ्ख्याहरूको समूह P लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(ख) 6 का अपवर्त्यहरूको समूह M_6 लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(ग) संयुक्त सङ्ख्याहरूको समूह C लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(घ) बिजोर सङ्ख्याहरूको समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(ङ) (क) र (घ) बिचमा के फरक छ ?

(च) समूह (ख) र (ग) बिचको सम्बन्ध देखाऊ ।

2. निम्नानुसारका समूह समावेश भएको समूहको आधारमा सर्वव्यापक समूह (U) पत्ता लगाऊ :

(क) समूह P = {30 भित्रका रूढ सङ्ख्याहरू}

(ख) समूह C = {20 भित्रका संयुक्त सङ्ख्याहरू}

(ग) समूह A = {0, 1, 2, 4, 20}

(घ) समूह N = {20 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरू}

3. एउटा विद्यालयमा कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूबिच भएको तलको कुराकानीका आधारमा सर्वव्यापक समूह पत्ता लगाऊ ।

गोमा : यसमा M_4 विचार गर्दा M_4 = {4, 8, 12} हुन्छ ।

सोनिया : यसमा शून्य छैन त ।

गोपाल : यसमा 13 पनि छैन नि ।

पेम्बा : ए ! यसमा अनुपयुक्त भिन्न पनि आउँदैन ।

छिरिङ : यसमा जोर सङ्ख्याहरू 2, 4, 6, 8, 10 र 12 पर्छन् ।

श्रवण : यसमा दशमलव सङ्ख्या त एउटा पनि छैन ।

4. माथि प्रश्न नं. 1 देखि 3 सम्म दिए जस्तै थप 2/2 ओटा समस्या बनाई समाधान गर । उक्त समस्यालाई साथीबिच साटेर समाधान गर र शिक्षकलाई देखाऊ ।

11.2 उपसमूह (Sub Sets)

1. उपसमूहको परिचय

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

मानौँ कुनै एउटा सर्वव्यापक समूह U = {4 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह} = {1, 2, 3, 4} छ ।

(क) माथिको समूहका सदस्यहरूबाट बन्न सक्ने अन्य समूहहरू बनाऊ ।

समूहहरू शैक्षणिक पाटीमा सङ्कलन गर र तलको तालिकासँग तुलना गरी हेर ।

क्र.सं.	समूह	समूहको नाम/गणनात्मकता
1.	A = {1}, B = {2}, C = {3}, D = {4}	एउटा मात्र सदस्य भएका समूहहरू n(A) = n(B) = n(C) = n(D) = 1
2.	E = {1,2 }, F = {1, 3}, G = {1,4} H = {2, 3}, I = {2, 4 }, J = {3, 4}	दुईओटा सदस्य भएका समूहहरू n(E) = n(F) = n(G) = n(H) = n(I) = n(J) = 2
3.	K = {1,2,3}, L = {1, 2,4,}, M = { 2, 3, 4} N = {1, 3, 4}	तीनओटा सदस्य भएका समूहहरू n(K) = n(L) = n(M) = n(N) = 3
4.	O = {1, 2, 3, 4}	4 सदस्य भएको समूह n(O) = 4
5.	P = { }	खाली समूह n(P) = 0

माथिको तालिकाका आधारमा तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर ।

1. के समूह A का सदस्य समूह U का पनि सदस्य हुन् ?
2. के क्र.स. 1 का सबै समूहका सदस्यहरू समूह U का पनि सदस्य हुन् ?
3. के समूह E का सबै सदस्यहरू समूह U का पनि सदस्यहरू हुन् ?
4. के समूह K का सबै सदस्यहरू समूह U का पनि सदस्यहरू हुन् ?
5. के समूह O का सबै सदस्यहरू समूह U का पनि सदस्यहरू हुन् ?
6. के P = { } = खाली समूहका सबै सदस्य अन्य सबै समूहका सदस्यमा पनि पर्छन् ?

यहाँ, समूह A का सबै सदस्य समूह U का पनि सदस्य हुन् । त्यसैले समूह A लाई समूह U को उपसमूह भनिन्छ । यसलाई गणितीय सङ्केतमा $A \subset U$ वा $U \supset A$ लेखिन्छ । यहाँ समूह B का सबै सदस्य समूह E का पनि सदस्य हुन् । त्यसैले समूह B समूह E को उपसमूह हो । यसलाई $B \subset E$ लेखिन्छ । त्यस्तै $E \subset K$, $E \subset M$ पनि लेख्न सकिन्छ ।

(ख) माथिको छलफलका आधारमा उपसमूहको अर्थ/परिभाषा लेख र साथीसँग छलफल गर ।

यदि एउटा समूह X मा भएका सबै सदस्यहरू अर्को समूह Y का पनि सदस्यहरू हुन् भने X लाई Y को उपसमूह (sub-set) भनिन्छ । सङ्केतमा $X \subset Y$ अथवा $Y \supset X$ ले जनाउन सकिन्छ ।

त्यस्तै Y लाई X को अतिरिक्त समूह (super set) भनिन्छ । यसलाई गणितीय सङ्केतमा लेख्दा $X \subset Y$ वा $Y \supset X$ लेखिन्छ ।

माथिको तालिकाका समूहका आधारमा सम्भाव्य उपसमूहहरू छुट्याऊ । सबैलाई $\subset$ र $\supset$ सङ्केत प्रयोग गरी लेख ।

2. उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूह (Proper and Improper Subsets)

माथि क्रियाकलाप 1 मा दिइएको तालिकाका आधारमा तलका तथ्यहरूमा छलफल गरौँ ।

(क) के उपसमूह O मा सर्वव्यापक समूह U का सबै सदस्यहरू परेका छन् ?

(ख) के O बाहेक अन्य उपसमूहहरू A, E, K, P आदिमा सर्वव्यापक समूह U का सबै सदस्यहरू परेका छन् ? तुलना गरी हेर ।

माथिको छलफलका आधारमा

उपसमूह O मा U का सबै सदस्यहरू परेका छन् ।

त्यसैले उपसमूह O सर्वव्यापक समूह U को अनुपयुक्त उपसमूह (improper subset) हो । अनुपयुक्त उपसमूहलाई $\subseteq$ सङ्केतले जनाइन्छ । सङ्केतमा लेख्दा $O \subseteq U$ हुन्छ ।

O बाहेक अन्य सबै उपसमूहमा सर्वव्यापक समूह U का सबै सदस्यहरू परेका छैनन् । त्यसैले O बाहेक सबै उपसमूहहरू सर्वव्यापक समूह U का उपयुक्त उपसमूहहरू (proper subsets) हुन् । उपयुक्त उपसमूहलाई $\subset$ सङ्केतले जनाइन्छ ।

सङ्केतमा लेख्दा $A \subset U$ हुन्छ ।

(ग) अब U का अन्य उपयुक्त उपसमूहहरू के के हुन सक्छन्, लेख र छलफल गर ।

(घ) के $D \subset G$ लेख्न सकिन्छ ? कसरी ?

(ङ) $\subset$ सङ्केत प्रयोग गरी अन्य 10 ओटा उपयुक्त उपसमूहहरू बनाई सङ्केतमा लेख । साथीको लेखाइसँग आफ्नो लेखाइलाई तुलना गरी हेर ।

(च) माथिको छलफलका आधारमा उपयुक्त र अनुपयुक्त समूहको अर्थ लेख । आफ्नो अर्थलाई साथीहरूसँग छलफल गर ।

(छ) के तिमीहरूको छलफलको निष्कर्ष तलका तथ्यहरूसँग मिल्छ ? तुलना गरी हेर ।

निष्कर्ष

1. यदि कुनै सर्वव्यापक समूह U वा अन्य समूहहरू A, B, C ..... आदिबाट उक्त समूहका सबै सदस्यहरू लिएर उपसमूह बनाइन्छ भने त्यसलाई अनुपयुक्त उपसमूह (improper subset) भनिन्छ । यसलाई $\subseteq$ सङ्केतले जनाइन्छ ।
2. यदि कुनै सर्वव्यापक समूह U वा अन्य समूहहरू A, B, C, ... आदिबाट केही मात्र सदस्यहरू लिएर कुनै उपसमूह बनाइन्छ भने त्यसलाई उपयुक्त उपसमूह (proper subset) भनिन्छ । यसलाई $\subset$ सङ्केतले जनाइन्छ ।
3. खाली समूह अन्य कुनै पनि समूहको उपयुक्त उपसमूह हुन्छ ।
4. बराबर समूहहरू आपसमा अनुपयुक्त उपसमूहहरू हुन्छन् ।

अभ्यास 11.2

1. यदि W = { 5 सम्मका पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह} छ भने,
   (क) समूह W लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।
   (ख) समूह W बाट बन्ने दुईओटा एक सदस्यीय उपसमूहहरू बनाई नामकरण गर ।
   (ग) प्रश्न (क) बाट दुई सदस्यीय थप कतिओटा समूहहरू बन्न सक्लान् ? बनाएर हेर ।
   (घ) समूह W बाट एक एक ओटा, दुई दुईओटा, तीन तीनओटा, चार चारओटा, पाँच पाँचओटा, छ छओटा र सदस्य नभएका उपसमूहहरू निर्माण गरी नामकरण गर ।
   (ङ) प्रश्न नं. (घ) का आधारमा दिइएको समूह W बाट जम्मा कतिओटा उपससमूह बने, लेख ।
2. F = {केरा, स्याउ, अङ्गुर} बाट बन्ने सबै उपसमूहहरू लेख ।
3. समूह Q = {1} बाट बन्न सक्ने सबै उपसमूहहरू लेख ।
4. समूह R = {1, 2} बाट बन्न सक्ने सबै उपसमूहहरू लेख ।
5. समूह S = {1, 2, 3} बाट बन्न सक्ने सबै उपसमूहहरू लेख ।
6. समूह T = {1, 2, 3, 4} बाट बन्न सक्ने सबै उपसमूहहरू लेख ।
7. प्रश्न नं. 3 देखि 6 सम्मका उत्तरका आधारमा तलको तालिका कापीमा बनाइ भर :

क्र.सं	समूह	उपसमूहहरू	सदस्य सङ्ख्या	उपसमूहको सङ्ख्या
1.	{1}	.....	.....	.....
2.	{1, 2}.	.....	.....	.....
3.	{1,2, 3}	.....	.....	.....
4.	{1, 2, 3, 4}	.....	.....	.....

माथिको तालिकाको आधारमा कुनै पनि समूहबाट बन्न सक्ने सम्भाव्य उपसमूहको सङ्ख्या पत्ता लगाउने सूत्र निकाल ।

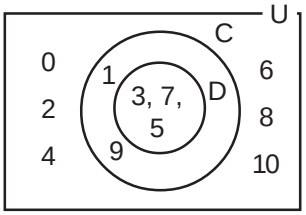
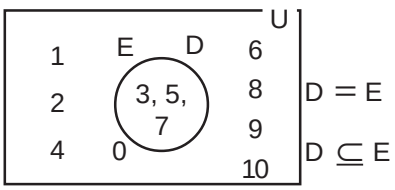
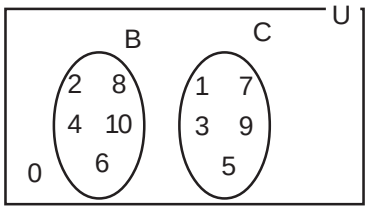
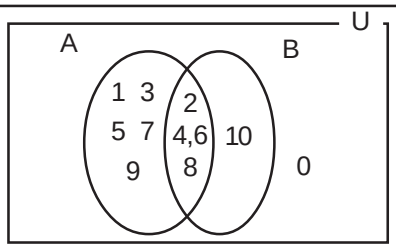
11.3 भेन चित्र (Venn Diagram)

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

मानौँ कुनै सर्वव्यापक समूह U = {10 सम्मका पूर्ण सङ्ख्याहरू} = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} छ । अब यसबाट निम्नानुसारका फरक फरक उपसमूहहरू बनाऔँ ।

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
B = {2, 4, 6, 8, 10}
C = {1, 3, 5, 7, 9}
D = {3, 5, 7}
E = {3, 5, 7}

अब सर्वव्यापक समूह U बाट बनेका समूहहरूलाई यसरी पनि देखाउन सकिन्छ । अध्ययन गरी छलफल गर । तिमीले पनि अभ्यास पुस्तिकामा भेन चित्र बनाउने प्रयास गर ।

(क) समूहहरू C र D लाई तुलना गरी हेरौँ : D का सबै सदस्यहरू समूह C का पनि सदस्यहरू हुन् । त्यसैले समूह D समूह C को उपयुक्त उपसमूह हो । यहाँ D ⊂ C अथवा C ⊃ D हुन्छ ।	
(ख) समूहहरू D र E लाई तुलना गरी हेरौँ : यहाँ समूह D र E का सबै सदस्यहरू एक आपसमा उही र उत्तिकै छन् । त्यसैले समूहहरू D र E बराबर समूहहरू र अनुपयुक्त उपसमूह दुवै हुन्छन् ।	
(ग) समूहहरू B र C लाई आपसमा तुलना गरी हेरौँ : यहाँ, समूह B र C का कुनै पनि सदस्यहरू आपसमा मिल्दा छैनन् । त्यसैले यिनीहरू आपसमा अलग्गिएका छन् । B र C अलग्गिएका समूह (disjoint sets) हुन् ।	
(घ) समूहहरू A र B लाई आपसमा तुलना गरी हेरौँ : यहाँ समूह A र B मा केही सदस्यहरू 2, 4, 6 र 8 साझा वा मिल्दा छन् । त्यसैले यस्ता समूह खप्टिएका समूहहरू (overlapping sets) हुन् ।	

माथिका सबै चित्रहरू भेन चित्र हुन् । समूहका विभिन्न प्रकारअनुसार यिनीहरूका भेन चित्रहरू पनि फरक फरक हुन्छन् ।

माथिका क्रियाकलापहरूका आधारमा तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर :

(क) कुनै पनि भेन चित्रमा के के हुन्छन् ?

(ख) सर्वव्यापक समूहलाई जनाउन कस्तो आकारको क्षेत्र प्रयोग गरिएको छ ?

(ग) सर्वव्यापक समूहबाहेक अन्य समूह जनाउनका लागि कस्तो आकारको क्षेत्र प्रयोग गरिएको छ ?

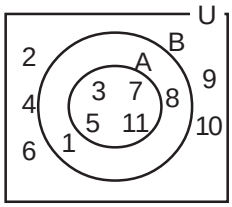
(ङ) माथिको छलफलका आधारमा भेन चित्रसँग सम्बन्धित विभिन्न तथ्यहरू पत्ता लगाऊ । ती तथ्यहरू साथीसँग छलफल गर । निष्कर्षलाई तलका तथ्यहरूसँग तुलना गरी हेर ।

1. भेन चित्रमा सर्वव्यापक समूहका लागि आयतकार क्षेत्रको प्रयोग गरिन्छ ।
2. त्यस्तै अन्य समूहका लागि गोलाकार वा वृत्ताकार क्षेत्रको प्रयोग गरिन्छ ।
3. प्रत्येक समूहमा परेका सदस्यहरूलाई सम्बन्धित क्षेत्रभित्र पर्ने गरी नै राखिएको हुन्छ ।
4. भेन चित्रमा समूहहरूका किसिमअनुसार साझा सदस्यहरूलाई खप्टिएको भागमा राखिएको हुन्छ । त्यस्तै बाँकी सदस्यहरूलाई आआफ्नो समूहमा राखिएको हुन्छ ।
5. यसरी समूह वा समूहका विभिन्न सम्बन्धहरूलाई जनाउने चित्रात्मक प्रस्तुतिलाई भेन चित्र (venn-diagram) भनिन्छ ।

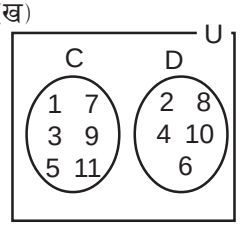
अभ्यास 11.3

1. **तलका भेन चित्रका आधारमा प्रत्येक समूहलाई सूचीकरण र व्याख्या दुवै विधिबाट प्रस्तुत गरी लेख ।**

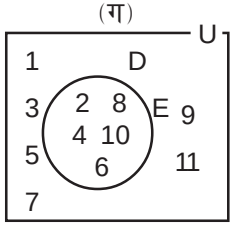
(क)



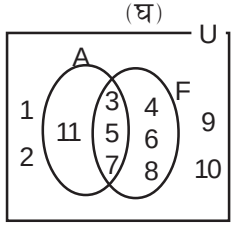
(ख)



(ग)



(घ)



अब सर्वव्यापक समूह U पत्ता लगाऊ ।

2. यदि U = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}, P = {a, b, c, d, e, i}

Q = {a, e, i}, R = {b, c, d, j}, S = {i, e, a} र

T = {a, b, c, f, g} छ भने

तलका समूहहरूलाई छुट्टाछुट्टै भेन चित्रमा प्रस्तुत गरी देखाऊ :

(क) U, P र Q (ख) U, Q र R (ग) U, Q र S (घ) U, R र T

3. माथि प्रश्न नं. 1 र 2 मा दिइए जस्तै प्रश्नहरू आफैं बनाई समाधान गर । साथीसँग मिलेर समाधान गर । आफ्नो र साथीको समाधान तुलना गरेर पनि हेर ।

11.4 अलग्गिएका र खप्टिएका समूहहरू (Disjoint and Overlapping Sets)

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गर र छलफल गर :

(**क**) तल चारओटा समूहहरू दिइएका छन् :

U = {10 सम्मका पूर्ण सङ्ख्याहरू} = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

A = { 6 का गुणनखण्डहरू} = {1, 2, 3, 6}

B = {8 का गुणनखण्डहरू} = {1, 2, 4, 8}

C = {5 को 10 सम्मका अपर्वत्यहरू} = {5,10}

माथिका समूहका आधारमा तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर ।

(क) के समूह A का कुनै सदस्यहरू समूह C मा पर्छन् ?

(ख) के समूहहरू B र C मा साझा सदस्यहरू छन् ?

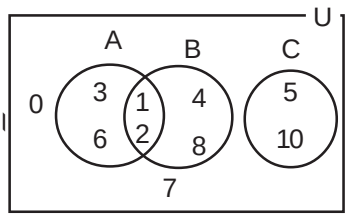
(ग) समूहहरू A र B मा साझा सदस्यहरू के के छन् ?

यहाँ समूह A का कुनै पनि सदस्य समूह C मा परेका छैनन् । त्यसैले समूह A र C अलग्गिएका समूहहरू हुन् । त्यसै गरी समूहहरू A र B का साझा सदस्यहरू 1 र 2 हुन् । त्यसैले समूहहरू A र B आपसमा खप्टिएका समूहहरू हुन् ।

(घ) समूहहरू B र C कस्ता समूहहरू होलान् ? छलफल गर ।

(**ख**) **माथिका समूहहरूलाई भेन चित्रमा देखाउने प्रयास गरौँ :**

- सबभन्दा पहिले सर्वव्यापक समूह U बनाऔँ ।
- A र B का साझा सदस्यहरू 1 र 2 लाई खप्टिएको क्षेत्रमा भरौँ ।
- A का बाँकी सदस्यहरू 3 र 6 लाई A को बाँकी क्षेत्रमा भरौँ ।
- B का बाँकी सदस्यहरूलाई B को बाँकी क्षेत्रमा भरौँ ।
- C का सबै सदस्यहरूलाई C मा भरौँ ।



(**ग**) माथिको भेन चित्रलाई अभ्यास पुस्तिकामा बनाई खप्टिएका समूहहरूको खप्टिएको भागलाई रङ्ग लगाएर देखाऊ ।

(**घ**) माथिका छलफलका आधारमा खप्टिएका समूह र अलग्गिएका समूहहरूको परिभाषा दिने प्रयास गर । आफूले लेखेको परिभाषालाई साथीले लेखेको परिभाषासँग तुलना गरी छलफल गरी हेर । निष्कर्षलाई तलको परिभाषासँग तुलना गरी हेर ।

1. यदि कुनै दुई वा दुईभन्दा बढी समूहहरूमा साझा सदस्यहरू छन् भने त्यस्ता समूहहरूलाई खप्टिएका समूह (overlapping sets) भनिन्छ ।
2. यदि कुनै दुई वा दुईभन्दा बढी समूहहरूमा साझा सदस्यहरू छैनन् भने त्यस्ता समूहहरूलाई अलग्गिएका समूह (disjoint sets) भनिन्छ ।

अभ्यास 11.4

1. **तल दिइएका समूहका आधारमा खप्टिएका र अलग्गिएका समूहहरू छुट्याऊ :**

   A = {2, 4, 6, 8, 10, 12} B = {1, 3, 5, 7, 9, 11}

   C = {0, 1, 3, 5, 7, 11} D = {5, 6, 7, 8, 10}

   E = {0, 2, 9, 12}

   (क) A र B (ख) A र C (ग) B र C (घ) A र D

   (ङ) A र E (च) B र D (छ) B र E (ज) C र D (झ) C र E

2. A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} भए तलका समूहहरूलाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

   (क) A का प्रत्येक सदस्यहरूमा 1 जोड्दा बन्ने समूह B

   (ख) A का प्रत्येक सदस्यहरूलाई 2 ले गुणन गर्दा बन्ने सदस्य समूह C

   (ग) A मा भएका बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह D

   (घ) A मा भएका 10 का गुणन खण्डहरूको समूह E

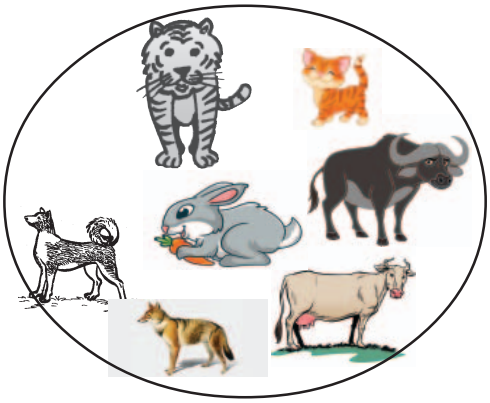
   (ङ) माथिका समूहहरू A, B, C, D र E मा खप्टिएका र अलग्गिएका समूहहरू छुट्याऊ ।

3. कुनै पाँच पाँच ओटा खप्टिएका र अलग्गिएका समूह खोज/बनाऊ । साथीसँग एकअर्काका समूहहरू छुट्याउन अभ्यास गर ।

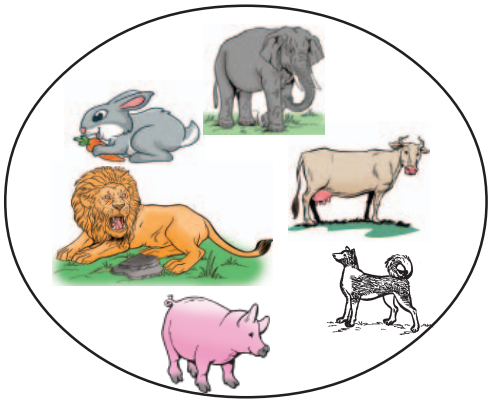
11.5 समूहको संयोजन (Union of Sets)

तलका क्रियाकलाप र चित्रहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

X

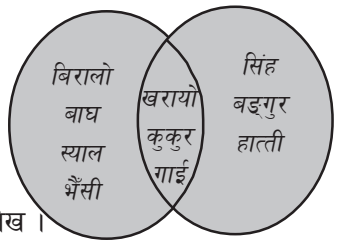


Y



माथिका समूहहरू X र Y का सदस्यहरूलाई चिनाउने नाम दिएर मिलाएर राखौँ र छाया पारी देखाऔँ ।

अब तल दिइएका प्रश्नहरूमा छलफल गरौँ ।



1. समूहहरू X र Y का साझा सदस्यहरू के के हुन् ?
2. के समूह X मा समूह Y का सबै सदस्यहरू पर्छन् ?
3. समूहहरू X र Y का सदस्यहरूलाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।
4. समूहहरू X र Y का साझा सदस्यहरूलाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।
5. समूहहरू X र Y का सबै सदस्यहरूलाई नदोहोऱ्याइकन सूचीकरण विधिबाट लेख ।

माथि छाया परेको भागलाई समूहहरू X र Y को संयोजन (union of sets) भनिन्छ । यसलाई संयोजन चिह्न ∪ ले जनाइन्छ ।

त्यसैले X ∪ Y = X संयोजन Y = {बिरालो, बाघ, स्याल, भैँसी, खरायो, कुकुर, गाई, सिँह, बङ्गुर, हात्ती} हुन्छ ।

माथिको छलफलका आधारमा समूहको संयोजनको परिभाषा र तथ्यहरू लेख्ने प्रयास गर । आफ्नो लेखाइलाई साथीसँग छलफल गर । अन्तिम निष्कर्षलाई तलको परिभाषा र तथ्यहरूसँग तुलना गरी हेर ।

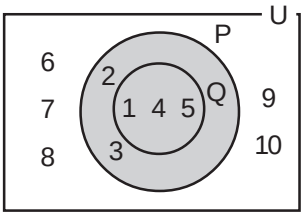
1. कुनै दुई समूहहरू X वा Y वा दुवै समूहका सदस्यहरू X र Y का सम्पूर्ण सदस्यहरू परेको समूहहरूको अवस्थालाई समूहहरू X र Y को संयोजन भनिन्छ ।
2. यसलाई X∪Y ले जनाइन्छ ।
3. यसलाई X संयोजन Y(X union Y) भनेर पढिन्छ ।

उदाहरण 1

समस्या : यदि U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, P = {1, 2, 3, 4, 5}, Q = {1, 4, 5},

R = {3, 4, 5, 6, 7, 8} र S = {2, 3, 6, 7, 10} भए तलका प्रत्येक समूहहरूको संयोजन निर्माण गर र भेन चित्रमा पनि देखाऊ :

(क) $P \cup Q$ (ख) $Q \cup R$ (ग) $Q \cup S$

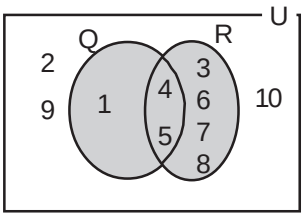


समाधान

(क) यहाँ $P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 4, 5\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

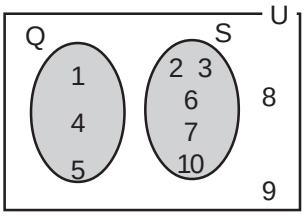
चित्रमा $P \cup Q$ जनाउने समूहलाई छाया पारी देखाइएको छ ।



(ख) $Q \cup R = \{1, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

चित्रमा $Q \cup R$ लाई छाया पारी देखाइएको छ ।



(ग) $Q \cup S = \{1, 4, 5\} \cup \{2, 3, 6, 7, 10\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$

चित्रमा $Q \cup S$ लाई छाया पारेर देखाइएको छ ।

उदाहरण 2

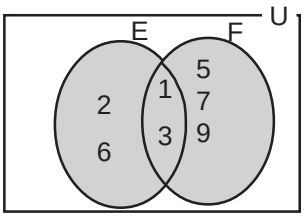
यदि E = {6 का गुणनखण्डहरू} र F = {10 सम्मका बिजोर सङ्ख्याहरू } भए

(क) समूहहरू E र F लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(ख) $E \cup F$ र $F \cup E$ लाई भेन चित्रमा देखाऊ ।

(ग) $E \cup F = F \cup E$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर ।

(घ) $F \cup F = F$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर ।



समाधान

(क) E = {1, 2 ,3, 6}

F = { 1, 3, 5, 7, 9}

(ख) $E \cup F$ र $F \cup E$ लाई भेन चित्रमा देखाउँदा,

(ग) $E \cup F = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$= \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

$F \cup E = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 2, 3, 6\}$

$= \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

त्यसैले $E \cup F = F \cup E$ हुन्छ । प्रमाणित भयो ।

$F \cup F = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 3, 5, 7, 9\} = F$

$\therefore$ $F \cup F$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 3

तलका समूहका आधारमा सोधिएका प्रश्नहरूको समाधान गर :

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $J = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $K = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ र $L = \{0, 1, 3, 6, 11\}$ छ ।

(क) $(J \cup K) \cup L = J \cup (K \cup L)$, प्रमाणित गर ।

(ख) $(J \cup K) \cup L$ लाई भेन चित्रमा देखाऊ ।

(ग) के $(J \cup K) \cup L = J \cup (K \cup L) = U$ लेख्न सकिन्छ ?

समाधान

(क) यहाँ $(J \cup K) \cup L$

$= [\{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\}] \cup \{0, 1, 3, 6, 11\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \cup \{0, 1, 3, 6, 11\}$

$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

त्यसैले, $J \cup (K \cup L)$

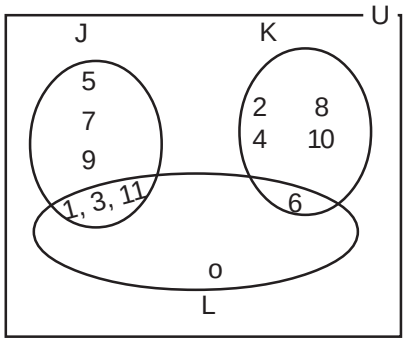
$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \cup [\{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{0, 1, 3, 6, 11\}]$

$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11\}$

$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

त्यसैले $(J \cup K) \cup L = J \cup (K \cup L)$ प्रमाणित भयो ।

(ख) यहाँ $(J \cup K) \cup L$ लाई भेन चित्रमा देखाउँदा



(ग) यहाँ $(J \cup K) \cup L = \{0,1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ छ ।

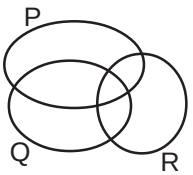
त्यस्तै, $J \cup (K \cup L) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ छ ।

र $U = \{0, 1, 2, 3, 4\ 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ छ ।

त्यसैले $(J \cup K) \cup L = J \cup (K \cup L) = U$ लेख्न सकिन्छ ।

अभ्यास 11.5

1. दायाँको जस्तो छुट्टाछुट्टै भेन चित्र खिच । तल दिएका समूहको संयोजन जनाउने भाग पत्ता लगाई छाया पारेर देखाऊ :



(क) $P \cup Q$ (ख) $R \cup Q$ (ग) $Q \cup R$ (घ) $P \cup R$

(ङ) $R \cup P$ (छ) $(P \cup Q) \cup R$ (ज) $P \cup (Q \cup R)$

2. यदि $U = \{12$ सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरू$\}$, $A = \{$जोर सङ्ख्याहरू$\}$ र $B = \{$बिजोर सङ्ख्याहरू$\}$ भए

(क) समूहहरू U, A र B लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(ख) भेन चित्र बनाई निम्नानुसारका समूह पत्ता लगाऊ ।

(अ) $A \cup B$ (आ) $B \cup A$ (इ) $B \cup B$ (ई) $A \cup A$

(ग) प्रमाणित गर :

(अ) $A \cup B = B \cup A$ (आ) $B \cup B = B$ (इ) $A \cup A = A$ (ई) $A \cup B = B \cup A = U$

3. यदि $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ र $A = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ भए

(क) $U \cup A$ लाई भेन चित्रमा देखाऊ । (ख) $A \cup U = U \cup A = U$ प्रमाणित गरी देखाऊ ।

4. यदि $M = \{8$ का गुणनखण्डहरू$\}$ र $N = \{\ \} = \emptyset$ भए,

(क) M लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(ख) $M \cup N$ लाई भेन चित्रमा देखाऊ ।

(ग) $N \cup M$ लाई सूचीकरण विधिबाट देखाऊ ।

(घ) के $M \cup N = N \cup M$ लेख्न सकिन्छ ? प्रमाणित गरी देखाऊ ।

5. यदि $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$, $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{e, f, g, h\}$ र $G = \{a, b, c, e, f, g, i, j\}$ भए,

(क) निम्नानुसारका समूहहरूलाई भेन चित्रमा देखाऊ :

(अ) $(E \cup F) \cup G$ (आ) $E \cup (F \cup G)$

(ख) के $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ लेख्न सकिन्छ ? प्रमाणित गरी देखाऊ ।

11.6 समूहहरूको प्रतिच्छेदन (Intersection of Sets)

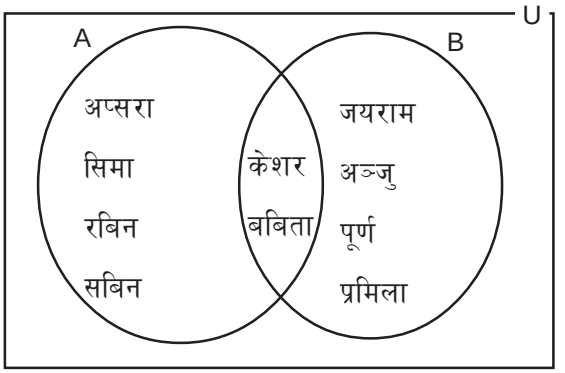
कक्षा 7 मा पढ्ने 10 जना विद्यार्थीले गीत गाउने र नाच्ने प्रतियोगितामा भाग लिएका छन् ।

गीत गाउनेको विद्यार्थीहरूको समूहलाई A र नाच्ने विद्यार्थीको समूहलाई B मानिएको छ ।

गीत गाउने (A) = {अप्सरा, बबिता, सिमा, केशर, रबिन, सबिन}

नाच्ने (B) = {केशर, जयराम, बबिता, अञ्जु, पूर्ण, प्रमिला}

अब, गीत गाउने विद्यार्थीको समूह र नाच्ने विद्यार्थीको समूहलाई भेन चित्रमा देखाउँदा,



(क) दुवै क्रियाकलाप मन पराउने विद्यार्थी कुन कुन रहेछन् ? भन्न सक्छौ ?

(ख) दुवै क्रियाकलाप मन पराउने विद्यार्थी पर्ने क्षेत्रलाई छाया पारेर देखाऊ ।

(ग) के गीत गाउने मात्र विद्यार्थीको समूह बनाउन सक्छौ ?

(घ) के नाच्न जान्ने विद्यार्थी मात्रको समूह बनाउन सक्छौ ?

A र B दुई ओटा समूहहरू छन् । समूहहरू A र B का साझा सदस्यहरूका समूहलाई समूहको प्रतिच्छेदन (Intersection of sets) भनिन्छ । यसलाई $\cap$ ले जनाइन्छ । अर्थात्, $A \cap B$ लाई A प्रतिच्छेदन B (A intersection B) भनि पढ्नुपर्छ ।

उदाहरण 1

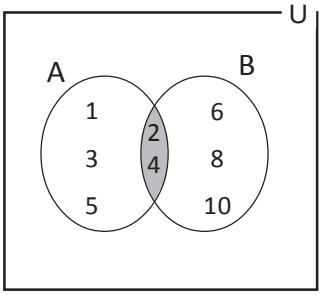
यदि A = {1,2,3,4,5} र B = {2,4,6,8,10} भए $A \cap B$ समूह निर्माण गरी भेन चित्रमा छाया पारी देखाऊ ।

समाधान

यहाँ, A = {1, 2, 3, 4, 5} र B = {2, 4, 6, 8,10} छन् ।

अब, $A \cap B$ भनेको दुवै समूहमा पर्ने साझा सदस्यहरू हुन् ।

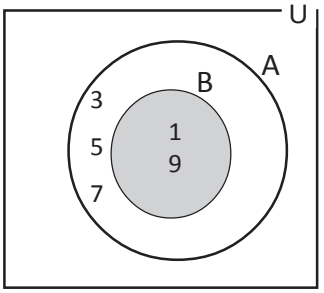
अत: $A \cap B$ = {1, 2, 3, 4, 5} $\cap$ {2, 4, 6, 8, 10} = {2, 4}



उदाहारण 2

यदि A = {1,3,5,7,9} र B = {1, 9} भए A ∩ B लाई भेन चित्रमा छाया पारी देखाऊ ।

भेन चित्रमा देखाउँदा



समाधान : यहाँ,

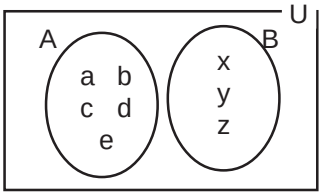
A = {1, 3, 5, 7, 9} र B = {1, 9} छन् ।

A ∩ B = {1, 3, 5, 7, 9} ∩ {1.9} = {1, 9}

उदाहरण 3

यदि A = {a, b, c d, e} र B = {x, y, z} भए A∩B लाई भेन चित्रमा छाया पारी देखाऊ ।

भेन चित्रमा देखाउँदा



समाधान

यहाँ, A = {a, b, c, d, e} र B = {x, y, z}

अब, A र B मा कुनै पनि सदस्य साझा नभएकाले A∩B खाली समूह हो ।

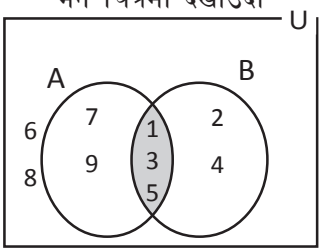
त्यसैले छाया पारी देखाउन सकिएन । त्यसैले A∩B = { } वा ϕ हुन्छ ।

उदाहरण 4

यदि सर्वव्यापक समूह U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 , 8, 9},

A = {1, 3, 5, 7, 9} र B = {1, 2, 3, 4, 5} भए A ∩ B पत्ता लगाई भेन चित्रमा देखाऊ ।

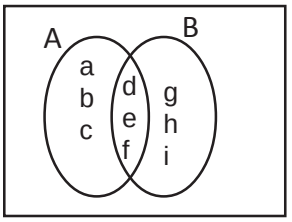
भेन चित्रमा देखाउँदा



समाधान

A ∩ B = {1, 3, 5, 7, 9} ∩ {1, 2, 3, 4, 5} = {1, 3, 5}

अभ्यास 11.6



1. **दिइएको भेन चित्रबाट तल दिइएका समूहहरू पत्ता लगाऊ :**

   (क) A ∩ B (ख) B ∩ A (ग) A ∩ A

   (घ) U ∩ A (ङ) U ∩ B

2. यदि U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {1, 2, 3, 6} र B = {1, 2, 3, 4, 5} भए A∩B पत्ता लगाऊ र भेन चित्रमा पनि प्रस्तुत गर ।

3. यदि U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = {1, 3, 5, 7, 9}, B = {3, 6, 9} र C = {2, 4, 6, 10} भए

   (क) A∩B (ख) B∩C (ग) A∩C पत्ता लगाई प्रत्येकलाई भेन चित्रमा पनि देखाऊ ।

4. यदि P = {a, b, c, d, e} र Q = {a, b, c} भए P∩Q पत्ता लगाई भेन चित्र पनि बनाऊ ।

5. यदि U = {10 भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याहरू}, M = {2 का अपवर्त्यहरू}, N = {8 का गुणन खण्डहरू} र O = {जोर सङख्या} भए,

   (क) माथिका समूहहरूलाई भेन चित्रमा देखाऊ । (ख) M∩N पत्ता लगाऊ ।

   (ग) के M∩(N∩O) = (M∩N)∩O लेख्न सकिन्छ ? प्रमाणित गरी देखाऊ ।

एकाइ 12 पूर्ण सङ्ख्या (Whole Number)

12.1 सङ्ख्याको वर्ग र वर्गमूल (Square and Square Root of the number)

1. सङ्ख्याको वर्ग

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

लहरमा 4 ओटा र पङ्क्तिमा 4 ओटा गुच्चाहरू राखौँ । जम्मा गुच्चाहरू कति भए ?

यहाँ, दुवै लहर र पङ्क्तिमा चार चार ओटा गुच्चाहरू छन् । त्यसैले 4 x 4 = 16 हुन्छ । त्यसैले 4 को वर्ग सङ्ख्या 16 हुन्छ । माथिको क्रियाकलापबाट वर्गको परिभाषा लेख ।

> कुनै पूर्ण सङ्ख्यालाई आफैँसँग गुणन गर्दा आउने गुणनफललाई नै वर्ग सङ्ख्या भनिन्छ । वर्ग सङ्ख्या निकाल्दा दिएको सङ्ख्यालाई त्यही सङ्ख्याले गुणन गर्नुपर्छ । जस्तै : 4 को वर्ग सङ्ख्या 4 x 4 = 16 हुन्छ । 4 को वर्गलाई $4^2 = 4 \times 4 = 16$ लेख्न सकिन्छ ।

नोट : कुनै सङ्ख्या मानौँ 5 को वर्ग भन्नाले 5 एकाइ लम्बाइ भएको एउटा वर्गको क्षेत्रफल भन्ने बुझ्नुपर्छ । अत: $5^2 = 5 \times 5 = 25$ भएको हो ।

उदाहरण 1

तल दिइएका सङ्ख्याको वर्ग सङ्ख्या निकाल :

(क) 5 (ख) 12 (ग) $\frac{1}{2}$ (घ) 0.04

समाधान

(क) 5 को वर्ग सङ्ख्या = $5^2 = 5 \times 5 = 25$ (ख) 12 को वर्ग सङ्ख्या = $12^2 = 12 \times 12 = 144$

(ग) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ को वर्ग सङ्ख्या = $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (घ) $(0.04)^2$ को वर्ग सङ्ख्या = $(0.04)^2 = 0.04 \times 0.04 = 0.0016$

2. सङ्ख्याको वर्गमूल

(क) वर्गमूलको परिचय

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(अ) एउटा विद्यालयको कक्षा 7 मा जम्मा 36 जना विद्यार्थीहरू छन् । तिनीहरूलाई वर्गाकार रूपमा मिलाएर राखौँ । प्रत्येक किनारामा कति कति विद्यार्थी पर्छन् ?

यहाँ, एउटा किनारामा 6 जना विद्यार्थीहरू परेका छन् । 36 = 6 x 6 हुन्छ । त्यसैले हरेक किनारामा 6/6 जना पर्ने गरी मिलाइएको रहेछ । अब, 36 को वर्गमूल 6 हुन्छ । वर्गमूललाई हामी (√) चिह्नले जनाउँछौँ ।

(आ) माथिको क्रियाकलापका आधारमा वर्गमूलको परिभाषा लेख्न सक्छौँ ? साथीसँग छलफल गरी लेखेको परिभाषालाई तलको परिभाषासँग तुलना गरेर हेर ।

> कुनै पनि वर्ग सङ्ख्याका दुईओटा उस्ताउस्तै गुणनखण्डहरू हुन्छन् भने ती गुणनखण्डहरूमध्ये एउटालाई त्यस सङ्ख्याको वर्गमूल भनिन्छ । वर्गमूललाई ($\sqrt{\ }$) चिह्नमा पनि लेखिन्छ । जस्तै : $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$ हुन्छ ।

(ख) गुणनखण्ड विधिबाट वर्गमूल निकाल्ने तरिका

गुणनखण्ड विधिबाट वर्गमूल निकाल्दा निम्नानुसारको प्रक्रिया अपनाउनुपर्छ :

1. दिइएको सङ्ख्याको रूढ गुणनखण्ड निकाल्ने
2. रूढ गुणनखण्डलाई $\sqrt{\ }$ चिह्नभित्र राख्ने
3. जोडा जोडा सङ्ख्यालाई घाताङ्कको रूपमा लेख्ने
4. प्रत्येक जोडाको एउटा एउटा सङ्ख्या लेख्ने र गुणन गर्ने
5. प्राप्त गुणनफल नै सो सङ्ख्याको वर्गमूल हुन्छ

उदाहरण 2

81 को वर्गमूल निकाल :

समाधान : यहाँ 81 का रूढ गुणनखण्डहरू निकाल्दा,

3	81
3	27
3	9
	3

तसर्थ 81 = 3 x 3 x 3 x 3

अब, 81 को वर्गमूल निकाल्दा,

81 को वर्गमूल

$= \sqrt{81}$

$= \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 3}$

$= \sqrt{3^2 \times 3^2}$

$= 3 \times 3$

$= 9$

उदाहरण 3

कुनै एउटा विद्यालयका कक्षा 7 मा पढ्ने विद्यार्थीहरूले लुम्बिनी भ्रमणका लागि विद्यार्थी सङ्ख्या जति छ त्यति नै रुपियाँ जम्मा गर्दा रु. 15,625 जम्मा भएछ भने सो कक्षाको विद्यार्थी सङ्ख्या निकाल ।

समाधान : यहाँ आवश्यक विद्यार्थी सङ्ख्या = 15,625 को वर्गमूल हुन्छ । त्यसैले सर्वप्रथम 15,625 को रूढ गुणनखण्डहरू निकालौँ ।

15625 को रूढ गुणनखण्ड निकाल्दा,

5	15625
5	3125
5	625
5	125
5	25
	5

$\therefore$ 15625 = 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5

अब, 15,625 को वर्गमूल निकाल्दा

$\sqrt{15625} = \sqrt{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}$

$= \sqrt{5^2 \times 5^2 \times 5^2}$

$= 5 \times 5 \times 5$

$= 125$

अत: उक्त विद्यालयमा कक्षा 7 मा पढ्ने विद्यार्थी 125 जना रहेछन् ।

(ग) भाग विधिद्वारा वर्गमूल निकाल्ने तरिका

तल भाग विधिबाट वर्गमूल निकाल्ने तरिका र उदाहरण अध्ययन गरी छलफल गर :

उदाहरण 4

1764 को भाग विधिद्वारा वर्गमूल निकाल्ने प्रयास गरौँ :

	42
4	1764
+4	-16
82	0164
+2	- 164
84	000

तरिका

1. सङ्ख्याको एक स्थानबाट जोडा जोडा मिलाउँदै जानुपर्छ । जस्तै : $\overline{17}\,\overline{64}$
2. पहिलो जोडा 17 लाई वर्ग सङ्ख्यामा विचार गर्दा 17 भन्दा सानो तर सबैभन्दा ठुलो वर्ग सङ्ख्या 16 हुन्छ । यसको वर्गमूल 4 आउने गरी हिसाब गरिन्छ ।
3. 4 लाई तलमाथि राखेर गुणनफल 17 को तलपट्टि राखी घटाउनुपर्छ । अनि अगाडिको 4 र 4 लाई जोड चिह्न राखी जोड्नुपर्छ ।
4. शेष आएको 1 सँग अर्को जोडा सङ्ख्याहरू 64 लाई तल झार्नुपर्छ । अब भाज्य 164 हुन्छ ।
5. अब, 82 को दसको स्थानको सङ्ख्याले भाज्य 164 को दसको स्थान र सय स्थानको सङ्ख्या 16 लाई भाग जाने भागफल अनुमान गर्नुपर्छ र नजिकको सङ्ख्याले गुणन गर्नुपर्छ । यहाँ 16 लाई 8 ले 2 पटक भाग जान्छ ।
6. अब, शेष 0 आएकाले 1764 को वर्गमूल 42 हुन्छ ।

उदाहरण 5

11025 को भाग विधिबाट वर्गमूल निकाल :

समाधान : 11025 को भाग विधिबाट वर्गमूल निकाल्दा,

	105
1	11025
+1	- 1
205	01025
+ 5	-1025
210	0000

∴ 11025 को वर्गमूल 105 हुन्छ ।

> नोट :
> 1. यहाँ 11025 लाई एकको स्थानबाट जोडी मिलाउँदा $\overline{1}\,\overline{10}\,\overline{25}$ हुन्छ ।
> 2. पहिलो पटक 10 झार्नुपर्छ । तर 2 पछि कुनै अङ्क राख्दा 10 लाई भाग गर्न मिल्दैन । त्यसैले एउटा भागनास्ती शून्य (0) थपी 25 पछि झारेर 1025 बनाइएको छ ।
> 3. भागफलमा शून्य थपेपछि भाजकमा पनि शून्य थप्नुपर्छ ।

(घ) भिन्न भएका सङ्ख्याको वर्गमूल निकाल्ने तरिका

तल दिइएको भिन्नको वर्गमूल निकाल्ने तरिका र उदाहरण अध्ययन गरी छलफल गर :

उदाहरण 6

$\frac{49}{81}$ को वर्गमूल निकाल :

> भिन्नको वर्गमूल निकाल्ने तरिका
> 1. सर्वप्रथम हर र अंशको छुट्टाछुट्टै वर्गमूल निकाल्नुपर्छ ।
> 2. भिन्नको सरल गरी उत्तर निकाल्नु पर्छ ।

यहाँ, $\frac{49}{81}$ को वर्गमूल = $\sqrt{\frac{49}{81}} = \sqrt{\frac{7\times7}{3\times3\times3\times3}} = \sqrt{\frac{7^2}{3^2\times3^2}} = \frac{7}{3\times3} = \frac{7}{9}$

त्यसैले, $\frac{49}{81}$ को वर्गमूल $\frac{7}{9}$ हुन्छ ।

उदाहरण 6

$1\frac{399}{625}$ को वर्गमूल निकाल :

समाधान

$1\frac{399}{625} = \frac{1\times625+399}{625} = \frac{1024}{625}$ को वर्गमूल $= \sqrt{\frac{1024}{625}} == \sqrt{\frac{32\times32}{25\times25}} = \frac{32}{25} = 1\frac{7}{25}$

त्यसैले, $1\frac{399}{625}$ को वर्गमूल $= 1\frac{7}{25}$ हुन्छ ।

अभ्यास 12.1

(क) तल दिइएका सङ्ख्याको रूढ गुणनखण्ड विधिद्वारा वर्गमूल निकाल :

1. 64 2. 196 3. 324 4. 400 5. 1225
6. 2916 7. 5625 8. 11664 9. 121 x 169
10. 343 x 112 11. $\sqrt{144}\times\sqrt{196}$ 12. $\sqrt{25}\times\sqrt{625}$

(ख) तल दिइएका सङ्ख्याहरूको वर्ग सङ्ख्या निकाल :

1. 8 2. 12 3. 15 4. 19 5. 25 6. 77
7. 95 8. 100 9. 205 10. 500

(ग) तल दिइएका सङ्ख्याहरूको भाग विधिद्वारा वर्गमूल निकाल :

1. 169 2. 625 3. 2304 4. 8836 5. 9801
6. 11025 7. 95481 8. 166464 9. 646416 10. 1024144

(घ) तल दिइएका भिन्नको वर्गमूल निकाल :

1. $\frac{144}{169}$ 2. $\frac{625}{1024}$ 3. $\frac{1225}{2916}$ 4. $1\frac{91}{2025}$ 5. $8\frac{568}{729}$

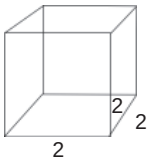
(ङ) तलका प्रश्नहरू समाधान गर :

1. एउटा वर्गाकार जग्गाको लम्बाइ 20m भए त्यसको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।
2. एउटा वर्गाकार सेमिनार हलको क्षेत्रफल $625m^2$ भए त्यसको लम्बाइ पत्ता लगाऊ ।

12.2 सङ्ख्याको घन र घनमूल (Cube and Cube Roots)

1. सङ्ख्याको घन

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :



(क) 2 लाई तीन पटक गुणन गरेर हेरौँ ।

$2 \times 2 \times 2 = 8$

(ख) त्यस्तै 3 र 4 लाई पनि तीन तीन पटक गुणन गरेर हेरौँ ।

$3 \times 3 \times 3 = 27$ र $4 \times 4 \times 4 = 64$ हुन्छ ।

यहाँ, 2 को घन सङ्ख्या 8 हो । त्यस्तै 3 र 4 का घन सङ्ख्याहरू क्रमश: 27 र 64 हुन् ।

(ग) चित्रमा प्रत्येक भुजा 2 एकाइ भएको घनाकार वस्तु देखाइएको छ । यस घनाकार वस्तुको आयतन (V) = $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ घन एकाइ हुन्छ ।

माथिको क्रियाकलापका आधारमा घन सङ्ख्याको परिभाषा लेख । साथीसँग छलफल गरी तिमीले लेखेको परिभाषा तलको परिभाषासँग दाँजेर हेर ।

> तीनओटा उही सङ्ख्याको गुणनफललाई घन सङ्ख्या भनिन्छ । जस्तै : कुनै सङ्ख्या 2 भए 2 को घन सङ्ख्या 2^3 हुन्छ । त्यस्तै कुनै सङ्ख्या a भए a को घन सङ्ख्या a^3 हुन्छ ।

उदाहरण 1

1, 7 र 10 को घन सङ्ख्या निकाल :

समाधान

1 को घन सङ्ख्या = $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

7 को घन सङ्ख्या = $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$

10 को घन सङ्ख्या = $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

उदाहरण 2

तिम्रो विद्यालयमा खानेपानीका लागि एउटा 5 एकाइ लामो, 5 एकाइ चौडा र 5 एकाइ अग्लो ट्याङ्की जमिनमुनि निर्माण गर्न कति घन एकाइको खाल्डो आवश्यकता पर्ला ?

समाधान

यहाँ, 5 को घन सङ्ख्या नै आवश्यक समाधान हो, किन ?

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ घन एकाइ हुन्छ ।

तसर्थ, आवश्यक खाल्डो बराबर 125 घन एकाइ ।

2. सङ्ख्याको घनमूल

क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

घन सङ्ख्याको जानकारी लिइसकेपछि अब हामी ती घन सङ्ख्याको रूढ गुणनखण्ड निकाली हेरौँ ।

1= 1 x 1 x 1

8 = 2 x 2 x 2

27 = 3 x 3 x 3

64 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 4 x 4 x4

यहाँ, हामी के भन्न सक्छौँ भने,

1 को घनमूल 1 हुन्छ ।

8 को घनमूल 2 हुन्छ ।

त्यस्तै, 27 र 64 को घनमूल क्रमश: 3 र 4 हुन्छन् ।

अब, के तिमीहरूले घनमूलको परिभाषा लेख्न वा भन्न सक्छौ ? लेख र साथीसँग छलफल गर ।

कुनै घन सङ्ख्याका तीनओटा उस्तै गुणनखण्डहरूमध्ये एउटालाई उक्त घन सङ्ख्याको घनमूल भनिन्छ । घनमूललाई $\sqrt[3]{\ }$ ले जनाइन्छ । जस्तै a^3 घन सङ्ख्या हो भने a^3 को घनमूल $\sqrt[3]{a^3} = a$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

तलका घन सङ्ख्याको घनमूल निकाल :

(क) 216 (ख) 512 (ग) 1728

समाधान

(क) 216 को घन सङ्ख्या = $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2\times2\times2\times3\times3\times3} = \sqrt[3]{2^3\times3^3} = 2\times3 = 6$

(ख) 512 को घन सङ्ख्या = $\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2} = \sqrt[3]{2^3\times2^3\times2^3} = 2\times2\times2 = 8$

(ग) 1728 को घन सङ्ख्या = $\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3} = \sqrt[3]{2^3\times2^3\times3^3} = 2\times2\times3 = 12$

अभ्यास 12.2

1. **तल दिइएका सङ्ख्याहरूको घन सङ्ख्या निकाल :**

   (क) 6 (ख) 11 (ग) 13 (घ) 15 (ङ) 18 (च) 24

   (छ) 30 (ज) 45 (झ) 80 (ञ) 100

2. **तल दिइएका सङ्ख्याको घनमूल निकाल :**

   (क) 8 (ख) 125 (ग) 343 (घ) 1000 (ङ) 3375

3. एउटा घनाकार बाकसको लम्बाइ 12 मिटर छ भने सो बाकसको आयतन निकाल ।

4. 45m लम्बाइ भएको एउटा घनाकार घरको आयतन कति हुन्छ होला ?

5. खानेपानी आयोजनाले 25m लम्बाइ भएको घनाकार ट्याङ्की निर्माण गरेछ भने त्यो ट्याङ्कीको क्षमता कति होला ? [यदि $1m^3 = 1000\ell$]

6. एउटा घनाकार कोठामा $4096m^3$ हावा अटाउँछ भने सो कोठाको उचाइ निकाल ।

7. एउटा घनाकार खानेपानी ट्याङ्कीको जम्मा क्षमता $64,000\ell$ छ भने सो ट्याङ्कीको लम्बाइ निकाल ।

12.3 महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor - HCF)

1. महत्तम समापवर्तकको परिचय

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

मानौँ, दुई ओटा सङ्ख्या 24 र 36 छन् ।

यहाँ, सङ्ख्या 24 का गुणनखण्डको समूह बनाऔँ ।

$F_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

त्यस्तै सङ्ख्या 36 का गुणनखण्डको समूह बनाऔँ ।

$F_{36} = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

अब, 24 र 36 का साझा गुणनखण्डको समूह बनाऔँ ।

साझा गुणनखण्डको समूह {1, 2, 3, 4, 6, 12} छ । यसमा सबैभन्दा ठुलो साझा गुणनखण्ड = 12 छ ।

त्यसैले, महत्तम समापवर्तक (म.स.) = 12 हुन्छ ।

माथिको क्रियाकलापका आधारमा म.स. को परिभाषा लेख र तल दिइएको म.स. को परिभाषासँग तुलना गरी हेर ।

> दिइएका प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको साझा गुणनखण्डहरूमध्ये सबैभन्दा ठुलो गुणनखण्डलाई महत्तम समापवर्तक (highest common factor) भनिन्छ । यसलाई छोटकरीमा म.स. (H.C.F.) लेखिन्छ ।

2. भाग विधिबाट म.स. निकाल्ने तरिका

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

माथि दिइएकै सङ्ख्याहरू 24 र 36 को भाग विधिबाट म.स. निकाल्ने प्रयास गरौँ :

1. सर्वप्रथम सबैभन्दा सानो सङ्ख्या र सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुपर्छ । यहाँ सबभन्दा सानो सङ्ख्या 2 र सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या 36 छ ।
2. सानो सङ्ख्याले ठुलो सङ्ख्यालाई भाग गर्दै जानुपर्छ । (भाजकभन्दा सानो शेष नआएसम्म)
3. शेषले भाज्यलाई भाजक मानी भाग गर्दै जानुपर्छ ।

सानो सङ्ख्या 24 ले 36 लाई भाग गर्दा,

```
24) 36 (1
   - 24
   ----
     12
```

शेष 12 ले भाज्य 24 लाई भाग गर्दा,

```
12) 24 (2
   x 24
   ----
      0
```

यहाँ, नि:शेष भाग लगाउने भाजक 12 नै सङ्ख्या 24 र 36 को सबैभन्दा ठुलो साझा गुणन खण्ड हो ।

त्यसैले, 24 र 36 को म.स. = 12 हुन्छ ।

माथिको प्रक्रियालाई एकै ठाउँमा राखी निम्नानुसार म.स. निकाल्न सकिन्छ ।

24 र 36 को म.स. निकाल्दा,

```
24) 36 ( 1
   -24
    12) 24 (2
      - 24
        0
```

त्यसैले, म.स. = 12 हुन्छ ।

उदाहरण 1

35 र 60 लाई नि:शेष भाग जाने सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या कुन हो ?

समाधान

यहाँ, आवश्यक सङ्ख्या 35 र 60 को म.स. हुन्छ ।

अब 35 र 60 को भाग विधिबाट म.स. निकाल्दा,

```
35) 60 (1
   -35
    25) 35 (1
       -25
       10) 25 (2
          -20
           5) 10 (2
              10
               0
```

यहाँ, 35 र 60 को म.स. = 5 छ ।

त्यसैले, 35 र 60 लाई नि:शेष भाग जाने सबभन्दा ठुलो सङ्ख्या 5 हुन्छ ।

उदाहरण 2

40 ओटा किताब, 50 ओटा कापी र 60 ओटा कलमहरू बढीमा कति जना विद्यार्थीहरूलाई बराबर गरी बाँड्न सकिएला ? प्रत्येकले कति कतिओटा पाउलान् ? पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, आवश्यक सङ्ख्या 40, 50 र 60 को म.स. हुन्छ । प्रत्येक म.स.ले प्रत्येक सङ्ख्यालाई भाग गर्दा आउने भागफल नै सबै विद्यार्थीहरूले बराबर सङ्ख्यामा पाउने हुन्छ ।

40 र 50 को म.स. निकाल्दा,

```
40) 50 (1
   - 40
    10) 40 (4
      - 40
        0
```

अब, भाजक 10 ले अर्को सङ्ख्या 60 लाई भाग गर्दा,

```
10) 60 (6
   - 60
     0
```

∴ म.स. = 10 हुन्छ ।

त्यस कारण, 40 किताब, 50 कापी र 60 कलम बढीमा 10 जना विद्यार्थीहरूलाई बराबर गरी बाँड्न सकिन्छ । प्रत्येकले 40 ÷ 10 = 4 ओटा किताब, 50 ÷ 10 = 5 ओटा कापी र 60 ÷ 10 = 6 ओटा कलम पाउँछन् ।

अभ्यास 12.3

1. **तल दिइएका सङ्ख्याहरूको गुणनखण्डको समूह बनाएर म.स. पत्ता लगाऊ :**

   (क) 3, 6 (ख) 8, 10 (ग) 15, 18 (घ) 9, 12 (ङ) 12, 18

   (च) 9, 18 (छ) 21, 28, 35 (ज) 16, 20, 28 (झ) 20, 35, 55 (ञ) 14, 26, 54

2. **तल दिइएका सङ्ख्याहरूको भाग विधिबाट म.स. निकाल :**

   (क) 18, 24 (ख) 36, 42 (ग) 40, 50 (घ) 25, 35 (ङ) 48, 64

   (च) 60, 72 (छ) 54, 72 (ज) 12, 15, 18 (झ) 20, 35, 40

3. 72 ओटा गुच्चा र 99 ओटा चकलेट बढीमा कति जनालाई बराबर हुने गरी बाँड्न सकिएला र प्रत्येकले कति कतिओटा बिस्कुट र चकलेट पाउँछन् होला ? पत्ता लगाऊ ।

4. 125 ओटा सुन्तला, 150 ओटा मौसम र 225 ओटा अम्बा बढीमा कति विद्यार्थीलाई बराबर हुने गरी बाँड्न सकिन्छ ? प्रत्येकले हरेक फलफूल कति कतिओटा प्राप्त गर्छन् होला ? पत्ता लगाऊ ।

5. एउटा वृद्धाश्रममा 80 ओटा कम्बल, 90 ओटा स्वेटर र 120 ओटा न्यानो ज्याकेट वितरणका लागि व्यवस्था गरिएछ । ती कपडाहरू बढीमा कति जनालाई बराबर भाग लाग्ने गरी बाँड्न सकिन्छ ? प्रत्येकले हरेक कपडा कति कति सङ्ख्यामा प्राप्त गर्छन् होला ? पत्ता लगाऊ ।

6. कक्षा 7 की छात्रा पुनमले आफ्नो जन्मदिनको अवसरमा 60 ओटा लड्डु, 72 ओटा पेडा र 108 ओटा बर्फी बाँडिछन् । उक्त मिठाईहरू बढीमा कति जनालाई बराबर गरी बाँडिन् होला ? पत्ता लगाऊ ।

12.4 लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple - LCM)

1. लघुत्तम समापवर्त्यको परिचय

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) दुईओटा सङ्ख्याहरू 6 र 8 का अपवर्त्यहरूको समूह बनाएर हेरौँ ।

सङ्ख्या 6 का अपवर्त्यहरूको समूह (M_6) = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60 ...}

सङ्ख्या 8 का अपवर्त्यहरूको समूह (M_8) = {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, ...}

अब, सङ्ख्या 6 र 8 का साझा अपवर्त्यहरूको समूह = {24, 48, ...}

यहाँ 6 र 8 को सबैभन्दा सानो अपवर्त्य 24 छ । त्यसैले 24 लाई सङ्ख्या 6 र 8 को लघुत्तम समापवर्त्य भनिन्छ ।

(ख) अब, माथिका M_6 र M_8 का प्रत्येक अपवर्त्यहरूलाई 6 र 8 ले छुट्टाछुट्टै भाग गरेर हेर । यसबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख ।

(ग) के 6 र 8 ले 24 लाई पनि छुट्टाछुट्टै भाग जान्छ ? भाग गरी हेर ।

> कुनै पनि दुई वा दुईभन्दा बढी प्राकृतिक सङ्ख्याले निःशेष भाग जाने सबैभन्दा सानो प्राकृतिक सङ्ख्यालाई ती सङ्ख्याहरूको लघुत्तम समावर्त्य (Lowest Common Multiple - L.C.M.) भनिन्छ ।

2. भाग विधिबाट ल.स. निकाल्ने तरिका

सङ्ख्याहरू 48 र 64 को भाग विधिबाट ल.स. निकाल्ने प्रयास गरौँ :

ल.स. निकाल्ने तरिका/प्रक्रिया

1. दिइएका सबै सङ्ख्याहरूलाई पङ्क्ति (row) मा अर्धविराम (,) राखी मिलाएर राख्ने
2. सबभन्दा सानो साझा रूढ गुणनखण्डद्वारा भाग गर्दै जाने
3. दिइएका सङ्ख्याहरूमध्ये कम्तीमा दुई ओटालाई पूर्ण रूपमा रूढ गुणनखण्ड नआएसम्म भाग गर्दै जाने
4. सबै भाजक रूढ गुणनखण्डहरू र अन्तिम पङ्क्तिका बाँकी सङ्ख्याहरूको गुणनफल निकाल्ने । यही गुणनफल दिइएका सङ्ख्याहरूको ल.स. हुन्छ ।

भाग विधिबाट ल.स. निकाल्दा,

2	48, 64
2	24, 32
2	12, 16
2	6, 8
	3, 4

यहाँ ल.स. = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 4 = 192

अतः त्यही गुणनफल 192 दिइएका सङ्ख्याहरू 48 र 64 को ल.स. हुन्छ ।

उदाहरण 1

9 र 12 को ल.स. निकाल :

(क) अपवर्त्यहरूको समूह बनाएर (ख) भाग विधिबाट

समाधान

(क) समूह बनाएर 9 र 12 को ल.स. निकाल्दा,

9 का अपवर्त्यहरूको समूह (M_9) = {9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, ...}

12 का अपवर्त्यहरूको समूह (M_{12}) = { 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96 .....}

अब, अपवर्त्यहरूको समूहमा तुलना गरेर हेर्दा 9 र 12 का अपवर्त्यहरूमध्ये सबभन्दा सानो अपवर्त्य = 36 हो । त्यसैले सङ्ख्याहरू 9 र 12 को ल.स. = 36 हुन्छ ।

(ख) भाग विधिबाट 9 र 12 को ल.स. निकाल्दा,

3	9, 12
	3 4

अब, ल.स. = 3 x 3 x 4 = 36 हुन्छ ।

उदाहरण 2

15, 18, 24 र 30 ले ठिक भाग जाने सबैभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाऊ । (भाग विधिबाट)

समाधान

यहाँ दिइएका सङ्ख्याहरूले ठिक भाग जाने सबैभन्दा सानो सङ्ख्या दिइएका सङ्ख्याहरूको ल.स. हुन्छ । त्यसैले भाग विधिबाट 15, 18, 24 र 30 को ल.स. निकाल्दा,

2	15, 18, 24, 30
3	15, 9, 12, 15
5	5, 3, 4, 5
	1, 3, 4, 1

अब, ल.स. = 2 x 3 x 5 x 3 x 4 = 360

यसर्थ 15, 18, 24 र 30 ले ठिक भाग जाने सबैभन्दा सानो सङ्ख्या 360 हुन्छ ।

उदाहरण 3

कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूलाई पहिलो 5/5 जनामा, दोस्रो 6/6 जनामा र तेस्रो 10/10 जनामा समूह बनाएर सामुदायिक/परियोजना कार्य गर्न लगाइएको रहेछ । अब विद्यार्थीहरू कम्तीमा कति जना भएमा प्रत्येक कार्यमा विद्यार्थीहरू बाँकी नहुने गरी समूह बनाउन सकिएला ? पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, आवश्यक समूह सङ्ख्या भन्नाले प्रत्येक समूहका विद्यार्थी सङ्ख्या क्रमशः 5, 6 र 10 को ल.स. हुन्छ ।

अब, 5, 6 र 10 को भाग विधिबाट ल.स. निकाल्दा,

2	5, 6, 10
5	5, 3, 5
	1, 3, 1

अब ल.स. = 2 x 5 x 3 = 30

त्यसैले कम्तीमा 30 जना विद्यार्थीहरू भएमा क्रमशः पहिलो 5/5 जना, दोस्रो 6/6 जना र तेस्रो 10/10 जनाको समूह बनाई समूहकार्य गर्न सकिन्छ ।

अभ्यास 12.4

1. **तलका प्रत्येक सङ्ख्याहरूको अपवर्त्यहरूको समूह बनाएर तथा भाग विधि गरी दुवै तरिकाले ल.स. निकाल :**

   (क) 18 र 48 (ख) 12 र 30 (ग) 36 र 48

   (घ) 49 र 35 (ङ) 15, 20 र 25 (च) 30, 40 र 50

   (छ) 28, 42 र 56 (ज) 36, 54 र 72 (झ) 210, 280, 420 र 530

   (ञ) 100, 200, 300 र 400

2. 30, 36, 48 र 60 ले ठिक भाग जाने सबभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

3. तिन ओटा मेजरिङ टेपहरू क्रमशः 24cm, 35cm र 54cm लम्बाइका छन् । अब कुनचाहिँ सबैभन्दा छोटो लम्बाइ सबै टेपले ठिक भाग जाने गरी (ठिक्क हुने गरी) नाप्न सकिएला ? पत्ता लगाऊ ।

4. त्यो सबैभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाऊ, जसबाट तीन घटाउँदा आउने घटाउ फललाई 18, 24 र 36 ले निःशेष भाग जान्छ ।

5. त्यो सबैभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाऊ, जसमा 7 जोड्दा आउने योगफललाई 32, 64 र 192 ले ठिक भाग लाग्छ ।

6. माथि प्रश्न 1 देखि 5 सम्म दिइए जस्तै समस्याहरू बनाई साथीसँग साटेर समाधान गरी शिक्षकलाई देखाऊ ।

12.5. द्विआधार र पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धति

(Binary and Quinary Number System)

1. द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिको परिचय

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिका बारेमा हामीले अघिल्ला कक्षाहरूमा पढिसकेका छौँ । दशमलव अर्थात् हिन्दु अरेबिक सङ्ख्या पद्धतिमा 0 देखि 9 सम्मका 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 गरी जम्मा 10 अङ्कहरू हुन्छन् । हिन्दु अरेबिक सङ्ख्या पद्धतिमा सङ्ख्यालाई 10 को घाताङ्कका रूपमा व्यक्त गरिन्छ ।

जस्तै : $24 = 2 \times 10 + 4 = 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

$576 = 5 \times 100 + 7 \times 10 + 6 = 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

अब हामी द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिका बारेमा छलफल गरौँ ।

विज्ञान तथा सूचना प्रविधिको विकासले कम्प्युटर प्रविधिका माध्यमबाट छोटो समयमै जटिलभन्दा जटिल गणितीय समस्याहरू समाधान गर्न सकिने भएको छ । कम्प्युटरमा विद्युतीय सर्किट (electrical circuit) खोल्ने र बन्द गर्ने (on and off) दुई ओटा प्रक्रियालाई क्रमश: सङ्केत 0 र 1 ले जनाइएको हुन्छ ।

यसरी द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा 0 र 1 गरी दुईओटा मात्र सङ्ख्याहरू प्रयोग गरिएका हुन्छन् ।

दशमलव सङ्ख्या पद्धधतिमा दशओटा अङ्क प्रयोग भएजस्तै द्विआधार सङ्ख्या पद्धधतिमा दुईओटा 0 र 1 मात्र प्रयोग हुन्छन् । द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा सङ्ख्याहरू 2 को घाताङ्कमा लेखिन्छ ।

2. दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण

अब हामी दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा बदल्ने तरिका बारेमा छलफल गरौँ ।

दशमलवमा भएको सङ्ख्यालाई 2 ले भाग गर्दै जाने र भागफलमा 0 नआएसम्म भाग गरिरहनुपर्छ । अनि शेषलाई दायाँतर्फ लेख्दै जानुपर्छ र अन्त्यमा तलपट्टिबाट माथितिर क्रमश: शेषलाई मिलाएर लेख्नुपर्छ ।

उदाहरण 1

25 लाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर ।

समाधान

यहाँ, 25 लाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्दा,

2	25	
2	12	1
2	6	0
2	3	0
2	1	1
	0	1

तसर्थ, $25 = 11001_2$ हुन्छ ।

3. द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिबाट दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण

तलको क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

$0_2 = 0 = 0$

$1_2 = 2^0 = 1$

$10_2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2$

$11_2 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 3$

$100_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4$

$101_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5$

द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिलाई छुट्याउन पछाडि 2 राखेर 11_2 अथवा 101_2 लेख्ने गरिन्छ ।

उदाहरण 2

1001_2 र 1111_2 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा बदल :

समाधान

$1001_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 8 + 0 + 0 + 1 = 9$

$1111_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 8 + 4 + 2 + 1$

$= 15$

4. पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिको परिचय

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा दशओटा अङ्कहरू, द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा दुईओटा अङ्क भए जस्तै पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा 0, 1, 2, 3, 4 गरी पाँचओटा अङ्कहरू प्रयोग गरिन्छन् ।

पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा सङ्ख्यालाई 5 को घातका रूपमा लेखिन्छ ।

तलको तालिका अध्ययन गरी छलफल गर

5 को स्थानमान	5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
दशआधार	3125	625	125	25	5	1

5. दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण

अब हामी दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा बदल्ने तरिकाबारेमा छलफल गरौँ ।

सर्वप्रथम दशमलवमा भएको सङ्ख्यालाई 5 ले भागफलमा 0 नआएसम्म भाग गरिरहनुपर्छ । अनि शेषलाई दायाँतर्फ लेख्दै जानुपर्छ । अन्त्यमा तलपट्टिबाट माथितिर क्रमशः शेषलाई मिलाएर लेख्नुपर्छ ।

उदाहरण 3

432 लाई पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा बदल :

समाधान

यहाँ 432 लाई पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्दा,

5	432	
5	86	2
5	17	1
5	3	2
	0	3

$432 = 3212_5$

6. पञ्चआधार पद्धतिबाट दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण

तलको क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

$0_5 = 0 = 0$
$1_5 = 5^0 = 1$
$10_5 = 1 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 5$
$11_5 = 1 \times 5^1 + 1 \times 5^0 = 6$
$100_5 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 25$
$101_5 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0 = 26$

पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिलाई छुट्याउन सङ्ख्याका पछाडि 5 राखेर 11_5 लेख्ने गरिन्छ ।

उदाहरण 4

माथिको स्थानमान तालिका हेरेर 234_5 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर :

समाधान

$234_5 = 2 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 4 \times 5^0$
$= 2 \times 25 + 3 \times 5 + 4 \times 1$
$= 50 + 15 + 4$
$= 69$

अभ्यास 12.5

1. **तल दिइएका दशमलव पद्धतिको सङ्ख्यालाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा बदल :**

(क) 11 (ख) 25 (ग) 79 (घ) 104 (ङ) 250 (च) 366

2. **तलका प्रत्येक द्विआधार सङ्ख्यालाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा बदल :**

(क) 11_2 (ख) 101_2 (ग) 111_2 (घ) 10101_2 (ङ) 11001_2
(च) 11111_2 (छ) 110011_2 (ज) 100000_2 (झ) 1000011_2 (ञ) 1111001_2

3. **तलका प्रत्येक दशमलव पद्धतिका सङ्ख्यालाई पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा बदल :**

(क) 21 (ख) 55 (ग) 112 (घ) 650 (ङ) 1128 (च) 3650

4. **तलका प्रत्येक पञ्चआधार सङ्ख्यालाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा बदल :**

(क) 21_5 (ख) 34_5 (ग) 123_5 (घ) 343_5 (ङ) 2113_5 (च) 1234_5

एकाइ 13

पूर्णाङ्क (Integer)

13.1 पूर्णाङ्कका चार साधारण नियम

1. पूर्णाङ्कको परिचय

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) N = {1, 2, 3, 4, 5, ...} लाई हामी कुन सङ्ख्याहरूको समूह भन्छौँ ?

(ख) W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...} लाई हामी कुन सङ्ख्याहरूको समूह भन्छौँ ?

पहिलोलाई प्राकृतिक सङ्ख्याहरू (natural numbers) को समूह र दोस्रोलाई पूर्ण सङ्ख्याहरू (whole numbers) को समूह भनिन्छ ।

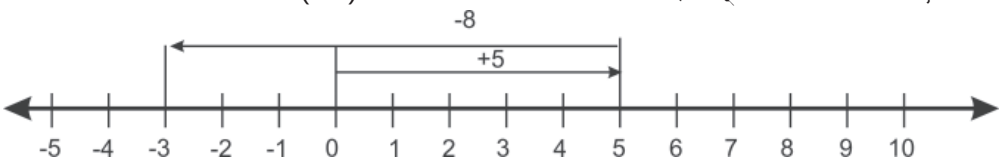
(ग) पूर्ण सङ्ख्यामा भएका कुनै दुई ओटा सङ्ख्या 5 र 8 लिऊँ ।

5 + 8 = 13, के पूर्ण सङ्ख्यामा पर्छ ?

8 - 5 = 3, के पूर्ण सङ्ख्यामा पर्छ ?

8 x 5 = 40, के पूर्ण सङ्ख्यामा पर्छ ?

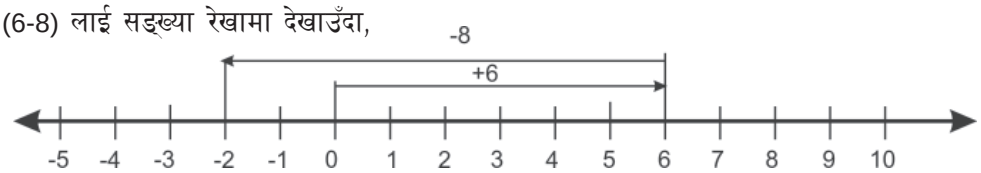
(घ) अब 5 र 8 को घटाउ फल (5-8) निकाल्ने कोसिस गरौँ । यसलाई सङ्ख्या रेखाबाट घटाएर हेरौँ ।



घटाउ फल (5-8) जुन 0 भन्दा 3 एकाइ बायाँ पर्छ । 0 भन्दा बाया पर्ने सङ्ख्या त पूर्ण सङ्ख्यामा पर्दैन । यसलाई -3 लेखिन्छ । -3 पूर्णाङ्कमा पर्दछ ।

(ङ) **अब, (6-8), (2-6), (1-2), (4-5) लाई पनि सङ्ख्या रेखामा देखाएर हेरौँ ।**

1. (6-8) लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,

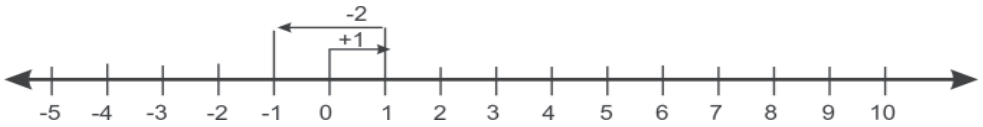


यहाँ (6-8), जुन 0 भन्दा 2 एकाइ बायाँ पऱ्यो । त्यसैले (6-8) = -2 हुन्छ ।

2. (2-6) लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,

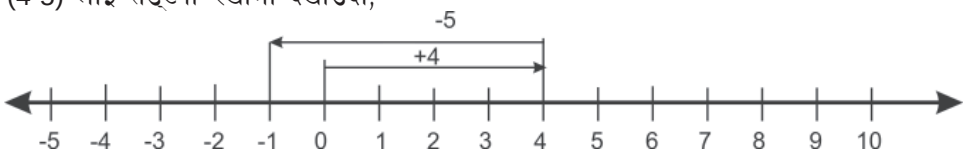
यहाँ, (2-6) जुन 0 भन्दा 4 एकाइ बायाँ पऱ्यो । त्यसैले (2-6) = -4 हुन्छ ।

3. (1-2) लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,



यहाँ (1-2) जुन 0 भन्दा 1 एकाइ बायाँ पऱ्यो । त्यसैले (1-2) = -1 हुन्छ ।

4. (4-5) लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,



यहाँ, (4-5) जुन 0 भन्दा 1 एकाइ बायाँ परेको छ । त्यसैले (4-5) = -1 हुन्छ ।

अब, हामी भन्न सक्छौँ -1, -2, -3, -4, ... आदि 0 भन्दा बायाँ र +1, +2, +3, +4, ... आदि 0 भन्दा दायाँ हुन्छन् ।

0 भन्दा बायाँका सङ्ख्याहरू 0 भन्दा साना हुन्छन् ।

0 भन्दा दायाँका सङ्ख्याहरू 0 भन्दा ठुला हुन्छन् ।

त्यसैले 0 सहितका सबै धनात्मक र ऋणात्मक सङ्ख्यालाई पूर्णाङ्क भनिन्छ । यसलाई Z ले जनाइन्छ ।

2. पूर्णाङ्कहरूका प्रकार र तुलना

(क) पूर्णाङ्कका प्रकार

तलका विभिन्न प्रकारका पूर्णाङ्कहरूको अध्ययन गरी छलफल गर ।

पूर्णाङ्क (Z) ={ ..... -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...}

धनात्मक पूर्णाङ्क (Z+) = {+1, +2, +3, ...} र

ऋणात्मक पूर्णाङ्क (Z-) = {-1, -2, -3, -4, ...}

(ख) पूर्णाङ्कहरूबिचको तुलना

माथिको सङ्ख्या रेखाका आधारमा 5 जोडी सङ्ख्याहरूलाई (< र >) चिह्न प्रयोग गरी लेख ।

जस्तै : (5<10) र (5>-2)

(ग) विमुख पूर्णाङ्क

पूर्णाङ्क +2 र पूर्णाङ्क -2 को तुलना गरी हेरौँ ।

पूर्णाङ्क +2 ले उद्गम बिन्दु 0 बाट दायाँतिर रहेको पूर्णाङ्कलाई जनाउँछ । त्यस्तै, -2 ले 0 बाट उत्तिकै दुरीमा रहेको बायाँतिरको सङ्ख्या जनाउँछ ।

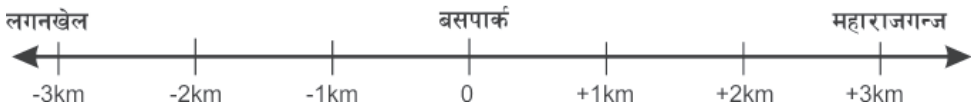
त्यसैले +2 र -2 लाई आपसमा विमुख पूर्णाङ्कहरू भनिन्छ ।

कुनै पूर्णाङ्क सङ्ख्या रेखाको उद्गम बिन्दु शून्यबाट जति दुरीमा छ ठिक त्यति नै दुरीमा रहेको अर्को विपरीत दिशाको पूर्णाङ्कलाई त्यो पूर्णाङ्कको विमुख भनिन्छ ।

-x को विमुख पूर्णाङ्क +x हुन्छ । अब -5 को विमुख पूर्णाङ्क कति होला ?

3. पूर्णाङ्कको निरपेक्षमान (Absolute Value of Integer)

तलको सङ्ख्या रेखा हेरी छलफल गर :



यहाँ, उद्गम बिन्दु बसपार्क हो । बसपार्कबाट लगनखेल 3km पश्चिम अर्थात् बायाँ छ । महाराजगन्ज 3km पूर्व अर्थात् दायाँ छ । अब भन त, महाराजगन्जदेखि लगनखेलको दुरी कति छ ?

के (-3km) + (+3km) = 0km हुन्छ ? पक्कै हुँदैन ।

अथवा 3km + 3km = 6km हुन्छ ।

हो, -3km = 3km र +3km = 3km मान्ने हो भने दुई स्थानबिचको दुरी 3km + 3km = 6km हुन्छ ।

त्यसैले -3 र +3 दुवैको निरपेक्ष मान 3 हुन्छ ।

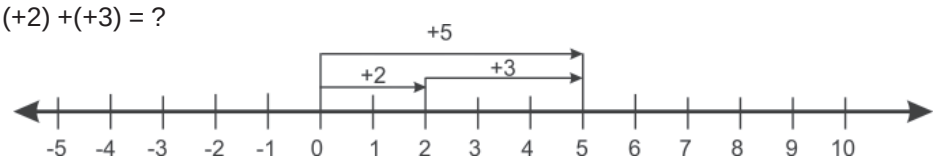
कुनै पनि पूर्णाङ्कको धनात्मक साङ्ख्यिक मानलाई निरपेक्षमान भनिन्छ । त्यसैले |+x| = |-x| = x हुन्छ ।

3.1 पूर्णाङ्कको जोड र घटाउ (Addition and Subtraction of Integers)

(क) पूर्णाङ्कको जोड (Addition of Integers)

तल दिइएका सङ्ख्या रेखाका आधारमा गरिएका पूर्णाङ्कको जोड अध्ययन गरी छलफल गर ।

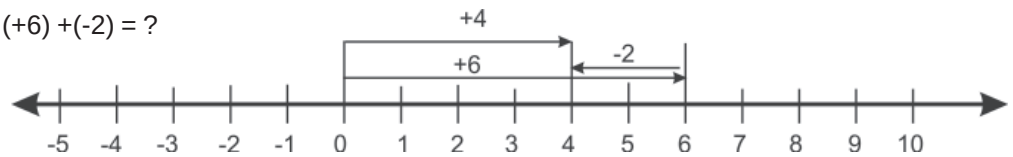
1. (+2) +(+3) = ?



+2 एकाइ दायाँ गएर +3 एकाइ दायाँ नै जाँदा कहाँ पुगिन्छ ? हो +5 एकाइ दायाँ पुगिन्छ ।

अत: (+2) +(+3) = +5 हुन्छ ।

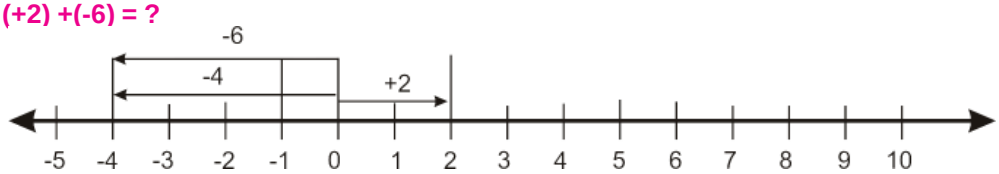
2. (+6) +(-2) = ?



त्यसैले (+6) + (-2) = +4 हुन्छ ।

यहाँ, उद्गम बिन्दुबाट 6 एकाइ दायाँ र 2 एकाइ बायाँ आएपछि हामी 0 बाट 4 एकाइ दायाँ पुग्छौं ।

3. (+2) +(-6) = ?



0 बाट 2 एकाइ दायाँ र +2 बाट 6 एकाइ बायाँ जादाँ 4 एकाइ 0 बाट बायाँ पुगिन्छ ।

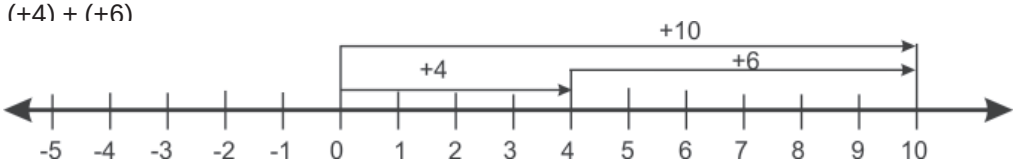
त्यसैले, (+2) + (-6) = -4 हुन्छ ।

उदाहरण 1

सङ्ख्या रेखा प्रयोग गरी जोड गर (क) (+4) + (+6) (ख) (+4) + (-6) (ग) (-4) + (+6)

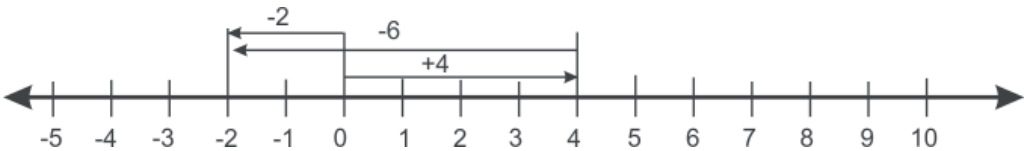
समाधान

(क) (+4) + (+6)



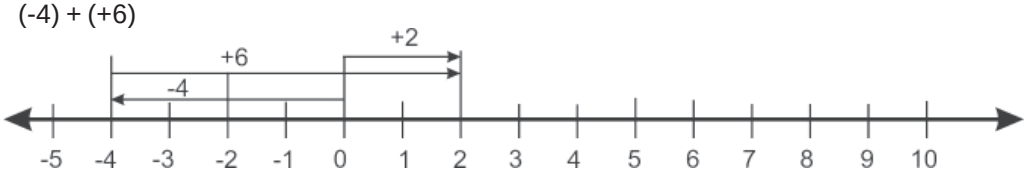
अत: (+4) + (+6) = +10 हुन्छ ।

(ख) (+4) + (-6)



अत: (+4) + (-6) = -2 हुन्छ ।

(ग) (-4) + (+6)



अत: (-4) + (+6) = (+2) हुन्छ ।

(ख) पूर्णाङ्कको जोडका नियम

पूर्णाङ्कको जोडका केही महत्त्वपूर्ण नियमहरूलाई तल बुँदागत रूपमा उल्लेख गरिएको छ ।

1. विनियम नियम (Commutative Law)

पूर्णाङ्कहरूको जोडफल निकाल्दा पूर्णाङ्कहरूलाई जुनसुकै क्रममा राखेर पनि परिणाम एउटै निस्कने नियमलाई पूर्णाङ्कको जोडको विनियम नियम भनिन्छ । जस्तै : a + b = b + a जहाँ a र b दुवै पूर्णाङ्कहरू हुन् ।

2. **सङ्घीय नियम (Associative Law)**

तीनओटा पूर्णाङ्कहरूलाई जोड्दा पहिला जुनसुकै 2 ओटा पूर्णाङ्क जोडेर आएको जोडफलमा तेस्रो पूर्णाङ्क जोड्दा पनि जोडफल बराबर आउँछ भने त्यस्तो नियमलाई पूर्णाङ्कको जोडको सङ्घीय नियम भनिन्छ ।

जस्तै : (a+b)+c = a+(b+c) = (a+c)+b जहाँ : a, b र c पूर्णाङ्कहरू हुन् ।

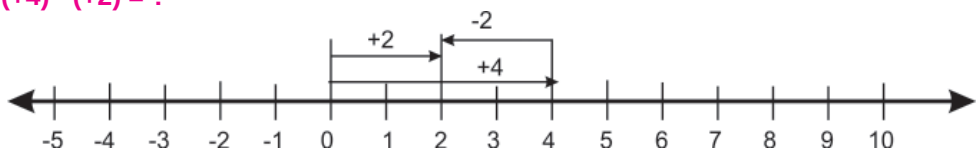
3. **विपरीत परिणाम (Inverse Quantity)**

यदि कुनै दुईओटा पूर्णाङ्कहरू जोड्दा जोडफल 0 हुन्छ भने त्यस नियमलाई पूर्णाङ्कको जोडको विपरीत परिणाम भनिन्छ । जस्तै : +a र -a आपसमा विपरीत परिणाम हुन् । जहाँ (+a)+(-a)=0 हुन्छ र a एउटा पूर्णाङ्क हो ।

(ग) पूर्णाङ्कको घटाउ (Subtraction of Integer)

तलको सङ्ख्या रेखाका आधारमा देखाइएका पूर्णाङ्कका घटाउसम्बन्धी क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

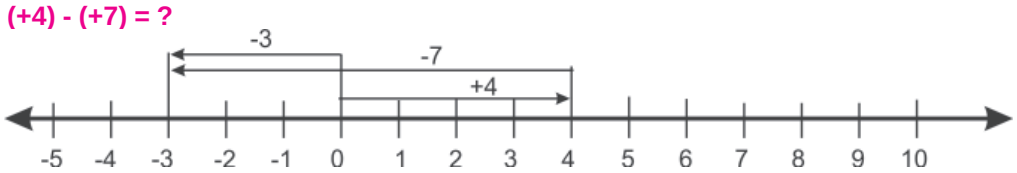
1. **(+4) - (+2) = ?**



(+4) एकाइ दायाँ गएर -2 एकाइ बायाँ जाँदा कहाँ पुगिन्छ ? 2 एकाइ दायाँ पुगिन्छ ।

त्यसैले, (+4) - (+2) = (+2) हुन्छ ।

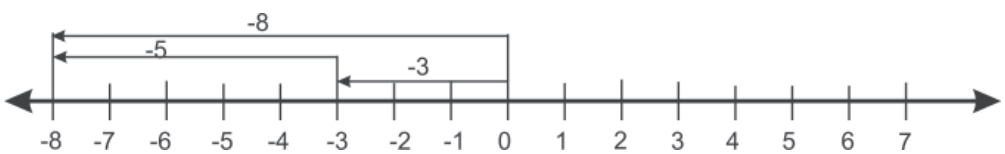
2. **(+4) - (+7) = ?**



0 बाट (+4) एकाइ दायाँ गएर -7 एकाइ बायाँ जाँदा कहाँ पुगिन्छ ? 3 एकाइ बायाँ पुगिन्छ ।

त्यसैले, (+4) – (+7) = (-3) हुन्छ ।

3. **(-3) + (-5) = ?**



0 बाट (-3) एकाइ बायाँ गएर 5 एकाइ बायाँ नै जाँदा कहाँ पुगिन्छ ? (-8) एकाइ बायाँ नै पुगिन्छ ।

त्यसैले, (-3) + (-5) = (-8) हुन्छ ।

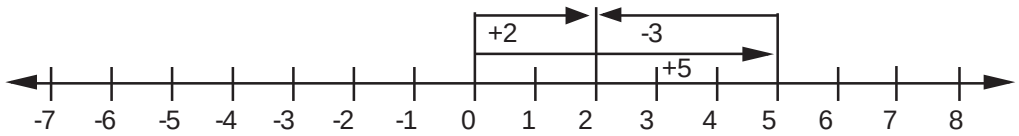
उदाहरण 2

सरल गर :

(क) (+5) - (+3) (ख) (+2) - (+5) (ग) (-2) - (+5)

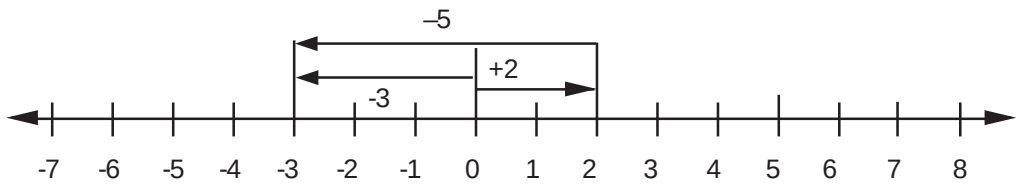
समाधान

(क) **(+5) - (+3)** लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,



तसर्थ (+5) - (+3) = (+2)

(ख) **(+2) - (+5) लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,**



तसर्थ, (+2) - (+5) =-3

(ग) **(-2) - (+5) लाई सङ्ख्या र रेखामा देखाउँदा,**

तसर्थ (-2) - (+5) = -7

अभ्यास 13.1

1. **तल दिइएका पूर्णाङ्कका क्रियाहरूलाई सङ्ख्या रेखामा देखाऊ :**

(क) (+3) + (+4) (ख) (+7) + (-4) (ग) (-5) + (+2) (घ) (-4) + (-3)

(ङ) (-6) - (+2) (च) (+6) - (+2) (छ) (+6) - (-2) (ज) (-5) + (+7)

(झ) (-4) - (-6) (ञ) (+3) + (-5)

2. **तल दिइएका पूर्णाङ्कहरूको 10 एकाइ दायाँ र 10 एकाइ बायाँ पर्ने पूर्णाङ्क लेख :**

(क) (-5) (ख) (-3) (ग) 0 (घ) +4) (ङ) (+7) (च) (+10)

3. तल दिइएका पूर्णाङ्कहरूको विमुख पूर्णाङ्क लेख :

(क) (+4) (ख) (+1) (ग) (-3) (घ) (-5) (ङ) 0 (च) (+7)

4. तल दिइएका पूर्णाङ्कहरूको निरपेक्ष मान निकाल :

(क) |+6| (ख) |-4| (ग) |+10| (घ) |-3| (ङ) |-5| (च) |-7|

5. सरल गर :

(क) (+6) + (+4) + (+3) (ख) (+8) + (-4) + (+3) (ग) (-7) + (+6) + (-5)

(घ) (-12) - (-10) + (+6) (ङ) (+15) - (+10) - (-3) (च) (-35) + (+25) + (+10)

(छ) (+24) + (-20) + (-15) (ज) (-10) - (+10) -(+10)

6. **विनिमय नियम प्रयोग गरी जोड गर :**

(क) (+17) + (+12) + (+20) (ख) (+20) + (-10) + (-10) (ग) (+25) + (20) + (-15)

(घ) (+35) + (+24) + (-18) (ङ) (-46) + (+58) + (-44)

7. (+25) मा कति जोड्दा (-25) हुन्छ ?

8. (-35) बाट कति घटाउँदा (-20) हुन्छ ?

9. सुजनलाई सुन्तला बेचेर रु. 145 नाफा भएको छ । जुनार बेचेर रु. 74 नोक्सान भएछ । कुल कारोबारबाट सुजनलाई नाफा वा नोक्सान के भएछ र कति भएछ ? पत्ता लगाऊ ।

10. दुईओटा बसहरू एकै स्थानबाट एकै समयमा छुटेछन् । एउटा बसले 127 km पूर्व यात्रा गऱ्यो र अर्को बसले 139 km पश्चिम यात्रा गऱ्यो । ती दुई बसबिचको दुरी पत्ता लगाऊ ।

11. कुनै दुईओटा पूर्णाङ्कहरूको योगफल -119 छ । यदि ठुलो पूर्णाङ्क 177 भए सानो पूर्णाङ्क कति होला ? पत्ता लगाऊ ।

12. **सङ्घीय नियम प्रयोग गरी सरल गर :**

(क) (+7) + (-25) - (-65) (ख) (+45) + (-146) + (+209)

13. **क्रम विनियम प्रयोग गरी सरल गर :**

(क) (-5) - (+2) (ख) (+2) - (-5)

14. **सरल गर :**

(क) -4 + 14 + 15 + (-52) (ख) (-13) + (+7) - 8 + 14 - 40

13.2 पूर्णाङ्कको गुणन र भाग (Multiplication and Division of Integers)

1. पूर्णाङ्कको गुणन

(क) तलको क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

B — O — A

पश्चिम	नारायणगढ	पूर्व
8 घण्टा	40km/hr	8 घण्टा

पश्चिमबाट पूर्वतर्फ 40km प्रति घण्टाका दरले गुडिरहेको बस नारायणगढबाट 8 घण्टा पूर्व र 8 घण्टा पश्चिमको बसको स्थिति भन्न सक्छौ ?

(क) 8 घण्टाको पश्चिमको स्थिति = (40km/hr) x (8)hr = (320)km = 320km पूर्व

(ख) 8 घण्टा अघिको पूर्वको स्थिति = (40km/hr) x (8hr) = (320)km = 320km पश्चिम

नोट : पूर्वका स्थितिलाई (+) र पश्चिमको स्थितिलाई (-) मान्दा,

त्यसैले,

धनात्मक पूर्णाङ्क x (+)	धनात्मक पूर्णाङ्क (+)	= धनात्मक पूर्णाङ्क (+)
धनात्मक पूर्णाङ्क x (+)	ऋणात्मक पूर्णाङ्क (−)	= ऋणात्मक पूर्णाङ्क (−)

(ख) तल दिइएको पूर्णाङ्कको गुणनको ढाँचा अध्ययन गर :

(+3) x (-3) = - 9
(+2) x (-3) = -6
(+1) x (-3) = -3
(0) x (-3) = 0
(-1) x (-3) = +3
(-2) x (-3) = +6
(-3) x (-3) = +9

त्यसैले, ऋणात्मक पूर्णाङ्क x ऋणात्मक पूर्णाङ्क = धनात्मक पूर्णाङ्क हुन्छ ।

उदाहरण 1

गुणन गर : (क) (+4) x (+6) (ख) (+7) x (-6) (ग) (-5) x (+8) (घ) (-7) x (-7)

समाधान

(क) (+4) x (+6) = (+24) (ख) (+7) x (-6) = (-42)

(ग) (-5) x (+8) = (-40) (घ) (-7) x (-7) = (+49)

2. पूर्णाङ्कको गुणनका नियमहरू (Properties of multiplication of Integers)

पूर्णाङ्कका गुणनका केही महत्त्वपूर्ण नियमहरूलाई तल बुँदागत रूपमा उल्लेख गरिएको छ ।

1. **विनिमय नियम (Commutative Property)** : a x b = b x a

कुनै दुईओटा पूर्णाङ्कहरूको गुणन फल तिनीहरूका स्थान बदल्दा हुने गुणन फलसँग बराबर हुन्छ ।

जस्तै : (+2) x (+4) = (+4) x (+2) = +8, (-3) x (+7) = (+7) x (-3) = -21 र (-8) x (-6) -= (-6) x (-8) = +48 हुन्छ ।

अत: यदि a र b दुईओटा पूर्णाङ्कहरू हुन् भने a x b = b x a हुन्छ ।

2. **सङ्घीय नियम (Associative Property):** (a x b) x c = a x (b x c)

कुनै तिन ओटा पूर्णाङ्कहरूको गुणनफल तिनीहरूको पहिला दुई र अन्तिमको गुणनसँग र पहिलो र अन्तिम दुई गुणन गर्दा आउने गुणनफलसँग बराबर हुन्छ ।

जस्तै : [(+2) x (+3)] x (+4) = (+2) x [(+3) x (+4)] हुन्छ ।

[(+5) x (-2)] x (-7) = (+5) x [(-2) x (-7)] हुन्छ ।

अत: यदि a, b र c तीनओटा पूर्णाङ्करू हुन् भने (a x b) x c = a x (b x c)

3. **पद विच्छेदन नियम (Distributive Property) :** a(b+c) = ab + ac

जस्तै : (+6) [(+5)+(+3)]

= (+6) x (+5)+(+6) x (+3)

= (+30) + (+18)

= (+48)

त्यस्तै, (+6) x [(-5) + (+3)] = (+6) x (-5) + (+6) x (+3) = (-30) + (18) = -12 हुन्छ ।

यदि a, b र c तीनओटा पूर्णाङ्कहरू छन् भने a(b+c) = ab + ac हुन्छ ।

4. **1 को गुणन नियम (Multiplicative Property of 1)**

जस्तै, (+y) x 1 = +y

(-5) x 1 = -5

1 x (+9) = 9 हुन्छ ।

यदि a एउटा पूर्णाङ्क हो भने ax(+1)=(+1) x (a)=a हुन्छ ।

5. **0 को गुणन नियम (Multiplicative Property of 0)**

जस्तै : 2 x 0 = 0

0 x 2 = 0

100 x 0 = 0

यदि a एउटा पूर्णाङ्क हो भने a x 0 = 0 x a = 0 हुन्छ । 0 x 0 कति हुन्छ होला ?

उदाहरण 2

गुणन गर : [(-8)x(-5)]x(-4)

समाधान

[(-8)x(-5)]x(-4) =(+40)x(-4) =-160

उदाहरण 3

सङ्घीय नियम प्रयोग गरी गुणन गर : (+6)x[(-15)x(12)]

समाधान

(+6)x[(-15)x(12)]

= [(+6)x(-15)] x (12)

= (-90) x 12

= - 1080

2. पूर्णाङ्कको भाग (Division of Integers)

भाग क्रिया गुणन क्रियाको विपरीत क्रिया (inverse operation) हो । त्यसैले भाग क्रियामा पनि गुणन क्रियाकै नियम लागु हुन्छन् ।

तलका उदाहरणहरू हेरौँ :

(क) (+12)x (+3) = (+36)
(+36) ÷ (3) = (+12)
(+36) ÷(12)= (+3)

(ख) (-8)x(+4)=(-32)
(-32)÷(+4)=(-8)
(-32)÷(-8)=(+4)

त्यसैले,

धनात्मक पूर्णाङ्कलाई धनात्मक पूर्णाङ्कले भाग गर्दा भागफल धनात्मक हुन्छ ।

धनात्मक पूर्णाङ्कलाई ऋणात्मक पूर्णाङ्कलले भाग गर्दा भागफल ऋणात्मक हुन्छ ।

ऋणात्मक पूर्णाङ्कलाई ऋणात्मक पूर्णाङ्कले भाग गर्दा भागफल धनात्मक हुन्छ ।

ऋणात्मक पूर्णाकलाई धनात्मक पूर्णाङ्कले भाग गर्दा भागफल ऋणात्मक हुन्छ ।

अभ्यास 13.2

1. **गुणन गर ।**

(क) (+5) x (+5) (ख) (+5) x (-8) (ग) (-7) x (+8) (घ) (-9) x (-8)

(ङ) (+4) x (+6) x (+5) (च) (+7)x(+8)x(-6) (छ) (+12)x(-8)x(+2) (ज) (+7)x(-5)x(+4)

(झ) (+6)x(+4)x(-3)x(-2) (ञ) (+5)x(-4)x(-8)x(-3)

2. **गुणनको सङ्घीय नियम प्रयोग गरी दुवै तरिकाले गुणनफल निकाल :**

(क) (+5)x(+6)x(+7) (ख) (+7)x(-5)x(-3) (ग((-3)x(-3)x(-3)

(घ) (+4)x(+6)x(-5) (ङ) (+8)x(+6)x(-7)

3. **गुणनको पदविच्छेदन नियम प्रयोग गरी सरल गर :**

(क) (+6)x[(-18)+(30)] (ख) (-5)x[(+24)-(-6)] (ग) (+7)x [(-12) – (+6)]

(घ) (+12)x [(-30)+(+45)] (ङ.) (-16)x[(-13)+(-5)]

4. **भागफल निकाल :**

(क) (+30) ÷ (+6) (ख) (-25)÷ (+5) (ग) (+48) ÷ (-6)

(घ) (+95) ÷ (-19) (ङ) (-100)÷(-20) (च) (+120)÷(20)

5. दुई ओटा पूर्णाङ्कहरूको गुणनफल (+49) छ । एउटा पूर्णाङ्क (+7) भए अर्को पूर्णाङ्क पत्ता लगाऊ ।

6. दुई ओटा पूर्णाङ्कहरूको गुणनफल (+60) छ । एउटा पूर्णाङ्क (+5) भए अर्को पूर्णाङ्क पत्ता लगाऊ ।

7. (-5) लाई कतिले गुणन गरे गुणन फल (+80) हुन्छ ?

8. (+72) लाई कतिले भाग गरे भाग फल (+9) हुन्छ ?

9. गुणनफल (-225) बनाउन (15) लाई कति पटक गुणन गर्नुपर्छ ?

10. (-96) लाई (-24) ले कति पटक भाग गर्न सकिन्छ ?

13.3 चार साधारण नियमको सरलीकरण (Simplification of Four Operations)

जोड, घटाउ, गुणन र भाग यी चारओटा गणितका आधारभूत क्रियाहरू हुन् । यिनीहरूको क्रम मिलाएर सरल गर्नुपर्छ ।

सरलीकरणसम्बन्धी तलका नियमहरू याद गर :

(क) जोड, घटाउ तथा गुणन मिश्रित समस्यामा पहिला गुणनको काम गर्नुपर्छ ।

(ख) जोड, घटाउ तथा भाग क्रिया समावेश भएका समस्याको समाधान गर्दा सबैभन्दा पहिला भाग क्रिया गर्नुपर्छ ।

(ग) गुणन र भाग समावेश भएका समस्यामा पहिला भाग क्रिया गर्ने वा बायाँबाट दायाँतिर सरल गर्दै जाँदा जुन चिह्न पहिला अगाडि आउँछ त्यही क्रिया पहिला गर्नुपर्छ ।

उदाहरण 1

सरल गर ।

(+10) + (-5) + (+25)÷(-5)-(-6)x(+8)

= (+10)+(-5)+(-5)-(-6)x(+8)

= (+10)+(-5)+(-5)-(-48)

= (+5) + (-5) - (-48)

= 0-(-48)

= (+48)

उदाहरण 2

15 बाट 5 घटाई 4 ले गुन्दा कति हुन्छ ?

यहाँ दिइएको समस्यालाई गणितीय भाषामा व्यक्त गर्दा,

(15-5)x4

= 10x4

= 40

तसर्थ, आवश्यक सङ्ख्या = 40 हुन्छ ।

अभ्यास 13.3

1. **सरल गर :**

(क) 20 ÷ 2 + 19 (ख) 45 - 81 x 5

(ग) 88 - 3 x 20 ÷ 6 (घ) 108 x 3 - 55 ÷ 11 + 105

(ङ) (-6)x(-4)÷(+4)+(-3)-(-2)

2. 55 बाट 3 को 6 गुणा घटाउँदा कति हुन्छ ?

3. 200 लाई 4 ले भाग गरी 33 जोड्दा कति हुन्छ ?

4. 25 को 2 गुणाको 10 भागबाट 2 घटाई 5 ले गुणन गर्दा कति हुन्छ ?

5. 32 र 20 को फरकलाई 4 ले भाग गरी 15 जोड्दा कति हुन्छ ?

एकाइ 14 आनुपातिक सङ्ख्या (Rational Nnumber)

14.1 आनुपातिक र दशमलव सङ्ख्या (Rational and Decimal Number)

1. आनुपातिक सङ्ख्याहरू

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तल सङ्ख्याहरूका विभिन्न समूहहरू दिइएका छन् :

1. प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह (N) = {1, 2, 3, 4, 5, ...}
2. पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह (W) = {0, 1, 2, 3, 4, ...}
3. पूर्णाङ्कहरूको समूह (Z) = {... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ...}

अब, कुनै दुईओटा पूर्णाङ्कहरू (-3) र (+4) लिऊँ । यिनीहरूबिच जोड, घटाउ, गुणन र भाग क्रिया गर्ने प्रयास गरौँ :

1. **जोड क्रिया :** (-3) र (+4) को योगफल (-3)+(+4)= +1 हुन्छ । यहाँ +1 एउटा पूर्णाङ्क हो ।
2. **घटाउ क्रिया :** यहाँ (-3) र (+4) को घटाउ फल (-3) - (+4) = (-3) + (-4)= (-7) हुन्छ । यहाँ -7 पनि एउटा पूर्णाङ्क हो ।
3. **गुणन क्रिया :** (-3) र (+4) को गुणनफल (-3) x (+4) =-12 हुन्छ । यहाँ (-12) पनि एउटा पूर्णाङ्क हो ।
4. **भाग क्रिया :** (-3) र (+4) को भागफल (-3)÷(+4) हुन्छ । यहाँ (-3)÷ +4)=-$\frac{3}{4}$ एउटा पूर्णाङ्क होइन ।

   यसर्थ जोड, घटाउ र गुणनको क्रियाबाट प्राप्त हुने सङ्ख्या पूर्णाङ्कमा पर्दछ भने भाग फल वा अनुपात पूर्णाङ्कमा पर्दैन ।

   जस्तै : $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}$ आदि पूर्णाङ्क होइनन् । यिनीहरू $\frac{a}{b}$ का रूपमा आउँछन् । त्यसैले यस्ता सङ्ख्याहरू आनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् ।

(ख) माथिको छलफलबाट आनुपातिक सङ्ख्याको परिभाषा लेख । आफ्नो लेखाइलाई कक्षामा छलफल गर । प्राप्त निष्कर्षलाई तलको निष्कर्षसँग तुलना गरेर हेर ।

> a र b दुईओटा पूर्णाङ्कहरू हुन् र $b \neq 0$ भए $\frac{a}{b}$ का रूपमा व्यक्त गरिने सङ्ख्यालाई आनुपातिक सङ्ख्या (rational number) भनिन्छ र यसलाई Q ले जनाइन्छ ।

अत: आनुपातिक सङ्ख्या (Q) = { ..... $1, -\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ..... }

त्यसैले, सबै पूर्णाङ्कहरू आनुपातिक सङ्ख्यामा पर्ने भएकाले पूर्णाङ्कको समूह आनुपातिक सङ्ख्याको उपसमूह हो । त्यसैले, $Z \subset Q$ लेख्न सकिन्छ ।

2. दशमलव सङ्ख्याहरू

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तलको तालिका भर :

क्र.सं.	अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्या	अन्त्यहीन दशमलव सङ्ख्या	पुनरावृत्त दशमलव
1	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{2}{7} = 0.285714285714$	$\frac{1}{3} = 0.3333....$
2.	$\frac{1}{4} = ...$	$\frac{22}{7} = ...$	$\frac{2}{3} = ...$
3			
4.			

माथिको तालिकाका आधारमा थप 5/5 ओटा अन्त्य हुने, अन्त्यहीन र पुनरावृत्त हुने दशमलव सङ्ख्याहरू पत्ता लगाएर लेख ।

(ख) माथिको तालिकाका आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख । आफ्नो निष्कर्षलाई कक्षामा छलफल गर । प्राप्त निष्कर्षलाई तलको निष्कर्षसँग तुलना गरेर हेर ।

यसरी आनुपातिक सङ्ख्यालाई दशमलवमा व्यक्त गर्दा अन्त्य हुने, अन्त्यहीन र पुनरावृत्त हुने दशमलव सङ्ख्यामा व्यक्त गर्न सकिने रहेछ ।

माथि उदाहरणमा $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}.....$ आदि अन्त्य हुने, $\frac{2}{7}, \frac{22}{7}, ...$ अन्त्यहीन र $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}.....$ आदि पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्याहरू हुन् ।

3. दशमलव सङ्ख्याका प्रकार

माथिको उदाहरणका आधारमा दशमलव सङ्ख्याहरूका प्रकारलाई तल चर्चा गरिएको छ ।

(क) अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्या (Terminating Decimal)

यदि आनुपातिक सङ्ख्याको हरले अंशलाई भाग गर्दा भागफलमा दशमलव पछाडिका सङ्ख्याहरू अन्त्य हुन्छ भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्या भनिन्छ । जस्तै : $\frac{1}{4} = 0.25$

(ख) अन्त्यहीन दशमलव सङ्ख्या (Non-terminating Decimal)

यदि आनुपातिक सङ्ख्याहरूको हरले अंशलाई भाग गर्दा भागफलमा दशमलव पछाडिका सङ्ख्याहरू कहिले पनि अन्त्य हुँदैनन् भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई अन्त्यहीन दशमलव सङ्ख्या भनिन्छ । जस्तै : $\frac{2}{7} = 0.28571...$

(ग) पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्या (Recurring Decimals)

यदि आनुपातिक सङ्ख्याहरूको हरले अंशलाई भाग गर्दा भागफलमा दशमलव पछाडिका सङ्ख्याहरूमा एउटै सङ्ख्या दोहोरिएर आइरहन्छन् भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्या भनिन्छ । जस्तै

$\frac{2}{3} = 0.66666...$

नोट :

1. *यदि आनुपातिक सङ्ख्याको हरमा 2 अथवा 5 वा रूढ गुणन खण्ड 2 र 5 हुन्छन् भने त्यो सङ्ख्या अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्या हुन्छ । जस्तै :* $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{7}{25}, \frac{17}{30}$, ...
2. यदि आनुपातिक सङ्ख्याको हरमा 2 र 5 बाहेक अरू सङ्ख्या भएमा त्यस्ता दशमलव सङ्ख्या अन्त्यहीन वा पुनरावृत्त हुन्छन् । जस्तै : $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}$, ...

2. आनुपातिक सङ्ख्याका विशेषताहरू (Properties of Rational Numbers)

कक्षा 6 मा भिन्नको जोड, घटाउ, गुणन र भाग क्रियाका समस्याहरू समाधान गरिसकेका छौँ । मानौँ, a, b र c कुनै आनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् ।

आनुपातिक सङ्ख्याको जोड र गुणनका विशेषताहरू

तलका आनुपातिक सङ्ख्याहरूका विशेषताहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

1. **एकात्मक नियम (Identity Property) :** $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ र $\frac{a}{b} \times 1 = 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

जोडको एकात्मक नियम	गुणनको एकात्मक नियम
$\frac{1}{2} + 0 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\frac{2}{3} + 0 = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ $\frac{3}{7} + 0 = 0 + \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$ $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$	$\frac{1}{2} \times 1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\frac{2}{3} \times 1 = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ $\frac{3}{7} \times 1 = 1 \times \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$ $\frac{a}{b} \times 1 = 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
नियम : कुनै पनि आनुपातिक सङ्ख्यामा शून्य (०) जोड्दा आउने सङ्ख्या त्यही सङ्ख्या हुन्छ ।	नियम : कुनै पनि आनुपातिक सङ्ख्यालाई एक (1) ले गुणन गर्दा त्यही नै सङ्ख्या आउँछ ।

2. विपरीत गुण (Inverse Property)

जोडको विपरीत गुण	गुणनको विपरीत गुण
$-1 + 1 = 0$ $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$ $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$ $-\frac{a}{b}+\frac{a}{b}=0$	$1 \times 1 = 1$ $2\times\frac{1}{2}=1$ $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$ $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$
नियम : कुनै पनि आनुपातिक सङ्ख्या $\frac{a}{b}$ मा $-\frac{a}{b}$ विद्यमान भई $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=0$ आउँछ भने यस्तो गुणनलाई जोडको विपरीत गुण भनिन्छ ।	नियम : कुनै पनि आनुपातिक सङ्ख्या $\frac{a}{b}$ मा कुनै सङ्ख्या $\frac{b}{a}$ भई $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$ आउँछ भने त्यस्तो गुणलाई गुणनको विपरीत गुण भनिन्छ ।

3. क्रम विनिमय गुण (Commutative Property)

जोडको क्रम विनिमय गुण	गुणनको क्रम विनियम गुण
$2 + 3 = 3 + 2$ $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$	$2 \times 3 = 3 \times 2$ $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}$ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}$
नियम : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ लाई जोडको क्रम विनियम भनिन्छ ।	**नियम** : $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}$ लाई गुणनको क्रम विनिमय भनिन्छ ।

4. सङ्घीय नियम (Associative Property)

जोडको सङ्घीय नियम	गुणनको सङ्घीय नियम
$2 + (5 + 7) = (2 + 5) +7$ $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{5}$ $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$	$2 \times (5 \times 7) = (2 \times 5) \times 7$ $\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{5}$ $\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}$

नियम : $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$ लाई जोडको सङ्घीय नियम भनिन्छ ।	नियम : $\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}$ लाई गुणनको सङ्घीय नियम भनिन्छ ।

5. निकटताको नियम (Closure Property)

जोडको निकटताको नियम	गुणनको निकटताको नियम
$\frac{1}{2}$ र $\frac{2}{3}$ आनुपातिक सङ्ख्या हुन् । $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हो । $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ भए $\frac{e}{f}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हो ।	$\frac{1}{2}$ र $\frac{2}{3}$ आनुपातिक सङ्ख्या हुन् । $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हो ।
नियम : यदि $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ भए जोडफल $\frac{e}{f}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हुन्छ ।	नियम : यदि $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ भए $\frac{e}{f}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हुन्छ ।

अभ्यास 14.1

1. **तलका प्रश्नको उत्तर लेख :**

(क) के सबै प्राकृतिक सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या हुन् ?

(ख) के सबै पूर्ण सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या हुन् ?

(ग) के सबै पूर्णाङ्क आनुपातिक सङ्ख्या हुन् ?

(घ) के शून्य (0) आनुपातिक सङ्ख्या हो ?

(ङ) के सबै आनुपातिक सङ्ख्या पूर्णाङ्क हुन् ?

2. **तल दिइएका कुन कुन सङ्ख्याहरू अन्त्य हुने, अन्त्यहीन र पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्या हुन्, छुट्याऊ :**

(क) $\frac{1}{2}$ (ख) $\frac{3}{5}$ (ग) $\frac{2}{7}$ (घ) $\frac{15}{2}$ (ङ) $\frac{17}{13}$

(च) $\frac{55}{10}$ (छ) $\frac{37}{20}$ (ज) $\frac{25}{17}$ (झ) $\frac{22}{7}$ (ञ) $\frac{12}{25}$

3. **तल दिइएका सङ्ख्याको जोडको विपरीत र गुणनको विपरीत सङ्ख्या पत्ता लगाऊ :**

(क) $\frac{2}{5}$ (ख) $-\frac{5}{7}$ (ग) $\frac{22}{7}$ (घ) $\frac{12}{7}$ (ङ) $-\frac{11}{8}$

4. $\frac{1}{2}$ र $\frac{3}{5}$ को बिचमा कुनै दुईओटा आनुपातिक सङ्ख्या लेख ।

एकाइ 15 अननुपातिक सङ्ख्या (Irrational Number)

अननुपातिक सङ्ख्याको परिचय (Introduction of Irrational Number)

1. अनानुपातिक सङ्ख्या

(क) तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

4 को वर्गमूल $= \sqrt{4} = 2$ (आनुपातिक सङ्ख्या)

9 को वर्गमूल $\sqrt{9} = 3$ (आनुपातिक सङ्ख्या)

$\frac{9}{16}$ को वर्गमूल $= \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ (आनुपातिक सङ्ख्या)

2 को वर्गमूल $\sqrt{2} = 1.4421....$ यो आनुपातिक सङ्ख्या होइन, किन ?

अथवा $\sqrt{2}$ लाई $\frac{a}{b}$ को रूपमा व्यक्त गर्न सकिँदैन ।

(ख) माथिको छलफलका आधारमा अननुपातिक सङ्ख्याको परिभाषा लेख ।

$\frac{a}{b}$ को रूपमा व्यक्त गर्न नसकिने सङ्ख्यालाई अननुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ ।

अर्थात्, अननुपातिक सङ्ख्यामा नपर्ने सङ्ख्यालाई अननुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ ।

जस्तै : $\left\{..., \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{10}, \right\}$ आदि अननुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् ।

अनानुपातिक सङ्ख्यालाई Ir ले जनाइन्छ । त्यसैले Q र Ir अलग्गिएका समूह हुन् । अत: $Q \cap Ir = \varnothing$ हुन्छ ।

अभ्यास 15.1

1. **तल दिइएका सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या वा अनानुपातिक सङ्ख्या के हुन् ? छुट्याऊ ।**

(क) $\frac{3}{4}$ (ख) $\sqrt{2}$ (ग) $\sqrt{5}$ (घ) $\frac{2}{5}$ (ङ) $\frac{10}{20}$

(च) $\frac{1}{3}$ (छ) $\frac{25}{10}$ (ज) $\frac{40}{50}$ (झ) 0.735

2. के सबै आनुपातिक सङ्ख्याहरू अनानुपातिक सङ्ख्या हुन् ?
3. के सबै पूर्णाङ्क अनानुपातिक सङ्ख्या हुन् ?
4. के आनुपातिक सङ्ख्या र अनानुपातिक सङ्ख्या अलग्गिएका समूह हुन् ?

एकाइ 16 भिन्न र दशमलव (Fraction and Decimal)

16.1 भिन्नका शाब्दिक समस्या (Word Problems on Fraction)

हामीले कक्षा 6 मा भिन्नका धारणाहरू, भिन्नका जोड र घटाउ, गुणन र सरलीकरणका बारेमा छलफल गरिसकेका छौँ । अब हामी भिन्नका शाब्दिक समस्याहरूका बारेमा छलफल गर्दै छौँ ।

तलका उदाहरण अध्ययन गरी आफूले पनि अभ्यास गर ।

उदाहरण 1

दीपकले प्रत्येक महिना रु 12,000 कमाउँछ । उसको आम्दानीको तीन भागको एक भाग शिक्षामा खर्च गर्छ । त्यस्तै चार भागको एक भाग खानामा खर्च गर्छ । अब उसले जम्मा कति भाग खर्च गर्छ ? जम्मा कति रकम खर्च गर्छ ?

समाधान

दीपकको शिक्षामा खर्च तीन भागको एक भाग र खानामा खर्च चार भागको एक भाग हुन्छ । अब जम्मा खर्च निकाल्दा दुवै खर्च जोड्नुपर्छ ।

जम्मा खर्च = शिक्षाको खर्च + खानाको खर्च = $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

$=\frac{4x1+3x1}{12}$

$=\frac{4+3}{12}$

$\frac{7}{12}$ भाग

अब, 3 र 4 हरमा भएका सङ्ख्याको ल.स. = 12

अनि, प्रत्येक हरले ल.स. लाई भाग गरौँ र भागफलले अंशलाई गुणन गरौँ र सरल गरौँ ।

दीपकले जम्मा 12 भागको 7 भाग खर्च गरेको रहेछ । यसर्थ उसले आफ्नो आम्दानीको $\frac{7}{12}$ भाग खर्च गर्छ अब दीपकको जम्मा वास्तविक खर्च = रु. 12,000 को $\frac{7}{12}$ = रु 12,000x$\frac{7}{12}$ = रु. 7000 । यसर्थ दीपकको जम्मा खर्च = रु. 7000 हुन्छ ।

उदाहरण 2

एउटा कक्षाका 42 जना विद्यार्थीहरूमध्ये तिन भागको दुई भाग केटा र बाँकी केटी थिए भने केटी कति जना रहेछन् ? पत्ता लगाऊ ।

समाधान

तरिका 1

यहाँ, केटाको सङ्ख्या = जम्मा विद्यार्थीको $\frac{2}{3}$ भाग छ, त्यसैले केटाको वास्तविक सङ्ख्या = 42 जनाको $\frac{2}{3}$ भाग = 42 जना x$\frac{2}{3}$ = 28 जना ।

यसर्थ जम्मा केटा 28 जना रहेछन् ।

अब, केटीको सङ्ख्या = जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या − केटाको सङ्ख्या = (42-28) जना = 14 जना

तसर्थ, केटी 14 जना रहेछन् ।

तरिका 2

यहाँ केटाको सङ्ख्या = जम्मा विद्यार्थीको $\frac{2}{3}$ भाग छ । सो कक्षामा केटा र केटीको सङ्ख्याको योगफल बराबर पूरा विद्यार्थी सङ्ख्या हुन्छ । वा 1 भाग हुन्छ । त्यसैले, केटीको सङ्ख्या = $1-\frac{2}{3}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$ भाग

अब, केटीको सङ्ख्या = 42 जनाको $\frac{1}{3}$ भाग = 42 x $\frac{1}{3}$ = 14 जना

उदाहरण 3

आइतेलाई उसको बुबाले रु. 6,000 दिनुभयो । उसले तिन भागमा एक भागको किताब किन्यो । चार भागमा एक भागको कपडा किन्यो । पाँच भागमा एक भागको यात्रा गरी खर्च गऱ्यो भने कति रकम बचत गरेछ ?

अथवा

आइतेलाई उसको बुबाले रु. 6,000 दिनुभयो । उसले $\frac{1}{3}$ भागको किताब किन्यो । $\frac{1}{4}$ भागको कपडा किन्यो । $\frac{1}{5}$ भागको यात्रा गरी खर्च गऱ्यो भने कति रुपियाँ बचत गरेछ ?

समाधान

यहाँ, आइतेसँग भएको जम्मा रुपियाँ = रु. 6,000

किताब किन्न खर्च = $\frac{1}{3}$ भाग, कपडा किन्न खर्च = $\frac{1}{4}$ भाग र यात्रा गरेर खर्च = $\frac{1}{5}$ भाग

जम्मा खर्च = $(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})$ भाग = $\frac{20+15+12}{60}$ भाग = $\frac{47}{60}$ भाग

उसको बचत = $1-\frac{47}{60}$ भाग = $\frac{1\times60-47}{60}$ भाग = $\frac{60-47}{60}$ भाग = $\frac{13}{60}$ भाग

आइतेको बचत रुपियाँ = रु. 6000 को $\frac{13}{60}$ भाग = रु. 6000 x $\frac{13}{60}$ = रु. 1300

तसर्थ आइतेले जम्मा रु. 1300 बचाएछ ।

उदाहरण 4

सञ्जु, अञ्जु र सन्दीपले जन्मदिनको अवसरमा एउटा केक किनेछन् । सञ्जुले $\frac{1}{2}$ भाग, अञ्जुले $\frac{1}{3}$ भाग र सन्दीपले $\frac{1}{6}$ भाग खाएछन् । सबैभन्दा धेरै केक कसले खाएछ ?

समाधान : यहाँ दिइएअनुसार, सन्जुले खाएको $\frac{1}{2}$ भाग, अञ्जुले खाएको $\frac{1}{3}$ भाग र सन्दीपले खाएको $\frac{1}{6}$ भाग छ ।

अब तीनै जनाको भिन्नको हरमा भएका अङ्कको ल.स. निकालौँ । ल.स. = 6

अब सबै भिन्नको हर 6 बनाऔँ :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

अब अंशमा सबैभन्दा ठुलो 3 भएकोले $\frac{1}{2}$ भाग खाने सञ्जुले सबभन्दा धेरै केक खाइन्छन् ।

अभ्यास 16.1

1. जाडो महिनाको एक दिन कक्षा 7 का जम्मा 70 जना विद्यार्थीमध्ये तिन भागको एक भाग मात्र उपस्थित भएछन् भने कति भाग अनुपस्थित भएछन् ? पत्ता लगाऊ ।
2. प्रगति शिक्षा सदनमा कक्षा 7 मा जम्मा 42 जना विद्यार्थी थिए । 24 जना केटा थिए भने केटा कति भाग थिए ? केटी कति भाग थिए ? पत्ता लगाऊ ।
3. सुजनको मासिक आन्दानी रु. 9,000 छ । उसले $\frac{1}{5}$ भाग खाजामा खर्च गर्छ । $\frac{3}{10}$ भाग कपडामा खर्च गर्छ । $\frac{2}{5}$ भाग यातायातमा खर्च गर्छ । कति भाग बचत गर्छ र कति रुपियाँ बचत गर्छ ? पत्ता लगाऊ ।
4. बुटवल औद्योगिक मेलामा कमलाले आफूसँग भएको रुपियाँको $\frac{1}{5}$ भाग मनोरञ्जनमा खर्च गरिन् । $\frac{1}{2}$ भाग खानाको लागि खर्च गरिन् । $\frac{3}{10}$ भाग लत्ता कपडामा खर्च गरिन् । सबैभन्दा धेरै कुन शीर्षकमा खर्च गरेकी रहिछन् ? पत्ता लगाऊ ।
5. कुनै सङ्ख्याको $\frac{3}{5}$ भाग 90 हुन्छ भने सो सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।
6. कुनै रुपियाँको $\frac{4}{5}$ भाग रु. 600 हुन्छ भने $\frac{3}{4}$ भाग बराबर कति हुन्छ ? पत्ता लगाऊ ।
7. राष्ट्रिय वाणिज्य बैङ्कमा सुन्दरप्रसादले 10 प्रतिशत प्रतिवर्षका दरले एक वर्षको ब्याज बुझाउँदा रु. 30000 तिर्नुपर्‍यो । उसले जम्मा कति रकम ऋण लिएको रहेछ ?
8. एउटा पानी ट्याङ्कीको $\frac{1}{5}$ भाग भर्दा 700 लिटर पानी जम्मा भएछ भने ट्याङ्कीको क्षमता कति रहेछ ? पत्ता लगाऊ ।
9. प्रकृतिकी आमाले उनलाई दिनहुँ एउटा बट्टाको $\frac{3}{10}$ भाग हर्लिक्स खुवाउनुहुन्छ । 30 बट्टा हर्लिक्सले उनलाई जम्मा कति दिनलाई पुग्ला ? पत्ता लगाऊ ।

16.2 दशमलवको सरलीकरण र शाब्दिक समस्याहरू (Simplification and Word Problems on Decimal)

उदाहरण 1

सरल गर : 5.24+3.01 - 1.92 -5.67

समाधान

5.24+3.01 - 1.92 -5.67

= 8.25-7.59

= 0.66

(1) जोड चिह्न, जोड चिह्न र घटाउ चिह्न, घटाउ चिह्न मिलाएर एकै ठाउँमा राख्ने

	चरण 1		चरण 2
(२)	5.24	1.92	8.25
	+ 3.01	+ 5.67	-7.59
	8.25	7.59	0.66

उदाहरण 2 **सरल गर :**

समाधान

(64.32 - 40.64) x 2.22

= (64.32 - 40.64) x2.22

= 23.68 x 2.22

= 52.5696

```
   23.68
 x  2.22
 -------
    4736
   4736
  4736
 -------
 52.5606
```

उदाहरण 3

आयतकार रुमालको लम्बाइ 5.2 cm र चौडाइ 4.8 cm रहेछ भने रुमालको परिमिति निकाल :

समाधान

आयतकार रुमालको परिमिति 2(ℓ+b) हुन्छ ।

अब, लम्बाइ (ℓ) = 5.2 cm र चौडाइ (b) = 4.8 cm छ ।

त्यसैले रुमालको परिमिति : = 2(ℓ+b)

= 2(5.2cm+4.8cm)

= 20cm

उदाहरण 4

एउटा 0.45 m अर्धव्यास भएको साइकलको पाङ्ग्राले 100 चक्कर लगाउँदा कति दुरी पार गर्छ ? पत्ता लगाऊ । (π = 3.14)

समाधान

यहाँ साइकलको पाङ्ग्राले एक चक्कर लगाउनु भनेको परिधि निकाल्नु हो । त्यसैले, पाङ्ग्राको एक चक्कर

= $2\pi r$

= 2π x 0.45m

= 2 x 3.14 x 0.45m

= 6.28 x 0.45 m

= 2.826 m

पाङ्ग्राले एक चक्कर लगाउँदा 2.826 m दुरी पार गर्छ । 100 चक्कर लगाउँदा =100 x 2.826m

= 282.6m दुरी पार गर्छ ।

अभ्यास 16.2

1. सरल गर :

(क) (7.87 -12.09) x (-3.44)

(ख) (1.44 ÷ 1.2) + 6.2

(ग) {(6.48 ÷ 2.7) x 0.05 + 8.32} - 4.009

(घ) 2(12.75 - 6.28) x 2(5.13 - 4.73) + 6.63

(ङ) 5.7 - 4.-37 + (1.07 + 0.68) x 0.21

(च) 64.27 + 1.1 + 14.24 + 6.37 - 44.44

(छ) $\frac{0.44+5.76+3.24}{2.44+6.32-3.32}$

(ज) $\frac{5.8\times5.8-4.2\times4.2}{5.8-4.2}$

(झ) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)\times6.25-15.39+61.09$

2. त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x आधार x उचाइ हुन्छ । यदि एउटा त्रिभुजको आधार 25.75cm र उचाइ 30.15 cm भए क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

3. एउटा आयताकार बगैंचा 22.65m लामो र 15.65m चौडा छ । सो बगैंचाको परिमिति पत्ता लगाऊ ।

4. एउटा मोटरसाइकलको पाङ्ग्राको परिधि 3.45m छ । 80 चक्कर लगाउँदा पाङ्ग्राले जम्मा कति दुरी पार गर्छ ।

5. वर्गाकार टेबुलको परिमिति 242 मिटर छ । टेबुलको लम्बाइ पत्ता लगाऊ ।

6. आयतकार जग्गाको क्षेत्रफल 215.66m^2 छ । यदि सो जग्गा 67.35m लामो भए कति फराकिलो होला ?

7. एउटा भोजमा 12.5cm व्यास भएको वृत्ताकार थालको प्रयोग गरिएको थियो । यदि एउटा थालसँग अर्को थाल जोडी लहरै मिलाएर राख्दा 9.375m दुरी ढाकिएछ । त्यो भोजमा जम्मा कति थाल प्रयोग गरिएको थियो ? पत्ता लगाऊ ।

एकाइ 17

अनुपात, समानुपात र प्रतिशत (Ratio, Proportion and Percent)

17.1 प्रतिशतका सरल समस्याहरू (Simple Problems on Percentage)

प्रतिशत भनेको प्रति सयमा हिसाब गर्नु हो ।

अत: हरमा 100 भएको भिन्न नै प्रतिशत हो ।

जस्तै : 20% भनेको 100 मा 20 अर्थात $\frac{20}{100}$ हुन्छ ।

75% भनेको 100 मा 75 अर्थात $\frac{75}{100}$ हुन्छ ।

त्यस्तै, $\frac{12}{100} = \frac{12}{100} \times 100\% = 12\%$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$

भिन्नलाई प्रतिशतमा बदल्दा 100 ले गुणन गरी % चिह्न राख्नुपर्छ । प्रतिशतलाई भिन्नमा बदल्दा 100 ले भाग गरी % लाई हटाउनुपर्छ ।

उदाहरण 1

रु. 150 को 20% कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ रु. 150 को 20%

रु. 150 x $\frac{20}{100}$ (% लाई भिन्नमा बदल्दा 100 ले भाग गरेको)

= रु. 30

अत: रु. 150 को 20% भनेको रु. 30 हुन्छ ।

उदाहरण 2

20 को 15 कति % हुन्छ ?

समाधान

यहाँ 20 भागमध्ये 15 भाग छ । त्यसैले प्रतिशतमा व्यक्त गर्दा $\frac{15}{20} \times 100\%$ हुन्छ ।

20 को 15 लाई भिन्नमा लेख्दा $\frac{15}{20}$ हुन्छ ।

$\frac{15}{20}$ लाई % मा बदल्दा = $\frac{15}{20} \times 100\%$ = 75 %

अत: 20 को 15 भनेको 75% हुन्छ ।

अर्को तरिका,

आवश्यक प्रतिशतलाई x% मान्दा

20 को x% = 15

अथवा, $20 \times \frac{x}{100} = 15$

अथवा, $\frac{x}{5} = 15$

अथवा, x = 15 x 5

$\therefore$ x = 75%

त्यसैले, 20 को 75 % = 15 हुन्छ ।

उदाहरण 3

कति रुपियाँको 25% ले रु 350 हुन्छ ?

समाधान

यहाँ, आवश्यक रुपियाँलाई x मानौँ ।

x को 25% = रु. 350

अथवा, $x \times \frac{25}{100}$ = रु. 350

अथवा, $\frac{x}{4}$ = रु. 350

अथवा, x = 4 x रु. 350

x = रु. 1400

अत : रु. 1400 रुपियाँको 25% ले रु. 350 हुने रहेछ ।

उदाहरण 4

पुनमले 20 पूर्णाङ्कको परीक्षामा 16 अङ्क प्राप्त गरिन् भने उनले कति % प्राप्त गरिछन् ?

समाधान

माथिको समस्यालाई गणितीय भाषामा लेख्दा, $\frac{16}{20}$ हुन्छ ।

$\frac{16}{20}$ लाई % मा बदल्दा $\frac{16}{20} \times 100\% = 80\%$ हुन्छ ।

अत: पुनमले 80% अङ्क प्राप्त गरिछन् ।

उदाहरण 5

प्रह्लादले आफूसँग भएको रु. 2000 मध्ये 22% खर्च गरेछन् भने कति बचाएछन् ?

समाधान

यहाँ, प्रह्लादले गरेको खर्च रुपियाँ रु. 2000 को 22% = रु. 2,000 x $\frac{22}{100}$ = रु. 440

अब, प्रह्लादको बचत रुपियाँ = जम्मा आम्दानी – खर्च = रु. 2000 - रु. 440 = रु. 1560

अर्को तरिका,

प्रह्लादको बचत % = 100 % - 22% = 78%

प्रह्लादको बचत रुपियाँ = रु 2000 को 78% = रु. $2000 \times \frac{78}{100}$ = रु. 1560

अभ्यास 17.1

1. **मान पत्ता लगाऊ :**

   (क) रु. 50 को 4% (ख) 99 को 15% (ग) 560kg को 80%

   (घ) 875 ltr. को 60% (ङ) 1560 विद्यार्थीको 75%

2. **प्रतिशतमा बदल :**

   (क) 120 को 40 (ख) 246 को 123 (ग) 30 जनामा 18 जना

   (घ) 25km मा 5km (ङ) रु. 650 मा रु. 32.5

3. जाडो महिनाको कुनै दिन 40 जना विद्यार्थी मध्ये 24 जना मात्र उपस्थित भएछन् ।

   (क) कति प्रतिशत उपस्थित भएछन् ? (ख) कति प्रतिशत अनुपस्थित भएछन् ?

4. एउटा कार्यालयमा पुरुष कामदार 32 जना र महिला कामदार 18 जना रहेछन् ।

   (क) पुरुष कामदार कति प्रतिशत रहेछन् ? (ख) महिला कामदार कति प्रतिशत रहेछन् ?

5. कक्षा 6 को अन्तिम परीक्षामा सुमनले 750 पूर्णाङ्कमा 90% अङ्क प्राप्त गरेका रहेछन् । उनले कति अङ्क प्राप्त गरेछन् ?

6. दिपकको 1 महिनाको आम्दानी रु. 12750 मध्ये 20% खर्च गरेछन् भने कति रकम बचाएछन् ?

7. सुदेशको तलब रु. 1200 बाट बढेर रु. 1500 पुगेछ । सुदेशको तलब कति प्रतिशतले बढेछ ?

8. निर्मलको मासिक आम्दानी रु. 14760 छ । उनले 20% शिक्षामा, 10% यातायातमा र 25% घर भाडामा खर्च गर्दछन् । जम्मा कति रुपियाँ बचत गर्छन् ?

9. सुन्तलीको तलब 10% वृद्धि भएपछि रु. 22000 भएछ भने सुरुमा कति तलब रहेछ ?

17.2 अनुपात र समानुपातका सरल समस्याहरू (Simple Problems on Ratio and Proportion)

1. अनुपात (Ratio)

के अनुपातको परिभाषा भन्न सक्छौ ?

12 र 15 को अनुपात लेख्ने प्रयास गर,

हो, 12 र 15 को अनुपात $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ = 4:5 हुन्छ ।

दुईओटा उस्ताउस्तै परिमाणहरू a र b को अनुपात $\frac{a}{b}$ वा a:b हुन्छ । जहाँ a र b लाई क्रमश : a पहिलो पद अंश (antecedent) र b लाई दोस्रो पद हर (consequent) भनिन्छ ।

16 र 20 को अनुपात $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ = 4:5 हुन्छ ।

20 र 25 को अनुपात $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ = 4:5 हुन्छ ।

$\frac{12}{15}, \frac{16}{20}$ र $\frac{20}{25}$ को अनुपात एउटै भएकाले $\frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25}$ ..... आदि समतुल्य भिन्नहरू हुन् ।

उदाहरण 1

18 लिटर दुधमा 15 लिटर शुद्ध दुध र बाँकी पानी मिसाइएको रहेछ भने

(क) पानी र दुधको अनुपात कति होला ? (ख) पानी र शुद्ध दुधको अनुपात कति होला ?

समाधान

18 लिटर दुधमा 15 लिटर शुद्ध दुध छ ।

पानीको मात्रा = 18 लिटर - 15 लिटर = 3 लिटर

(क) पानी र दुधको अनुपात

$$= \frac{3 \text{ लिटर}}{18 \text{ लिटर}} = \frac{1}{6} = 1 : 6$$

(ख) पानी र शुद्ध दुधको अनुपात

$$= \frac{3 \text{ लिटर}}{15 \text{ लिटर}} = \frac{1}{5} = 1:5$$

उदाहरण 2

सुजन र सिफललाई आमाले 90 रुपियाँ 2:3 को अनुपातमा बाँडेर लिन भन्नुभयो भने प्रत्येकले कति कति रुपियाँ पाएछन् ?

समाधान

यहाँ, 90 रुपियाँलाई लगाउनुपर्ने भाग = 2 + 3 = 5 भाग

मानौँ, सुजनले प्राप्त गर्ने रुपियाँ = $2x$ सिफलले प्राप्त गर्ने रुपियाँ = $3x$

अब, $2x + 3x$ = रु. 90

अथवा, $5x$ = रु. 90

अथवा, x = रु. $\frac{90}{5}$

$\therefore$ x = रु. 18

अब, सुजनले पाएको रकम

= $2x$ =2 x रु. 18 = रु. 36 हुन्छ ।

सिफलले पाएको रकम

= $3x$ = 3 x रु. 18 = रु. 54

अर्को तरिका,

सुजनले प्राप्त गर्ने रकम

= रु. 90 को $\frac{2}{5}$ भाग

= रु. $90 \times \frac{2}{5}$ = रु. 36

सिफलले प्राप्त गरेको रकम = रु. 90 को $\frac{3}{5}$ भाग

= रु. $90 \times \frac{3}{5}$ = रु. 54

उदाहरण 3

मीना र पेम्बाको मासिक आम्दानीको अनुपात 3:4 छ । यदि पेम्बाको मासिक आम्दानी रु. 2,400 भए मीनाको मासिक आम्दानी कति होला ?

समाधान

यहाँ, मीनाको मासिक आम्दानी रु. x मानौँ ।

मीनाको मासिक आम्दानी र पेम्बाको मासिक आम्दानीको अनुपात =3:4

अथवा, रु. $\frac{x}{2400} = \frac{3}{4}$

अथवा, $x = \frac{3}{4} \times 2400$ = (3 x 600) = 1800

$\therefore$ x = रु. 1800

त्यसैले मीनाको मासिक आम्दानी रु. 1800 रहेछ ।

2. समानुपात (Proportion)

दीपेन्द्रले गणितको 30 पूर्णाङ्कको परीक्षामा 25 अङ्क प्राप्त गरेछन् । त्यस्तै गरी विज्ञानको 24 पूर्णाङ्कको परीक्षामा 20 अङ्क प्राप्त गरेछन् ।

अब, दीपेन्द्रले गणितमा प्राप्त गरेको अङ्कको अनुपात = $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

दीपेन्द्रले विज्ञानमा प्राप्त गरेको अङ्कको अनुपात = $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

अत : $\frac{25}{30} = \frac{20}{24}$ हुन्छ ।

दुईओटा अनुपातहरू बराबर भएकाले यी अनुपातलाई समानुपात भनिन्छ । अब, 25 लाई पहिलो पद, 30 लाई दोस्रो पद, 20 लाई तेस्रो पद र 24 लाई चौथो पद भनिन्छ ।

> चारओटा उस्तै प्रकारका परिमाण वा सङ्ख्याहरू a, b, c र d को अनुपातमा a र b को अनुपात c र d को अनुपातसँग बराबर भएको अवस्थालाई समानुपात (proportion) भनिन्छ ।
>
> यसलाई $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ वा a:b::c:d लेखिन्छ ।
>
> वा, a x d = b x c हुन्छ ।

उदाहरण 4

के 3, 4, 9 र 12 समानुपातमा छन् ?

समाधान

यहाँ, 3, 4, 9 र 12 लाई समानुपातको रूपमा लेख्दा,

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

अथवा, $3 \times 12 = 4 \times 9$

अथवा, 36 = 36

दुवैतिर बराबर भएकाले 3, 4, 9 र 12 समानुपातमा छन् ।

उदाहरण 5

4, 7, 20 र x समानुपातमा भए चौथो पद x को मान पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, *4, 7, 20* र x समानुपातमा भएकाले,

यदि पहिलो, दोस्रो, तेस्रो र चौथो पद क्रमशः $\frac{4}{7} = \frac{20}{x}$ हुन्छ ।

अथवा, $4 \times X = 7 \times 20$

अथवा, $x = \frac{7 \times 20}{4}$

$\therefore X = 35$

अत : चौथो पद $x = 35$ हुन्छ ।

उदाहरण 6

10 ओटा सिसाकलमको मूल्य रु. 30 पर्छ भने कतिओटा सिसाकलमको मूल्य रु. 9 पर्छ ?

समाधान : यहाँ, आवश्यक सिसाकलम = x मानौँ

समानुपातको रूपमा लेख्दा,

$\frac{10}{30} = \frac{x}{9}$

अथवा, $10 \times 9 = 30 \times X$

अथवा, $\frac{10 \times 9}{30} = x$

अथवा, $X = 3$

अतः आवश्यक सिसाकलमको सङ्ख्या = 3

अभ्यास 17.2

1. **तलका प्रत्यकको अनुपात लेख र लघुत्तम पदमा रूपान्तरण गर :**

   (क) 10cm र 2m (ख) रु. 18 र रु. 24 (ग) 540g र 2kg

   (घ) 8 घण्टा र 2 दिन (ङ) 250mℓ र 1ℓ

2. 36 लिटर दुधको मिश्रणमा 30 लिटर शुद्ध दुध र बाँकी पानी मिसिएको छ भने पानी र दुधको मिश्रणको अनुपात निकाल ।

3. रु. 250 लाई राम र सीताले क्रमशः 2:3 को अनुपातमा बाँड्दा प्रत्येक व्यक्तिले कति कति रुपियाँ प्राप्त गर्दछन् होला ?

4. दुईओटा सङ्ख्याहरूको अनुपात 5:6 छ । पहिलो सङ्ख्या 90 भए दोस्रो सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

5. शोभा र किरणको मासिक आम्दानीको अनुपात 5:9 छ । यदि किरणको मासिक आम्दानी रु. 18,000 भए शोभाको मासिक आम्दानी कति होला ?

6. **तल दिइएका चारओटा पदहरू समानुपातमा भए x को मान निकाल :**

   (क) 2, 4, 6, x (ख) 6, 10, x, 5 (ग) 18, x, 30, 45

   (घ) 50, 150, x, 15 (ङ) x, 40, 30, 20

7. आदर्श मा.वि.मा शिक्षक र महिला शिक्षकको सङ्ख्याको अनुपात 3:4 छ । यदि शिक्षकको सङ्ख्या 12 भए महिला शिक्षकको सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

8. 7 ओटा क्याल्कुलेटरको मूल्य रु. 1750 पर्छ भने 12 ओटा क्याल्कुलेटरको मूल्य कति पर्ला ?

9. एउटा बस 160 km यात्रा गर्न 4 घण्टा लगाउँछ भने 6 घण्टामा कति यात्रा पार गर्छ होला ?

10. आदर्श मा.वि.को छात्रावासमा 600 जना विद्यार्थीका लागि 45 दिनको खाना छ । 450 जना विद्यार्थीका लागि सो खाना कति दिनलाई पुग्ला ?

एकाइ 18

नाफा र नोक्सान (Profit and Loss)

18.1 प्रतिशतसहितका नाफा र नोक्सानका समस्याहरू

हामीले कक्षा 6 मा प्रतिशत समावेश नभएका नाफा र नोक्सानका समस्याका बारेमा छलफल गरिसकेका छौं । अब हामी प्रतिशतसहितका नाफा र नोक्सानका समस्यामा छलफल गर्ने छौं ।

तलको प्रश्नमा आधारित प्रस्तुतिको अध्ययन गरी छलफल गर :

एक जना घडी व्यापारीले 10 ओटा घडी प्रत्येकलाई रु. 75 का दरले किन्यो र रु. 80 का दरले सबै घडी बेच्यो । उसलाई नाफा वा नोक्सान के भयो होला ?

यहाँ, एउटा घडीको क्रय मूल्य (C.P.) = रु. 75

10 ओटा घडीको क्रय मूल्य(C.P.) = रु 75 × 10 = रु. 750

एउटा घडीको विक्रय मूल्य (S.P. = रु. 80

10 ओटा घडीको विक्रय मूल्य (S.P.) = रु. 80 × 10 = रु. 800

यहाँ, क्रय मूल्यभन्दा विक्रय मूल्य धेरै भएकाले उक्त घडी व्यापारीलाई नाफा हुन्छ ।

अब, सूत्रानुसार, नाफा = विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य = रु. 800 - रु. 750 = रु. 50

अत: सो व्यापारीलाई जम्मा रु. 50 नाफा भएछ ।

माथिको छलफलबाट नाफा र नोक्सानको सूत्र पत्ता लगाई लेख । तलको सूत्रहरूसँग तुलना गरी हेर ।

1. विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य भएमा नाफा हुन्छ ।

   नाफा = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

2. क्रय मूल्य > विक्रय मूल्य भएमा नोक्सान हुन्छ ।

   नोक्सान = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य

उक्त घडी व्यापारीलाई कति प्रतिशत नाफा भयो होला ?

व्यापारीलाई प्राप्त नाफा = रु 50

उसको सबै घडीको क्रय मूल्य = रु 750

उसले रु. 750 मा रु. 50 नाफा गऱ्यो । यस भनाइलाई प्रतिशतमा बदल्दा,

नाफालाई भिन्नमा लेख्दा $\frac{50}{750}$ हुन्छ ।

नाफालाई प्रतिशतमा बदल्दा $\frac{50}{750}$x100%

जम्मा नाफा प्रतिशत = $\frac{50}{750} \times 100\% = \frac{20}{3}\% \quad = 6\frac{2}{3}\%$

अर्थात्, रु. 750 को रु. 50 भनेको $6\frac{2}{3}\%$ हुन्छ ।

माथिको छलफल र प्रस्तुतिका आधारमा नाफा र नोक्सान प्रतिशत तलको सूत्रहरूबाट पत्ता लगाइन्छ :

1. नाफा % = $\frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्रय मूल्य}}$ x 100 %

2. नोक्सान % = $\frac{\text{वास्तविक नोक्सान}}{\text{क्रय मूल्य}}$ x 100 %

उदाहरण 1

यदि कुनै घडीको क्रय मूल्य = रु. 500, नाफा % = 5% भए विक्रय मूल्य पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, उक्त घडीको क्रय मूल्य रु. 500 मा नाफा 5% निकालेर जोड्नु नै विक्रय मूल्य हुन्छ ।

अब, वास्तविक नाफा = रु. 500 को 5% = रु $500 \times \frac{5}{100}$ = रु. 25

सूत्रानुसार क्रय मूल्य = क्रय मूल्य + नाफा = रु. 500 + रु. 25 = रु. 525

त्यसैले उक्त घडीको विक्रय मूल्य = रु. 525

उदाहरण 2

राजुले एउटा टेलिभिजन रु. 13,500 मा किनेर रु. 12,195 मा बेच्दा उसलाई कति प्रतिशत नोक्सान हुन्छ ?

समाधान

यहाँ दिइएअनुसार एउटा टेलिभिजनको क्रय मूल्य = रु. 13,550 र टेलिभिजनको विक्रय मूल्य = रु. 12,195

सूत्रानुसार जम्मा नोक्सान = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य = रु. 13,550 - रु. 12,195 = रु. 1,355

अब,

नोक्सान % = $\frac{\text{वास्तविक नोक्सान}}{\text{क्रय मूल्य}}$ x 100%

= $\frac{\text{रु. } 1355}{\text{रु. } 13,550}$ x 100 % = 10 %

तसर्थ, राजुलाई उक्त टेलिभिजनमा जम्मा 10% नोक्सान हुन्छ ।

उदाहरण 3

मोबाइल पसलेले एउटा मोबाइल रु. 3750 मा बेचेर 25% नाफा गरेछ भने

(क) क्रय मूल्य कति रहेछ ?

(ख) 30% नाफा गर्न कतिमा बेच्नुपर्थ्यो ?

समाधान : यहाँ, मोबाइलको विक्रय मूल्य = रु. 3750 र मोबाइलमा नाफा % = 25% छ ।

(क) मोबाइलको क्रय मूल्य = x (मानौँ)

अब, सूत्रानुसार विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + नाफा हुन्छ ।

त्यसैले, रु. 3750 = $x + x$ को 25 %

अथवा, रु. 3750 = $x + x \times \frac{25}{100}$

अथवा, रु. 3750 = $x + \frac{x}{4}$

अथवा, रु. 3750 = $\frac{4x + x}{4}$

अथवा, रु. 3750 x 4 = 5x

अथवा, रु. $x = \frac{3750 \times 4}{5}$

अथवा, रु. x = 3000

अत: उक्त मोबाइल रु. 3000 मा किनेको रहेछ ।

(ख) 30% नाफा गर्नका लागि बेच्नुपर्ने मूल्य (विक्रय मूल्य) निकाल्दा,

सूत्रानुसार, विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + नाफा

= रु 3000 + रु. 3000 को 30%

= रु. 3000 + रु 3000 x $\frac{30}{100}$

= रु. 3000 + रु. 900

= रु. 3900

अत : 30% नाफा गर्न सो मोबाइल रु. 3900 मा बेच्नुपर्छ ।

अभ्यास 18.1

1. **तल दिइएको अवस्थाहरूमा नाफा वा नोक्सान प्रतिशत के हुन्छ ? पत्ता लगाऊ :**

क्र.सं.	क्रय मूल्य (रु.)	विक्रय मूल्य (रु.)
(क)	300	330
(ख)	550	495
(ग)	640	832
(घ)	720	540
(ङ)	1200	1500

2. एउटा व्यापारीले एउटा दराज रु. 3950 मा किनेर 10% नाफा गरी बेच्दा दराज कति मूल्यमा बिक्री गर्नुपर्छ ।

3. एउटा फलफूल पसलेले प्रतिकिलो रु. 12 का दरले 15 किलो सुन्तला किनेछ । रु. 15 का दरले सबै सुन्तला बेच्दा पसलेलाई कति प्रतिशत नाफा हुन्छ ?

4. मुनाले एउटा क्यामरा रु. 1300 मा किनिन् । उनले 15% नोक्सानमा बेचिन् । मुनाले क्यामेरालाई कतिमा बेचिन् होला ?

5. राजेशले 100 ओटा बल्बहरू प्रत्येकलाई रु. 25 का दरले किनेछन् । पाकेट खोली हेर्दा 20 ओटा बल्बहरू फुटेका रहेछन् । बाँकी बल्बहरू रु. 30 का दरले बेच्दा राजेशलाई नाफा वा नोक्सान प्रतिशत के भयो ? पत्ता लगाऊ ।

6. एउटा टेलिभिजनलाई रु. 16,000 मा किनेर 15% नाफा गरी बेच्दा कतिमा बेच्नुपर्ला ?

7. एक जना पुस्तक पसलेले 250 ओटा कापी प्रत्येकको रु. 25 का दरले किनेछ । 30 ओटा कापी मुसाले नष्ट गरिदिएछन् । अब, बाँकी कापीलाई प्रत्येकको रु. 35 का दरले बेच्दा उक्त पसलेलाई नाफा वा नोक्सान के भएछ ? प्रतिशतमा पत्ता लगाऊ ।

8. रु. 1,500 मा बेचेको एउटा साडीमा 25% नाफा भएछ भने उक्त साडीको क्रय मूल्य कति रहेछ ?

9. एउटा ज्याकेट 12% नोक्सान खाएर रु. 1,540 बेच्यो भने सो ज्याकेट कतिमा किनिएको रहेछ ? यदि 5% नाफा गर्न सो सामान कतिमा बेच्नुपर्‍यो ?

10. चिया पसले साहुनी ज्योतिले 150 ओटा ग्लास किनेकी रहिछन् । तिनीहरूमध्ये 50 ओटा फुटेछन् । बाँकी ग्लासहरूलाई प्रत्येकको रु. 75 मा बेच्दा उनलाई 25% नाफा भएछ भने 150 ओटा ग्लासलाई कतिमा किनेकी रहिछन् ?

एकाइ 19

ऐकिक नियम (Unitary Method)

19.1 प्रत्यक्ष परिवर्तन (विचरण) मा आधारित ऐकिक नियमका समस्याहरू

प्रत्यक्ष परिवर्तन (Direct Variation)

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तलको तालिकामा सिसाकलम र मूल्य दिइएको छ । उक्त तालिका पूरा गर :

सिसाकलमको सङ्ख्या	5	1	3	7	10
मूल्य रु.	30	?	?	?	?

माथि दिइएको तालिकामा सिसाकलमको सङ्ख्या र मूल्य प्रत्यक्ष परिवर्तनसँग सम्बन्धित छन् ।

माथिको तालिकाका आधारमा 5 ओटा सिसाकलमको मूल्य रु. 30 हुँदा एउटा सिसाकलमलाई कति पर्छ ? पत्ता लगाऊ ।

ऐकिक नियम प्रयोग गरी मूल्य निकाल्दा,

5 ओटा सिसाकलमको मूल्य = रु. 30

एउटा (1 ओटा) सिसाकलमको मूल्य = रु. $\frac{30}{5}$ = रु. 6 हुन्छ ।

3 ओटा सिसाकलमको मूल्य = रु. 6 x 3 = रु. 18 पर्छ ।

> हो, 5 ओटा सिसाकलमलाई रु. 30 पर्छ भने एउटा सिसाकलमलाई थोरै (कम) पर्छ त्यसैले रु. 30 लाई 5 ले भाग गर्दा एउटा सिसाकलमको मूल्य आउँछ ।
>
> 3 ओटा सिसाकलमको मूल्य एउटाको मूल्यभन्दा धेरै पर्छ, त्यसैले एउटाको मूल्यलाई सङ्ख्या 3 ले गुणन गर्नुपर्छ ।

(ख) 6 ओटा सिसाकलमको मूल्य कति पर्ला ?

यसरी मूल्य थोरै पर्छ वा कम हुन्छ भने भाग गर्नुपर्छ । धेरै पर्छ वा बढी हुन्छ भने गुणन गर्नुपर्छ ।

> दुई परिमाणहरूमा एउटामा भएको वृद्धि (वा कमी) ले अर्कोमा पनि त्यही अनुपातमा वृद्धि (वा कमी) हुन्छ भने त्यस्तो परिमाणलाई प्रत्यक्ष परिवर्तन विचरण (direct variation) भएको भनिन्छ ।

उदाहरण 1

12 ओटा सुन्तलाको मूल्य रु. 36 पर्छ भने,

(क) एउटा सुन्तलाको मूल्य कति पर्छ ?

(ख) 5 ओटा सुन्तलाको मूल्य कति पर्ला ?

(ग) 20 ओटा सुन्तलाको मूल्य कति पर्ला ?

समाधान

यहाँ 12 ओटा सुन्तलाको मूल्यभन्दा एउटा (1 ओटा) को मूल्य कम पर्छ। त्यसैले उक्त सुन्तलाको जम्मा मूल्यलाई सङ्ख्याले भाग गर्नुपर्छ ।

दिइएअनुसार, 12 ओटा सुन्तलाको मूल्य = रु. 36 पर्छ ।

एउटा (1 ओटा) सुन्तलाको मूल्य = रु. $\frac{36}{12}$ = रु 3 पर्छ ।

5 ओटाको मूल्य 1 ओटा सुन्तलाभन्दा बढी पर्छ त्यसैले सङ्ख्या 5 ले गुणन गर्नुपर्छ ।

5 ओटा सुन्तलाको मूल्य = रु. 3 x 5 = रु. 15

20 ओटा सुन्तलाको मूल्य = रु. 3 x 20 = रु 60 पर्छ ।

उदाहरण 2

5 लिटर पेट्रोलले एउटा कारमा 60 km यात्रा गर्न सकिन्छ । 36 km यात्रा गर्न कति लिटर पेट्रोल आवश्यकता पर्ला ?

समाधान

60km यात्रा गर्नुभन्दा 36km यात्रा गर्न कम पेट्रोल आवश्यकता पर्छ । त्यसैले यो प्रत्यक्ष परिवर्तन हो ।

60km यात्रा गर्न 5 लिटर पेट्रोल चाहिन्छ ।

1km यात्रा गर्न $\frac{5}{60}$ लिटर पेट्रोल चाहिन्छ ।

36km यात्रा गर्न $\frac{5}{60} \times 36 = 3$ लिटर पेट्रोल चाहिन्छ ।

अत: 36km यात्रा गर्न 3 लिटर पेट्रोल आवश्यकता पर्छ ।

19.2. अप्रत्यक्ष परिवर्तन/विचरण (Indirect Variation) मा आधारित ऐकिक नियमका समस्या

तलको तालिकामा 5 जना मानिसले गाई पालन व्यवसायको टहरो बनाउन 15 दिन लगाउँछन् भन्ने कुरा दिइएको छ । साथीसँग छलफल गरी तालिका भर :

मानिस (जना)	5	1	3
दिन	15	?	?

5 जना मानिसले एउटा उक्त टहरो बनाउन 15 दिन लाग्छ भने 1 जना मानिसले सो टहरो बनाउन धेरै दिन लाग्छ । त्यसैले दिनलाई मानिसको सङ्ख्याले गुणन गर्नुपर्छ ।

मानिस	5	1	3
दिन	15	5 x 15 = 75	?

त्यस्तै एक जनालाई 75 दिन लाग्छ भने 3 जनाले काम गर्दा टहरो बनाउन कम दिन लाग्छ ।

त्यसैले एक जनाले काम गर्ने दिनलाई मानिसको सङ्ख्याले भाग गर्नुपर्छ ।

मानिस	5	1	3
दिन	15	75	75 ÷ 3 = 25

अत: 3 जना मिलेर सो टहरो बनाउन 25 दिन लगाउँछन् ।

दुई परिमाणहरूमा एउटामा भएको वृद्धि वा कमीले अर्कोमा पनि त्यही अनुपातमा कमी वा वृद्धि हुन्छ भने त्यस्तो परिमाणलाई अप्रत्यक्ष परिवर्तन/विचरण भएको भनिन्छ ।

उदाहरण 3

12 जना मानिसले कुनै काम गर्न 20 दिन लगाउँछन् भने 16 जना मानिसले सोही काम पूरा गर्न कति दिन लगाउलान् ?

समाधान

12 जना मानिसबाट 16 जना मानिस वृद्धि भएको छ ।

12 जना मानिसले 20 दिन लगाउँदा 16 जना मानिसले कम दिन लगाउँछन् ।

एउटामा वृद्धि हुँदा अर्कामा कमी भएकोले यो अप्रत्यक्ष विचरण हो ।

12 जना मानिसले एक काम पूरा गर्न 20 दिन लगाउँछन् ।

1 जना मानिसले एक काम पूरा गर्न 20 x12 दिन लगाउँछन् ।

16 जना मानिसले एक काम पूरा गर्न $\frac{20 \times 12}{16}$ = 15 दिन लगाउँछन् ।

अत: 16 जना मानिसले सो काम पूरा गर्न 15 दिन लगाउँछन् ।

उदाहरण 4

एउटा छात्रावासमा राखिएको खाना कति दिनमा 180 जनाले सक्छन् जबकि 150 जनाले सो खाना सिध्याउन 60 दिन लगाउँछन् ।

समाधान

यहाँ, मानिसको सङ्ख्या बढ्दा खाना खाने दिन घट्छ ।

मानिसको सङ्ख्या घट्दा खाना खाने दिन बढ्छ ।

त्यसैले यो अप्रत्यक्ष विचरण हो ।

150 जनालाई खाना सिध्याउन 60 दिन लाग्छ ।

1 जनालाई खाना सिध्याउन 60 x 150 दिन लाग्छ ।

180 जनालाई खाना सिध्याउन $\frac{60 \times 150}{180}$ = 50 दिन लाग्छ ।

अत: 180 जनालाई सो खाना सिध्याउन 50 दिन चाहिन्छ ।

अभ्यास 19.1

तलका प्रश्नको उत्तर लेख :

1. तलका प्रत्येक उदाहरणहरू प्रत्यक्ष वा अप्रत्यक्ष परिवर्तनमध्ये के हुन् ? छुट्याऊ ।
   (क) हात र औँलाको सङ्ख्या
   (ख) बराबर क्षेत्रफल भएको आयतको लम्बाइ र चौडाइ
   (ग) मानिसको सङ्ख्या र काम गर्न लाग्ने दिन
   (घ) खानेपानीको पाइपको पानी भर्ने क्षमता र लाग्ने समय
   (ङ) गाडीको गति र निश्चित दुरी पार गर्न लाग्ने समय
2. 3 K.g. चिनीको मूल्य रु. 120 पर्छ भने 5 Kg. चिनीको मूल्य कति पर्छ ।
3. 15 ओटा सुन्तलाको मूल्य रु. 75 पर्छ भने 12 ओटा सुन्तलाको मुख्य कति पर्छ ?
4. काठमाडौँको बागबजारको एउटा पसलको 4 महिनाको भाडा रु. 8,000 हुन्छ । 1 वर्षको भाडा जम्मा कति तिर्नुपर्ला ?
5. एउटा मोटरसाइकल 12 लिटर पेट्रोलले 240 km. गुड्छ । 60 km. यात्रा गर्न कति लिटर पेट्रोलको आवश्यकता पर्ला ?
6. यदि 15 kg. चिनीले 12 kg. मिश्री साट्न सकिन्छ भने 60 kg. मिश्रीले कति kg चिनी साट्न सकिन्छ ?
7. 5 जना मानिसले एउटा काम गर्न 12 दिन लगाउँछन् भने 15 जना मानिसले सो काम गर्न कति दिन लगाउनलान् ?
8. 12 जना मानिसले एउटा खेत खन्न 20 दिन लगाउँछन् भने सोही खेत 8 जनाले खन्न कति दिन लगाउलान् ?
9. एउटा बसले काठमाडौँबाट नेपालगन्ज 40km. प्रति घण्टाका दरले गुड्दा 15 घण्टामा पुऱ्याउँछ । यदि गति बढाएर 50 km प्रति घण्टाका दरले गुडाउँदा कति घण्टामा यात्रा पुरा हुन्छ ?
10. एउटा ब्यारेकमा 250 जना सैनिक जवानका लागि 45 दिनको खाना सञ्चित छ । यदि 300 जना सैनिक जवानले खाने हो भने सोही खाना कति दिनलाई पुग्ला ?
11. एउटा ठेकेदारले एउटा काम 35 दिनमा पूरा गर्न 32 जना कामदार काममा लगाएछ । यदि उसले 40 जना कामदार लगाएको भए सो काम कति दिनमा पूरा हुन्थ्यो होला ?
12. माथि प्रश्न नं. 1 मा दिइए जस्तै गरी 2/2 ओटा समस्याहरू खोजी समाधान गर ।

एकाइ 20

साधारण ब्याज (Simple Interest)

20.1 साधारण ब्याज (Simple Interest)

तलको क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

दीपकले राष्ट्रिय वाणिज्य बैङ्कमा रु. 5,000 बचत खातामा जम्मा गरेछ । 2 वर्षपछि उनलाई बैङ्कले रु. 1000 थपेर जम्मा रु. 6,000 फिर्ता दिएछ ।

1. साधारण ब्याजसम्बन्धी शब्दावलीको परिचय

यहाँ, (क) दीपकले बैङ्कमा जम्मा गरेको रकम रु. 5,000 सावाँ (Principal -P) हो ।

(ख) बैङ्कले थपेर दिएको रकम रु. 1000 ब्याज (Intrest -I) हो ।

(ग) बैङ्कले थपेर जम्मा दिएको रकम रु. 6,000 मिश्रधन (Amount -A) हो ।

(घ) बैङ्कले रु. 5,000 मा रु. 1000 थपेर दिएको 2 वर्ष समय (Time -T) हो ।

(ङ) बैङ्कले रु. 5000 मा रु. 1000 थप्यो भने कति प्रतिशत थप्यो होला ?

$$\text{थपेको प्रतिशत (\%)} = \frac{\text{रु.}1000}{\text{रु. }5000} \times 100\%$$

$$= 20\%$$

प्रत्येक रु. 100 मा 1 वर्षमा थप्ने रकमलाई ब्याजदर (Interest rate-R) भनिन्छ ।

2. ऐकिक नियमबाट ब्याज निकाल्ने तरिका

रु. 100 को 1 वर्षमा हुने ब्याज = रु 20

रु. 100 को 2 वर्षमा हुने ब्याज = रु. 2 x 20

$$\text{रु. 1 को 2 वर्षमा हुने ब्याज} = \text{रु. } \frac{2 \times 20}{100}$$

$$\text{रु. 6,000 को 2 वर्षमा हुने ब्याज} = \text{रु. } \frac{6000 \times 2 \times 20}{100}$$

यसलाई ब्याज I, रु. 6000 लाई सावाँ P, 2 वर्षलाई समय T, 20 लाई दर R ले जनाउने हो भने

ब्याज $I = \frac{PTR}{100}$ हुन्छ ।

अब माथिका क्रियाकलापहरूबाट र सूत्रबाट साँवा (P), **समय** (T), **ब्याजदर** (R), **मिश्रधन** (A) **पत्ता लगाउने सूत्र पत्ता लगाऊ ।**

1. ब्याज (I) = $\frac{PTR}{100}$
2. साँवा (P) = $\frac{I \times 100}{TR}$
3. समय (T) = $\frac{I \times 100}{PR}$
4. ब्याजदर (R) = $\frac{I \times 100}{PT}$
5. मिश्रधन (A) = P +I

उदाहरण 1

रु. 2,500 को 2 वर्षमा 10% का दरले हुन आउने ब्याज र मिश्रधन पत्ता लगाऊ ।

समाधान : यहाँ, सावाँ (P) = रु. 2,500, समय (T) = 2 वर्ष, ब्याजदर (R) = 10%, ब्याज (I) = ?

मिश्रधन (A) = ?

ब्याज (I) = $\frac{PTR}{100} = \frac{\text{रु. } 2,500 \times 2 \times 10}{100}$ = रु. 500

मिश्रधन (A) = P+I = रु 2500 + रु 500 = रु.3000

त्यसैले, ब्याज रु. 500 र मिश्रधन र 3000 हुन्छ ।

उदाहरण 2

प्रतिवर्ष 12% का दरले 3 वर्षमा रु. 720 ब्याज पाउन कति रकम जम्मा गर्नुपर्छ ?

समाधान : यहाँ, ब्याजदर (R) = 12%, समय (T) = 3 वर्ष, ब्याज (I) = रु. 720, सावाँ (P) = ? छ ।

अब,

सावाँ (P) = $\frac{I \times 100}{TR} = \frac{\text{रु. } 720 \times 100}{3 \times 12}$ = रु. 2,000

अत: सावाँ = रु. 2000 जम्मा गर्नुपर्छ ।

उदाहरण 3

सृजनाले नेपाल बैङ्कमा रु 1200 जम्मा गरिछन् । 2 वर्ष 6 महिनापछि एकमुष्ठ रु. 1500 फिर्ता पाइछन् भने कति प्रतिशत ब्याजदर बैङ्कले दिएछ ।

समाधान

सावाँ (P) = रु. 1200

समय (T) = 2 वर्ष 6 महिना = 30 महिना = $\frac{30}{12}$ वर्ष = $\frac{5}{2}$ वर्ष = $2\frac{1}{2}$ वर्ष

मिश्रधन (A) = रु. 1500

ब्याजदर (R) = ?

यहाँ, सूत्रानुसार ब्याज (I) = A-P

= रु. 1500- रु. 1200

= रु. 300

ब्याजदर (R) $= \frac{I \times 100}{PT} = \text{रु.}\ \frac{300 \times 100}{\text{रु.}\ 1200 \times \frac{5}{2}} = \frac{300 \times 100 \times 2}{1200 \times 5} = 10\%$

अत: बैङ्कले 10% ब्याजदर दिएको रहेछ ।

उदाहरण 4

कति समयपछि र 3000 को मिश्रधन वार्षिक 15% ब्याजका दरले रु. 3900 हुन्छ ?

समाधान

यहाँ, सावाँ (P) = रु. 3000

ब्याजदर (R) = 15%

मिश्रधन (A) = रु. 3900

ब्याज (I) = A-P = रु. 3900 - रु. 3000 = रु. 900

समय (T) = ?

सूत्रानुसार, समय (T) $= \frac{I \times 100}{PR} = \frac{\text{रु.}\ 900 \times 100}{\text{रु.}\ 3000 \times 15} = 2$ वर्ष

अत: आवश्यक समय = 2 वर्ष ।

अभ्यास 20.1

1. तलका सूचनाहरूका आधारमा साधारण ब्याज कति हुन्छ ? पत्ता लगाऊ :

क्र.स.	सावाँ	ब्याजदर	समय
(क)	रु.450	5% प्रतिवर्ष	2 वर्ष
(ख)	रु.900	10% प्रतिवर्ष	3 वर्ष
(ग)	रु.2000	12% प्रतिवर्ष	1 वर्ष 6 महिना
(घ)	रु.3500	$3\frac{1}{3}$% प्रतिवर्ष	2 वर्ष

2. ब्याजदर कति हुन्छ ? पत्ता लगाऊ :

क्र.सं.	सावाँ	ब्याज	समय
(क)	रु. 600	रु.90	5 वर्ष
(ख)	रु. 1500	रु. 150	2 वर्ष
(ग)	रु. 6000	रु. 2000	1 वर्ष 6 महिना

3. समय पत्ता लगाऊ :

क्र.सं.	सावाँ	ब्याज	ब्याजदर (प्रतिवर्ष)
(क)	रु. 800	रु. 120	6%
(ख)	रु. 2000	रु. 360	9%
(ग)	रु. 7,000	रु. 2520	12%

4. सावाँ पत्ता लगाऊ :

क्र.सं.	समय	ब्याजदर (प्रतिवर्ष)	ब्याज
(क)	5 वर्ष	6%	रु. 120
(ख)	3 वर्ष	12%	रु.360
(ग)	2 वर्ष 6 महिना	8%	रु. 1,200

5. रु. 1,750 को 4 वर्षमा वार्षिक 10% प्रति वर्षका दरले ब्याज र मिश्रधन कति कति हुन्छ ?

6. कति ब्याजका दरले रु. 1,050 को 5 वर्षमा मिश्रधन रु. 1575 हुन्छ ?

7. कति समयपछि रु. 6,500 को मिश्रधन 12% प्रतिवर्ष ब्याजका दरले रु.8,450 हुन्छ ?

8. सुजनले श्यामसँग रु. 2,400 वार्षिक 6% का दरले 5 वर्षका लागि ऋण लिए । सोही रु. 2,400 सिर्जनालाई वार्षिक 10% का दरले 4 वर्षका लागि सापटी दिए । यसरी सुजनलाई नाफा वा नोक्सान के भयो ? र कति भयो ? पत्ता लगाऊ ।

एकाइ 21

तथ्याङ्क शास्त्र (Statistics)

21.1 सञ्चित बारम्बारता तालिका (Cumulative Frequency Table)

सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउनुपूर्व सर्वप्रथम कुनै पनि तथ्याङ्कको सङ्कलन गरिन्छ । यस क्रममा मिलान चिह्नको प्रयोग गरी बारम्बारता निकालिन्छ । यसरी प्राप्त गरी व्यवस्थित गरिएको तथ्याङ्कलाई तथ्याङ्कका गुणहरूको आधारमा छुट्याउनुपर्छ । यस कार्यलाई तथ्याङ्कको तालिकीकरण र प्रस्तुतीकरण भनिन्छ । अब हामी यहाँ सञ्चित बारम्बारता तालिकाको बारेमा छलफल गर्दै छौँ ।

सञ्चित बारम्बारता तालिका भनेको प्राप्त तथ्याङ्कहरूलाई बारम्बारतामा प्रस्तुत गरिसकेपछि क्रमश: बारम्बारताहरू जोड्दै जाँदा बन्ने बारम्बारहरूको योग वा जोड हो ।

1. असमूहगत तथ्याङ्कको सञ्चित बारम्बारता तालिका

तलको क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

मानौँ कुनै एउटा विद्यालयको कक्षा 7 को 30 जना विद्यार्थीहरूको समूह एकाइको 10 पूर्णाङ्कको एकाइ परीक्षामा प्राप्ताङ्क निम्नानुसारको पाइयो :

6, 8, 10, 6, 2, 8, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8, 6, 8, 6, 10, 2, 4, 6, 8, 4, 2, 4, 8, 6, 4, 6, 8, 6, 10, 6

माथिको कोरा (Raw) तथ्याङ्कलाई बारम्बारता तालिकामा देखाउँदा

क्र.सं.	प्राप्ताङ्क	बारम्बारता	मिलान चिह्न
1.	2	4	||||
2.	4	6	~~||||~~ |
3.	6	10	~~||||~~ ~~||||~~
4.	8	7	~~||||~~ ||
5.	10	3	|||
जम्मा		**30 जना**	

यहाँ 30 जना विद्यार्थीले प्राप्त गरेको अङ्कलाई बारम्बारता तालिकामा देखाइएको छ ।

माथिको बारम्बारता तालिकामा बारम्बारताहरूलाई सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाई क्रमश: अघिल्ला बारम्बारताहरू जोड्दै जाँदा बन्ने सञ्चित बारम्बारतालाई प्रक्रियासहित तल प्रस्तुत गरिएको छ ।

माथिको तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारतामा लेख्दा,

प्राप्ताङ्क (x)	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
2	4	4
4	6	4 + 6 =10
6	10	10 +10 = 20
8	7	20 +7 =27
10	3	27 + 3 = 30

सञ्चित बारम्बारता निकाल्ने तरिका

1. सञ्चित बारम्बारताको पहिलो पङ्तिमा पहिलो तथ्याङ्कको बारम्बारता लेख्नुपर्छ । जस्तै : प्राप्ताङ्क 2 को बारम्बारता 4 छ । त्यसैले सञ्चित बारम्बारताको पहिलो लहरमा 4 लेखिएको छ ।
2. दोस्रो तथ्याङ्कको सञ्चित बारम्बारताको दोस्रो लहरमा पहिलो र दोस्रो बारम्बारता जोडेर लेख्नुपर्छ । जस्तै : 4 + 6 = 10
3. यसै गरी क्रमश: सञ्चित बारम्बारताको तेस्रो, चौथो ... लहरमा बारम्बारताहरू जोड्दै जानुपर्छ ।

उदाहरण 1

तल दिइएको तथ्याङ्कबाट सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाऊ :

प्राप्ताङ्क (x)	बारम्बारता (f)
10	2
20	5
30	12
40	7
50	1

समाधान

माथिको तथ्याङ्कको आधारमा सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउँदा,

प्राप्ताङ्क(x)	बारम्बारता(f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
10	2	2
20	5	2 + 5 = 7
30	12	7 + 12 =19
40	7	19 +7 =26
50	1	26 +1 =27

उदाहरण 2

तल दिइएको आँकडाको आधारमा भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाऊ :

प्राप्ताङ्क	10	20	30	40	50	60
बारम्बारता	5	9	15	12	6	3

समाधान

यहाँ, भन्दा कमको सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउँदा,

प्राप्ताङ्क (x)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
10 भन्दा कम	5
20 भन्दा कम	9 + 5 = 14
30 भन्दा कम	14 + 15 = 29
40 भन्दा कम	29 + 12 = 41
50 भन्दा कम	41 + 6 = 47
60 भन्दा कम	47 + 3 = 50

2. समूहगत तथ्याङ्कको सञ्चित बारम्बारता तालिका

उपयुक्त श्रेणीअन्तर राखी सङ्कलन गरिएको तथ्याङ्कको बारम्बारता तालिकाबाट बनाइएको सञ्चित बारम्बारता तालिकालाई समूहगत सञ्चित बारम्बारता तालिका भनिन्छ । यसको उदाहरणलाई तल प्रस्तुत गरिएको छ ।

श्रेणीअन्तर निकाल्दा तथ्याङ्कहरूको सङ्ख्या कति छ त्यसलाई ध्यान दिनुपर्छ । सामान्यतया 5, 10, 20 आदि राखेर श्रेणीअन्तर निकाल्दा सजिलो हुन जान्छ । तैपनि तथ्याङ्कहरूको विस्तार थोरै छ भने श्रेणीअन्तर सानो सङ्ख्यामा पनि राखिन्छ । त्यसै गरी यदि विस्तार धेरै छ भने श्रेणीअन्तर ठुलो सङ्ख्यामा राखिन्छ । तल श्रेणीअन्तर 10 भएको उदाहरण प्रस्तुत गरिएको छ ।

उदाहरण 1

तल दिइएको आधारमा सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाऊ :

प्राप्ताङ्क	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 -50
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	5	12	7	3

समाधान

यहाँ दिइएको तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

प्राप्ताङ्क(x)	**विद्यार्थी सङ्ख्या**(f)	**सञ्चित बारम्बारता**(cf)
0 - 10	3	3
10 - 20	5	3 + 5 = 8
20 - 30	12	8 + 12 = 20
30 - 40	7	20 + 7 = 27
40 - 50	3	27 + 3 = 30

अभ्यास 21.1

तल दिइएको तथ्याङ्कको आधारमा सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाऊ :

1.

प्राप्ताङ्क	3	6	9	12	15
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	5	8	6	4

2.

प्राप्ताङ्क	5	10	15	20	25	30
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	6	10	10	7	3

3.

खेल	भलिबल	फुटबल	क्रिकेट	टेबलटेनिस	क्यारमबोर्ड	चेस
विद्यार्थी सङ्ख्या	15	22	30	25	18	10

4.

ज्याला (रुपियाँमा)	10	20	30	40	50
कामदार सङ्ख्या	3	7	10	8	7

5.

प्राप्ताङ्क	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	8	15	12	7

6.

प्राप्ताङ्क	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
विद्यार्थी सङ्ख्या	6	8	15	10	6

7.

प्राप्ताङ्क	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100
विद्यार्थी सङ्ख्या	15	22	30	20	10

8.

ज्याला (रु.)	0 - 100	100 - 200	200 - 300	300 - 400	400 - 500
कामदार सङ्ख्या	6	12	18	14	7

9.

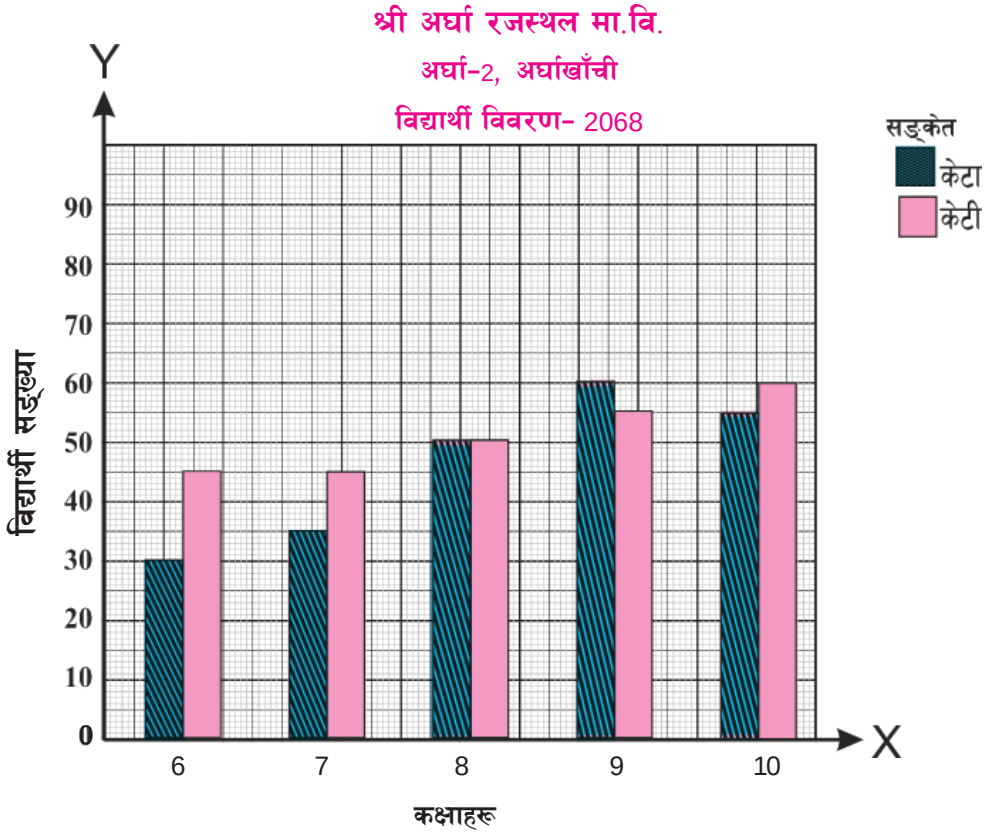
उमेर (वर्ष)	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
बिरामी सङ्ख्या	40	30	50	20	10

21.2 बहुस्तम्भ चित्र (Multiple Bar Diagram)

हामीले साधारण स्तम्भ चित्रका बारेमा अघिल्ला कक्षाहरूमा छलफल गरिसकेका छौँ। कुनै पनि तथ्याङ्कहरूको सङ्कलन गरिसकेपछि प्रस्तुतीकरणलाई आकर्षक र छिटै अध्ययन गर्न सकिने बनाउने उपायहरूमध्ये बहुस्तम्भ चित्र पनि एक हो । यसलाई तलको उदाहरणहरूमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

उदाहरण 1

एउटा विद्यालयका कक्षा 6 देखि 10 सम्मका विद्यार्थीहरूको छात्रा र छात्र सङ्ख्यालाई तलको बहुस्तम्भ चित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ । यसको अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नहरूमा छलफल गर ।



माथिको तालिकाका आधारमा निम्न लिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर :

1. बहुस्तम्भ चित्र के कस्तो विषयमा रहेछ ?
2. बहुस्तम्भ चित्रका रेखाहरूमा ठाडो र तेस्रो लहरमा रहेका सङ्ख्याहरूले के के जनाएका छन् ?
3. कुन स्तम्भले केटा र कुनले केटीको सङ्ख्या जनाउँछ ?
4. बहुस्तम्भ चित्रको प्रत्येक ठाडोतिरको ठुलो कोठा एउटा कोठाले कति विद्यार्थी जनाएको छ ?
5. कक्षा 6 मा जम्मा विद्यार्थी कति रहेछन् ?

6. सबभन्दा बढी र सबभन्दा कम विद्यार्थी कुन कुन कक्षामा रहेछन् ?

7. कुन कुन कक्षामा छात्रभन्दा छात्राको सङ्ख्या बढी रहेछ ?

8. कुन कुन कक्षामा छात्रा भन्दा छात्रको सङ्ख्या बढी रहेछ ?

9. माथिको बहुस्तम्भ लेखाचित्रबाट अन्य के के सूचनाहरू प्राप्त गर्न सक्छौ ?

एकभन्दा बढी आपसमा सम्बन्धित सूचना तथा तथ्याङ्कहरूलाई प्रस्तुत गरिएको चित्रलाई बहुस्तम्भ चित्र भनिन्छ । बहुस्तम्भ चित्रको रचना गर्दा साधारण स्तम्भ चित्रमा जस्तै प्रत्येक स्तम्भको चौडाइ बराबर हुनुपर्छ । बहुस्तम्भ चित्रहरूको उचाइले सङ्ख्या जनाउँदछ ।

उदाहरण 2

श्री भानु मा.वि. ताप्लेजुङमा 2067 सालमा सञ्चालन भएको आँखा, कान, सामान्य चिकित्सा र दाँत परीक्षण शिविरमा दर्ता भई स्वास्थ्य परीक्षण गराउने व्यक्तिहरूको तथ्याङ्क यसप्रकार पाइयो :

स्वास्थ्य सेवाका नाम	आँखा		कान		सामान्य चिकित्सा		दन्त	
परीक्षण सङ्ख्या	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष
	21	30	22	13	85	56	28	38

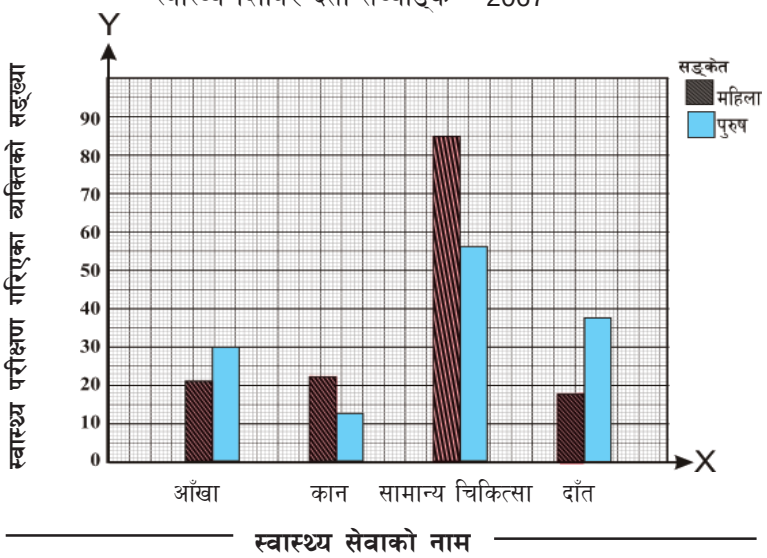
उक्त तथ्याङ्कलाई ग्राफ पेपरमा बहुस्तम्भ चित्रद्वारा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, तथ्याङ्कको तल्लो सीमा 13 र माथिल्लो सीमा 85 छ । त्यसैले ग्राफको प्रत्येक सानो कोठा बराबर एकजना व्यक्ति ठुलो कोठा बराबर 10 जना मानेर बहुस्तम्भ चित्र बनाई तल प्रस्तुत गरिएको छ :

श्री भानु माध्यमिक विद्यालय, ताप्लेजुङ

स्वास्थ्य शिविर दर्ता तथ्याङ्क - 2067



क्रियाकलाप

(क) तिम्रो विद्यालयमा भएको वा कुनै अन्य स्रोतबाट प्राप्त बहुस्तम्भ चित्र लिएर त्यसका मुख्य सूचनाहरूलाई लेखेर कक्षामा छलफल गर ।

(ख) तिम्रो विद्यालयमा भएको वा कुनै अन्य स्रोतबाट प्राप्त सूचना तथा तथ्याङ्कहरू सङ्कलन गरी एउटा बहुस्तम्भ चित्र बनाई कक्षामा छलफल गर ।

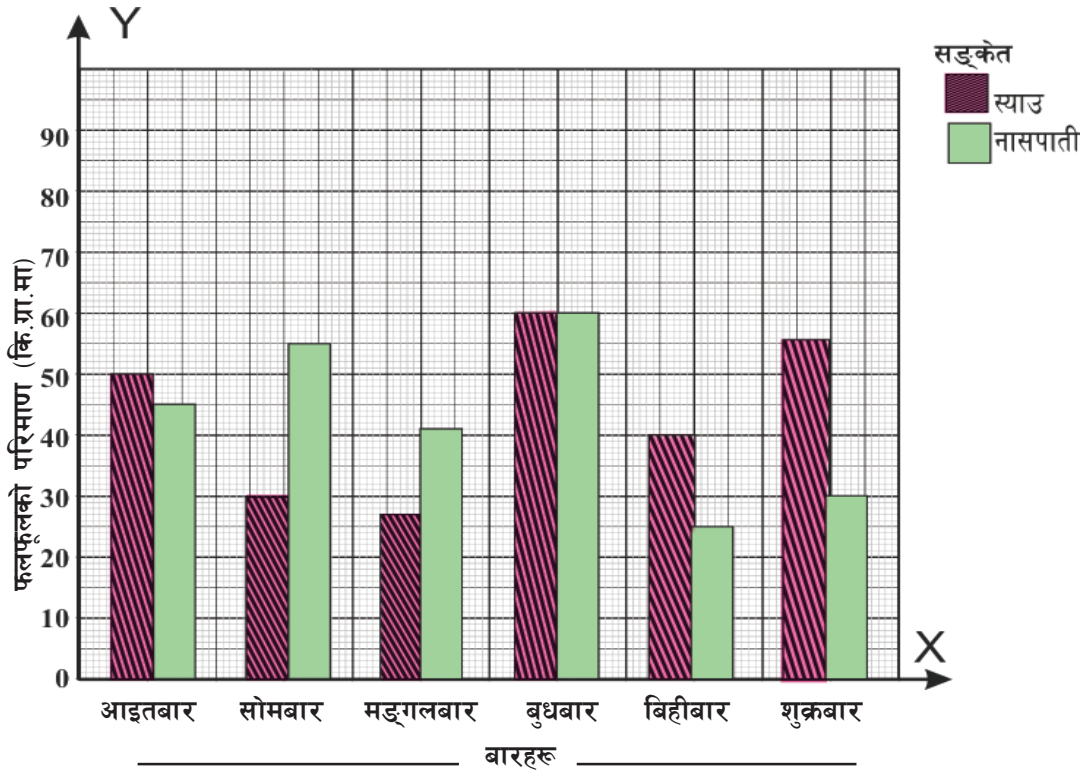
अभ्यास 21.2

1. बहुस्तम्भ चित्र केलाई भनिन्छ ? बहुस्तम्भ चित्रमा कुन कुन विषय वस्तु समावेश गरिएका हुन्छन् ?

2. तल एउटा फलफूल पसलेले 6 दिनमा बेचेको स्याउ र नासपातीको परिमाणलाई बहुस्तम्भ चित्रमा देखाइएको छ :

सानुमाया फलफूल स्टोर

इलाम न.पा. – ३, इलाम



अब माथिको चित्रका आधारमा निम्न लिखित प्रश्नहरूको उत्तर लेख :

(क) आइतबार स्याउ र नासपाती कति कति परिमाण बिक्री भएको रहेछ ?

(ख) सोमबार स्याउ र नासपातीमा कुन कति परिमाणमा बढी बिक्री भएको रहेछ ?

(ग) स्याउ सबभन्दा बढी र सबभन्दा कम कुन कुन बारमा कति कति परिमाणमा बिक्री भएको रहेछ ?

(घ) माथिको बहुस्तम्भ चित्रबाट प्राप्त हुने अन्य कुनै दुईओटा सुचनाहरू लेख ।

3. नेपालको कुनै एउटा पर्यटक क्षेत्रमा आएका पर्यटकहरूमध्ये भारत र अन्य मुलुकका गरी दुई वर्गका तथ्याङ्क निम्नानुसार सङ्कलन गरिएको रहेछ ।

साल (वि.सं.) मा	2064		2065		2066		2067	
पर्यटक सङ्ख्या	भारत	अ.मु	भारत	अ.मु.	भारत	अ.मु.	भारत	अ.मु.
(सयमा)	12	28	15	35	19	36	20	38

माथिको तथ्याङ्कलाई उपयुक्त स्केल दिएर ग्राफ पेपर/ग्राफ कापीमा बहुस्तम्भ चित्र बनाऊ ।

4. सरस्वती मा.वि., धनुषामा विद्यार्थीहरू आउँदा सवारी साधन प्रयोग गरी तथा हिँडेर आउने गरेको तथ्याङ्कलाई तल दिइएको छ :

विद्यालय आउने साधन	हिँडेर		बस		मोटर साइकल		साइकल	
विद्यार्थी सङ्ख्या	छात्र	छात्रा	छात्र	छात्रा	छात्र	छात्रा	छात्र	छात्रा
	35	25	80	42	20	34	85	60

माथिको तथ्याङ्कलाई उपयुक्त स्केल दिएर ग्राफ पेपर/ग्राफ कापीमा बहुस्तम्भ लेखा चित्र बनाऊ ।

5. अमर बिस्कुट फ्याक्ट्री बुटवलले गुलियो र नुनिलो गरी दुई प्रकारका बिस्कुटहरू उत्पादन गर्दो रहेछ । वैशाख महिनाको पहिलो 5 दिनमा गरेको उत्पादनलाई तल तालिकामा दिइएको छ :

उत्पादन बार	आइतबार		सोमबार		मङ्गलबार		बुधबार		बिहीबार	
उत्पादित परिमाण किलोग्राममा	गुलियो	नुनिलो	गुलियो	नुनिलो	गुलियो	नुनिलो	गुलियो	नुनिलो	गुलियो	नुनिलो
	30	29	45	56	71	65	77	59	79	55

माथिको तथ्याङ्कलाई उपर्युक्त स्केल दिएर ग्राफ पेपर/ग्राफ कापीमा बहुस्तम्भ लेखा चित्र बनाऊ ।

6. तिम्रो विद्यालयका कक्षा 1 देखि 5 सम्मका विद्यार्थीहरूको छात्र र छात्राहरूको तथ्याङ्क सङ्कलन गरी बहुस्तम्भ चित्र बनाऊ । आफूले बनाएको बहुस्तम्भ चित्रलाई कक्षामा प्रस्तुत गर ।

21.3 असमूहगत तथा समूहगत आँकडा (Ungrouped and Grouped Data)

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर ।

जनजागृति मा.वि., बुटवलका कक्षा 7 का 20 जना विद्यार्थीहरूले 20 पूर्णाङ्कमा प्राप्त गरेको अङ्क :

8, 15, 17, 8, 13, 15, 8, 17, 8, 13, 13, 15, 18, 10, 12, 10, 12, 10, 13, 13

(क) यस प्राप्ताङ्कलाई मिलान चिह्नमा प्रस्तुत गरेर हेरौँ ।

प्राप्ताङ्क	मिलान चिह्न	बारम्बारता
8	||||	4
10	|||	3
12	||	2
13	~~||||~~	5
15	|||	3
17	||	2
18	|	1

माथिको तालिकामा दिइएका तथ्याङ्कहरू असमूहगत तथ्याङ्कहरू हुन् । यदि कुनै पनि तथ्याङ्कमा भएका राशिहरूको सबभन्दा ठुलो मान र सबभन्दा सानो मानको फरक ठुलो भएमा असमूहगत तथ्याङ्कबाट बारम्बारता तालिका निकाल्न झन्झटिलो र गाह्रो हुन्छ । धेरै भएको आँकडालाई समूह बनाई तालिका बनाउन सकिन्छ ।

माथिकै तालिकाबाट समूहगत तथ्याङ्कको बारम्बारता तालिका बनाउँदा,

सर्वप्रथम सबभन्दा ठुलो मान र सबभन्दा सानो मानको अन्तर निकाल्नुपर्छ ।

अत: सबभन्दा ठुलो मान - सबभन्दा सानो मान = 18 - 8 = 10 हुन्छ ।

यहाँ अन्तर 10 छ । त्यसैले यदि 4 ओटा श्रेणी सङ्ख्या बनाउने हो भने वर्गान्तर $\frac{10}{4} = 2.5 =$ करिब 3 को अन्तरमा बनाउनुपर्छ ।

माथिको तथ्याङ्कलाई 3 को अन्तरमा वर्गान्तर गरी तल दिइएअनुसार समूहगत बारम्बार तालिकामा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

वर्गान्तर	मिलान चिह्न	बारम्बारता
8 - 11	~~||||~~ ||	7
11 - 14	|||| ||	7
14 - 17	~~||||~~	5
17 - 20	|||	3

समूहगत आँकडा बनाउँदा ध्यान दिनुपर्ने कुराहरू :

(क) सबभन्दा ठुलो मान र सबभन्दा सानो मानको फरक निकाल्ने

(ख) सबभन्दा ठुलो मान र सबभन्दा सानो मानको फरकलाई वर्गान्तरले भाग गर्ने । (वर्गान्तर आफैंले छान्ने वा छान्न दिइन्छ ।)

(ग) वर्गान्तरको तल्लो सीमा (lower limit) सोही वर्गान्तरमा पर्छ भने माथिल्लो सीमा (upper limit) अघिल्लो वा अर्को वर्गान्तरमा पर्छ ।

(घ) मिलान चिह्नले दिएको मानलाई बारम्बारतामा राख्ने ।

उदाहरण 1

कक्षा 7 का 40 जना विद्यार्थीहरूको तौल तल दिइएको छ । यसबाट असमूहगत तथ्याङ्क बनाऊ :

38, 37, 36, 35,34, 33,38, 34, 35, 32, 30, 31, 34, 30 31, 32, 30, 33, 32, 30, 33, 31, 37, 36, 35, 34, 32, 31, 30, 39, 38, 37, 30, 31, 32, 37, 30, 32, 37, 39

तौल (कि.ग्रा.मा)	मिलान चिह्न	बारम्बारता
30	卌 ||	7
31	卌	5
32	卌 |	6
33	|||	3
34	||||	4
35	|||	3
36	||	2
37	卌	5
38	|||	3
39	||	2

उदाहरण 2

तल दिइएको तथ्याङ्कको आधारमा समूहगत तथ्याङ्कको बारम्बारता तालिका बनाऊ :

5, 19, 14, 17, 20, 21, 35, 39, 30, 31, 6, 8, 14, 28, 27, 39, 30, 31, 32, 25, 26, 10, 11, 12, 15, 28, 30, 31, 24, 22

समाधान : अन्तर = ठुलो मान – सानो मान = 39 - 5 = 34

वर्गान्तर	मिलान चिह्न	बारम्बारता
5 – 10	|||	3
10 – 15	卌	5
15 – 20	|||	3
20 – 25	||||	4
25 – 30	卌	5
30 – 35	卌 ||	7
35 – 40	|||	3

अभ्यास 21.3

1. **तल दिइएको आँकडाबाट असमूहगत तथ्याङ्कको बारम्बारता तालिका बनाऊ :**

(क) कक्षा 7 को गणित विषयको एउटा एकाइ परीक्षामा 22 जना विद्यार्थीले 10 पूर्णाङ्कमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क :

4, 6, 5, 3, 2, 4, 5, 6, 3, 2, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 4, 3, 6, 8, 9, 3

(ख) कक्षा 7 का 20 जना विद्यार्थीको तौल (कि.ग्रा.मा) :

25, 27, 30, 25, 32, 36, 27, 30, 25, 32, 30, 25, 36, 30, 36, 32, 27, 27, 25, 30

(ग) कक्षा 7 का 20 जना विद्यार्थीको उचाइ (से.मि.मा) :

130, 148, 135, 130, 142, 148, 142, 135, 130, 142, 48, 135, 130, 142, 130, 135, 135, 142, 148, 130

(घ) 40 जना विद्यार्थीको जेठ महिनाको उपस्थिति दिन :

17, 18, 22, 25, 24, 16, 17, 22, 25, 18, 17, 16, 10, 17, 16, 22, 25, 16, 17, 22, 24, 25, 22, 18, 17, 10 ,16, 22, 18, 17, 25, 25, 16, 17, 24, 22, 17, 16, 18, 10

2. **तल दिइएको आँकडाबाट समूहगत बारम्बारता बनाऊ :**

(क) 15 जना विद्यार्थीले 20 पूर्णाङ्कको परीक्षामा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क :

4, 14, 13, 18, 19, 7, 6, 3,10,12, 15, 16, 18, 14, 9

(ख) 20 जना विद्यार्थीको उमेर (वर्षमा) :

12, 13, 15, 14, 12, 12, 13, 14, 12, 10, 8, 16, 18, 19, 12, 13,14, 15, 16, 8, 15

(ग) कक्षा 7 को गणित विषयको 20 पूर्णाङ्कमा प्राप्त गरको प्राप्ताङ्क :

10, 14, 16, 14, 12, 15, 12, 14, 10, 12, 14, 15, 8, 7, 10, 12, 18, 19, 14, 10, 16, 12, 4, 7, 9, 8, 13, 12, 14, 16

(घ) कुनै उद्योगमा कार्यरत 40 जना कामदारको दैनिक ज्याला रु. मा :

70, 75, 80, 70, 90, 95, 100, 110, 80, 85,115, 80, 75, 85, 70, 95, 105, 115, 100, 90

80, 70, 60, 75, 80, 65, 65, 60, 70, 75, 90, 100, 115, 105, 110, 75, 85, 90, 90, 95

21.4 असमूहगत आँकडाको अङ्क गणितीय मध्यक (Arithmetic Mean of Ungrouped Data)

तलको क्रियाकलाप अध्ययन गर र छलफल गर :

सुजन र सुमनले गणित, अङ्ग्रेजी, विज्ञान र नेपालीमा 100 पूर्णाङ्कमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क तल दिइएको छ :

	गणित	अङ्ग्रेजी	विज्ञान	नेपाली	जम्मा
सुजन	85	80	75	72	312
सुमन	70	85	60	77	292

दिइएका विषयमा सुजन र सुमन कसले राम्रो गरेका रहेछन् ।

सुजनको औसत अङ्क कति रहेछ ? साथीसँग छलफल गर ।

सुमनको औसत अङ्क कति रहेछ ? साथीसँग छलफल गर ।

सुजनको औसत अङ्क = $\frac{312}{4} = 78$

सुमनको औसत अङ्क = $\frac{292}{4} = 73$

यसरी चारओटा विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कको आधारमा सुजनको औसत अङ्क 78 सुमनको औसत अङ्क 73 भन्दा धेरै भएकाले सुजनको नतिजा राम्रो छ भन्न सकिन्छ । यही औसत अङ्कलाई अङ्क गणितीय मध्यक (Arithmetic mean) भनिन्छ । अङ्क गणितीय मध्यकलाई साधारणतया मध्यक (mean) पनि भनिन्छ ।

अत: मध्यक $(\bar{x}) = \frac{\text{जम्मा परिणाम } (\sum x)}{\text{परिणाम सङ्ख्या (N)}}$

उदाहरण 1

तल दिइएको कक्षा 7 का 10 जना विद्यार्थीले गणित विषयको 20 पूर्णाङ्कको परीक्षामा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क निम्नानुसार छ । यो तथ्याङ्कबाट मध्यक पत्ता लगाऊ ।

15, 16, 12, 10, 8, 4, 15, 19, 17, 12

समाधान

यहाँ 10 जना विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कलाई जोड्दा,

जम्मा परिणाम $\sum x = 15 + 16 + 12 + 10 + 8 + 4 + 15 + 19 + 17 + 12 = 128$

विद्यार्थी सङ्ख्या (N) = 10

मध्यक $(\bar{x}) = \frac{\sum x}{N} = \frac{128}{10} = 128$

उदाहरण 2

कक्षा 7 का 20 जना विद्यार्थीको तौल (kg मा) तल दिइएको छ। यो आँकडाबाट बारम्बारता तालिका बनाई मध्यक पत्ता लगाऊ।

20, 22, 30, 34, 25, 26, 20, 20, 22, 25, 26, 30, 22, 25, 26, 26, 25, 20, 22, 25

समाधान : दिइएको आँकडालाई बारम्बारता तालिकामा देखाउँदा

तौल (x)	मिलान चिह्न	बारम्बारता (f)	fx
20	||||	4	20 x 4= 80
22	||||	4	22 x 4 = 88
25	~~||||~~	5	25 x 5 = 125
26	||||	4	26 x 4 = 104
30	||	2	30 x 2 = 60
34	|	1	34 x 1 = 34
जम्मा		$N = \sum f = 20$	$\sum fx = 491$

त्यसैले, मध्यक $(\bar{x}) = \dfrac{\text{जम्मा योगफल } (\sum fx)}{\text{विद्यार्थी सङ्ख्या } (\sum f)} = \dfrac{491}{20} = 24.55$

उदाहरण 3

तल दिइएको बारम्बारता तालिकाको आधारमा मध्यक निकाल :

प्राप्ताङ्क (x)	40	50	55	62	75	80
विद्यार्थी सङ्ख्या (N)	4	6	10	8	5	2

समाधान

तालिकालाई ठाडो रूपमा लेख्दा,

प्राप्ताङ्क (x)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	fx
40	4	40 x 4 = 160
50	6	50 x 6 = 300
55	10	55 x 10 = 550
62	8	62 x 8 = 496
75	5	75 x 5 = 375
80	2	80 x 2 = 160
जम्मा	$N = \sum f = 35$	$\sum fx = 2041$

त्यसैले, मध्यक $(\bar{x}) = \dfrac{\text{जम्मा प्राप्ताङ्क } (\sum fx)}{\text{विद्यार्थी सङ्ख्या } (\sum f)} = \dfrac{2041}{35} = 58.31$

अभ्यास 21.4

1. तल दिइएको आँकडाबाट अङ्क गणितीय मध्यक निकाल :

(क) 4, 6, 7, 5, 8, 4, 3, 9, 8, 6 (ख) 5, 7, 12, 15, 11, 10, 15, 19, 10, 8

(ग) 6, 7, 8, 5, 4, 6, 7, 8, 3, 6, 9, 7 (घ) 16, 20, 25, 22, 21, 16, 17, 18, 25, 20,

(ङ) 40, 50, 60, 70, 80, 90

2. तल दिइएको विद्यार्थीको प्राप्ताङ्कबाट बारम्बारता तालिका बनाई मध्यक पत्ता लगाऊ :

(क) 1, 5, 6, 9, 8, 4, 1, 9, 8, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 4, 1, 5, 4, 6

(ख) 9, 8, 12, 15, 20, 22, 24, 22, 15, 9, 12, 8, 9, 20, 8, 12, 8, 15, 20, 24, 22, 15, 12, 9, 8

(ग) 10, 20, 20, 40, 50, 20, 20, 30, 30, 30, 40, 50, 30, 20, 40, 30.

(घ) 30, 32, 33, 32, 31, 33, 33, 31, 30, 31, 32, 33, 32, 30, 30, 33, 31, 30

(ङ) 120, 130, 120, 125, 125, 130, 135, 120, 130, 120, 135, 130

3. तल दिइएको बारम्बारता तालिकाको अङ्क गणितीय मध्यक निकाल :

(क)

प्राप्ताङ्क (x)	4	8	12	16	20
बारम्बारता (f)	2	3	5	4	1

(ख)

प्राप्ताङ्क (x)	5	10	15	20	25	30
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	4	7	10	8	6	5

(ग)

तौल (कि. ग्रा. मा) (x)	30	31	32	33	34	35
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	5	8	15	14	9	5

(घ)

उचाइ (x)	120	125	130	135	140
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	2	5	8	4	1

(ङ)

ज्याला (x)	80	90	100	110	120	130
कामदार सङ्ख्या (f)	95,	95	10	12	20	15

4. तल दिइएको 45 जना कामदारको दैनिक ज्यालाको आधारमा उनीहरूको औसत दैनिक ज्याला रुपियाँमा पत्ता लगाऊ । (असमूहगत आँकडाको अङ्क गणितीय मध्यकका आधारमा)

80, 90, 110, 105, 95, 95, 110, 95, 85, 80, 80, 85, 90, 105, 100, 100, 100, 95, 85, 80, 110, 105, 80, 90, 95, 95, 100, 105, 110, 110, 90, 80, 85, 90, 95, 80, 85, 90, 90, 95, 100, 110, 105, 80, 90

एकाइ 22

बीजीय अभिव्यञ्जक (Algebraic Expression)

22.1 बहुपदीयको परिचय तथा वर्गीकरण
(Introduction and Classification of Algebric Expression)

पदका आधारमा बहुपदीयको वर्गीकरण

तलको तालिका अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नमा छलफल गरौँ :

क्र.सं.	एक पदीय	द्विपदीय	त्रिपदीय	बहुपदीय नहुने
1.	$2x$	$2x + 5$	$x^2 - 7x + 6$	$\frac{2x+5}{x^2}$,
2.	$\sqrt{3}\,xy$	$x^2 + y$	$x^2 + y^2 + z^2$	$x^2 + 4\frac{1}{x^3}$
3.	$-y^2z$, x^0	$x + y^3$	$x^4 + 8x^3 + 6x^2$	$x^2 - 7x + \frac{6}{x^2}$

(क) माथि दिइएका सबै गणितीय सङ्केतहरूलाई के भनिन्छ ?

(ख) माथिका पहिलो चारओटै अभिव्यञ्जकका उदाहरणहरूमा के के समानता र फरक पाउँछौ ।

(ग) एक पदीय अभिव्यजकमा कतिओटा पदहरू छन् ?

(घ) द्विपदीय र त्रिपदीय अभिव्यञ्जकमा कति कतिओटा पदहरू छन् ?

(ङ) बहुपदीयको अभिव्यञ्जकमा कति ओटासम्म पदहरू छन् ?

(च) किन अन्तिमका उदाहरण अभिव्यञ्जक भएनन् होला ?

माथि दिइएका सबै उदाहरणहरूमा सङ्ख्या र चलराशिहरू समावेश भएका छन् । त्यसैले यी सबै बीजीय अभिव्यञ्जकहरू हुन् । बीजीय अभिव्यञ्जकहरूका पदको सङ्ख्याका आधारमा बीजीय अभिव्यञ्जक एक पदीय तथा बहुपदीय हुन्छन् । बहुपदीय अभिव्यञ्जकहरू पनि द्विपदीय, त्रिपदीय, ... आदि हुन्छन् ।

(छ) माथिको छलफलका आधारमा बीजीय अभिव्यञ्जकको परिचय (अर्थ) र यससँग सम्बन्धित तथ्यहरू पत्ता लगाई लेख र तलका तथ्यहरूसँग तुलना गरी हेर ।

केही महत्त्वपूर्ण तथ्यहरू

1. चल वा अचल राशिका बिचमा गणितीय क्रियासूचक चिह्नहरू प्रयोग भई गणितीय सङ्केतमा लेखिएका भनाइहरूलाई बीजीय अभिव्यञ्जक भनिन्छ ।
2. एउटा मात्र पद भएको बीजीय अभिव्यञ्जकलाई एक पदीय अभिव्यञ्जक (monomial expression) भनिन्छ ।

3. दुईओटा मात्र पद भएको अभिव्यञ्जकलाई द्विपदीय अभिव्यञ्जक (binomial expression) भनिन्छ । त्यस्तै तीनओटा पद भएको अभिव्यञ्जकलाई त्रिपदीय अभिव्यञ्जक (trinomial expression) भनिन्छ ।
4. एक वा एकभन्दा बढी पदहरू भएको बीजीय अभिव्यञ्जकमा चलहरूको घाताङ्क पूर्ण सङ्ख्या भएमा त्यस्तो अभिव्यञ्जकलाई बहुपदीय अभिव्यञ्जक (polynomial expression) भनिन्छ । यसरी बहुपदीयलाई पदका आधारमा एक पदीय, द्विपदीय, तीन पदीय .... गरी वर्गीकरण गर्न सकिन्छ ।
5. बहुपदीय अभिव्यजकहरू पनि दुई पदीय, त्रिपदीय ..... आदि हुन्छन् ।

2. डिग्रीका आधारमा बीजीय अभिव्यञ्जकहरू

तलको तालिका अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नमा छलफल गरौं :

डिग्री 1	डिग्री 2	डिग्री 3	.....
$2x$	$4m^2$	$5p^3$	.....
$-5y$	$2m+7mn$	$7p^2 + 5p^2q + 9q^2$	.....
$\frac{3z}{2} + 2$	$3m^2 + 6mn + 4n^2$	$5x^3 + 7xy^2 + \frac{2}{3}y^3$	.....

(क) डिग्री 1 मा प्रत्येक पदको चल (x, y र z) को घाताङ्कहरू कति कति छन् ?

(ख) डिग्री 2 मा प्रत्येक पदको चलका घाताङ्कहरू कति कति छन् ?

(ग) $2m + 7mn$ कसरी 2 डिग्रीको भएको होला ?

(घ) $(7p^2 + 5p^2q + 9q^2)$ कसरी डिग्री 3 को बीजीय अभिव्यञ्जक भयो होला ?

- माथि डिग्री 1 मा सबै बीजीय अभिव्यञ्जक $2x$, $-5y$ र $\frac{3z}{2}+2$ का चलराशिहरूका घाताङ्कहरूको मान 1 छ । त्यसैले यिनीहरू डिग्री 1 का बीजीय अभिव्यञ्जकहरू हुन् ।
- $7mn$ मा चलहरू m र n को घाताङ्कको योग $1 + 1 = 2$ छ । त्यसैले $2m + 7mn$ डिग्री 2 को बीजीय अभिव्यञ्जक भयो ।
- $7p^2 + 5p^2q + 9q^2$ मा $5p^2q$ पदको डिग्री सबभन्दा बढी $= 2 + 1 = 3$ छ । त्यसैले यसको डिग्री 3 हुन्छ ।

केही महत्त्वपूर्ण तथ्यहरू

1. कुनै पनि बीजीय अभिव्यञ्जकका पदहरूका चलराशिहरूको अधिकतम घाताङ्कको मानलाई त्यस अभिव्यञ्जकको डिग्री भनिन्छ ।
2. यदि चलहरू कुनै एउटा पदमा 2 वा 2 भन्दा बढी छन् भने तिनीहरूको घाताङ्कलाई जोडेर डिग्री पत्ता लगाइन्छ ।
3. यदि दुई वा दुईभन्दा बढी पद भएको बीजीय अभिव्यञ्जक छ भने जुन पदको डिग्री सबैभन्दा बढी छ त्यही डिग्री नै सो बीजीय अभिव्यञ्जकको डिग्री हुन्छ ।

उदाहरण 1

तलका दिइएका प्रत्येक बहुपदीयहरू, एक पदीय, द्विपदी वा तीन पदीय के हुन् ? छुट्याएर लेख :

(क) a^3 (ख) $4a^2 + 2a$ (ग) $3x^2 + 7x^2y + 9y^2$

समाधान

(क) a^3 मा एउटा मात्र पद छ । त्यसैले a^3 एक पदीय अभिव्यञ्जक हो ।

(ख) $4a^2 + 2a$ मा $4a^2$ र $+2a$ गरी दुईओटा पदहरू छन् । त्यसैले $4a^2 + 2a$ दुई पदीय अभिव्यञ्जक हो ।

(ग) $3x^2 + 7x^2y + 9y^2$ गरी 3 ओटा पदहरू छन् । त्यसैले $3x^2 + 7x^2 + 9y^2$ त्रिपदीय अभिव्यञ्जक हो ।

उदाहरण 2

$5x^3 + 7x^2y^2 + 7y^3$ को डिग्री पत्ता लगाऊ :

समाधान : $5x^3 + 7x^2y^2 + 7y^3$ मा सबभन्दा धेरै घाताङ्क (2+2) = 4 भएको पद $7x^2y^2$ छ । त्यसैले $5x^3 + 7x^2y^2 + 7y^3$ को डिग्री 4 भयो ।

उदाहरण 3

$6x^4y^2 + 8x^2y^5z + 7xy^5$ को डिग्री पत्ता लगाऊ :

समाधान :

यहाँ प्रत्येक पदको घाताङ्कको जोड निकालौँ ।

$6x^4y^2$ मा घाताङ्कहरूको जोड = 4 + 2 = 6

$8x^2y^5z$ मा घाताङ्कहरूको जोड = 2 + 5 + 1 = 8

र $7xy^5$ मा घाताङ्कहरूको जोड = 1 + 5 = 6

सबभन्दा धेरै घाताङ्को योग 8 भयो । तसर्थ $6x^4y^2 + 8x^2y^5z + 7xy^5$ को डिग्री 8 हुन्छ ।

अभ्यास 22.1

1. **तलका अभिव्यञ्जकहरू कुन प्रकारका बहुपदीय हुन् छुट्याऊ र लेख :**

(क) $5x^4 + 7x - 18$ (ख) $-12x^2y^{-2}$ (ग) $x^2 + 6x$

(घ) $3x + xy - 8y^2$ (ङ) $5x - 4y + 3z$ (च) $\frac{7a^4 - 5}{8x^4}$

(छ) 5/5 ओटा बहुपदीय भएका र बहुपदीय नभएका अभिव्यञ्जकहरूलेख र साथीसँग छलफल गर ।

2. **तल दिइएका बहुपदीयको डिग्री पत्ता लगाऊ :**

(क) $5x^2 + 6x^2y + 7y^2$ (ख) $7x^3 + 8xy^4 + y^2$

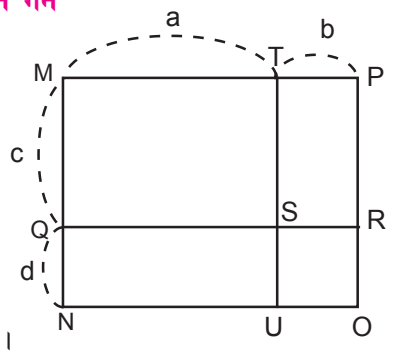
(ग) $a^3y^4 + 3a^5y + y^6$ (घ) $9xy^4 + 10x^6y^2 + y^{12}$

(ङ) डिग्री 1 देखि डिग्री 5 सम्मका 2/2 ओटा बहुपदीय लेख ।

3. एक/एक ओटा एक पदीय, दुई पदीय, त्रिपदीय अभिव्यञ्जकहरू लेख ।

22.2 बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको गुणन (Multiplicaiton of Algebric Expressions)

1. द्विपदीय अभिव्यञ्जकलाई द्विपदीय अभिव्यञ्जकले गुणन गर्ने



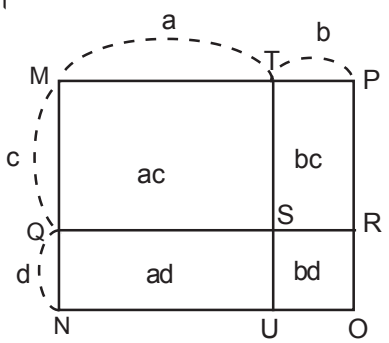
तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) दिइएको चित्रमा MNOP एउटा आयत छ ।
यसको क्षेत्रफल कति होला ?

(ख) आयत MNOP को क्षेत्रफल = (a+b) (c+d) हुन्छ, कसरी ?

(ग) MTSQ को क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

(घ) त्यस्तै TSRP, QNUS र SUOR को क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।



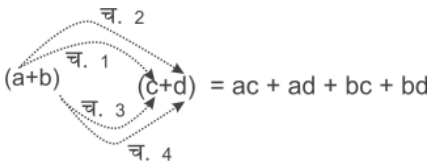
(ङ) यहाँ, आयात MNOP को क्षेत्रफल = 4 ओटा आयतहरू MTSQ, TSRP, QNUS र SUOR को क्षेत्रफलहरूको योगफलसँग बराबर हुन्छ, कसरी ?

अथवा (a+b) (c+d) = ac + ad + bc + bd हुन्छ ।

अब, (a+b) (c+d) = ac + ad + bc + bd को सम्बन्ध खोजौँ ।

यहाँ, (a+b) ले (c+d) लाई गुणन गर्नु भनेको a ले (c+d) लाई र +b ले (c+d) लाई गुणन गर्नु भनेको हो ।

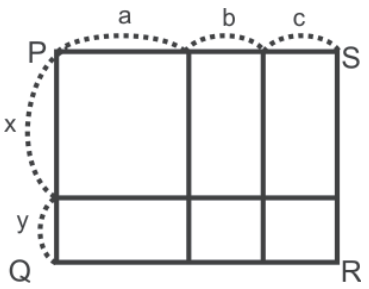
बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको गुणनको प्रक्रियालाई तल प्रस्तुत गरिएको छ :

चरण 1 र 2 : a(c+d) = ac + ad **चरण 3 र 4** : +b(c+d) = bc + bd तसर्थ, (a+b) (c+d) = ac + ad + bc + bd हुन्छ ।	 = ac + ad + bc + bd तसर्थ, (a+b) (c+d) = ac + ad + bc + bd

दुई पदीय अभिव्यञ्जकले दुई पदीय अभिव्यञ्जकलाई गुणन गर्दा एउटा अभिव्यञ्जकको प्रत्येक दुई पदले अर्को अभिव्यञ्जकको प्रत्येक पदलाई क्रमशः गुणन गर्दै जानुपर्छ । अनि सबै पदलाई एकै ठाउँमा जम्मा गर्नुपर्छ । यस्तो अवस्थामा गुणनको पद विच्छेदन नियम (distributive law of multiplication) प्रयोग गरिन्छ ।

2. त्रिपदीय अभिव्यञ्जकलाई द्विपदीय अभिव्यञ्जकले गुणन गर्ने

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गरौं :



(क) दिइएको आयत PQRS को जम्मा लम्बाइ र चौडाइ कति कति होला ?

(ख) आयत PQRS लाई कति भागमा बाँडिएको छ ?

(ग) प्रत्येक भागको क्षेत्रफल निकाल र प्रत्येक कोठाभित्र लेख ।

(घ) आयत PQRS को क्षेत्रफल कसरी निकालिन्छ ? कति होला ?

- माथिको आयत PQRS मा लम्बाइ (a+b+c) र चौडाइ (x+y) छ ।
- चित्रबाट आयत PQRS को क्षेत्रफल

  = 6 ओटा कोठाको क्षेत्रफल ax + bx + cx + ay + by + cy हुन्छ ।
- यसरी छलफल गर्दा,

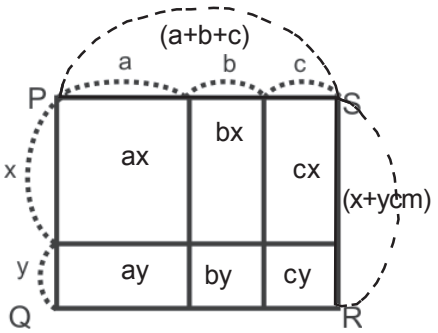
  (x+y) (a + b + c)

  = x(a+b+c) + y(a+b+c)

  = ax + bx + cx + ay + by + cy

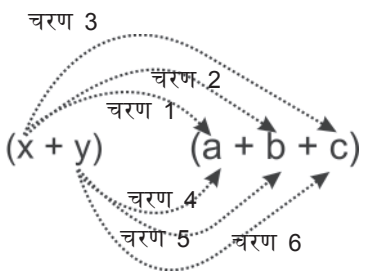
तसर्थ, आयत PQRS को क्षेत्रफल

= (ax + bx + cx + ay + by + cy)cm^2



द्विपदीय अभिव्यञ्जकले त्रिपदीय अभिव्यञ्जकलाई गुणन गर्दा द्विपदीयका प्रत्येक पदले त्रिपदीयको प्रत्येक पदलाई अलग अलग गुणन गरिन्छ । अनि सबै पदहरूलाई एकै ठाउँमा जम्मा पारिन्छ ।

गुणन गर्ने प्रक्रिया

चरण 1, 2 र 3 : x(a+b+c) = ax + bx + cx **चरण 4, 5 र 6 :** y(a+b+c) = ay + by + cy तसर्थ, (x+y) (a+b+c) = ax + bx + cx + ay + by + cy	 तसर्थ, (x + y) (a+b+c) = ax + bx + cx + ay + by + cy

उदाहरण 1

गुणन गर : $(2x + 3y)(5x - 2y)$

समाधान

$(2x + 3y)(5x - 2y)$

$= 2x(5x - 2y) + 3y(5x - 2y)$

$= 10x^2 - 4xy + 15xy - 6y^2$

$= 10x^2 + 11xy - 6y^2$

उदाहरण 2

गुणन गर : $(3a - 2b)(6a + 7b - 8c)$

समाधान

$(3a - 2b)(6a + 7b - 8c)$

$= 3a(6a + 7b - 8c) - 2b(6a + 7b - 8c)$

$= 18a^2 + 21ab - 24ac - 12ab - 14b^2 + 16bc$

$= 18a^2 + 21ab - 12ab - 24ac + 16bc - 14b^2$

$= 18a^2 + 9ab - 24ac + 16bc - 14b^2$

उदाहरण 3

एउटा आयतकार नर्सरीको लम्बाइ $(12x - 2y)m$ र चौडाइ $(6x - 4y)m$ छ भने त्यस नर्सरीको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, आयतको लम्बाइ $(\ell) = (12x - 2y)m$, चौडाइ $(b) = (6x - 4y)m$ र क्षेत्रफल $(A) = ?$

सूत्रअनुसार, आयतको क्षेत्रफल $(A) = \ell \times b$

$= (12x - 2y)(6x - 4y)m^2$

$= 12x(6x - 4y) - 2y(6x - 4y)m^2$

$= (72x^2 - 48xy - 12xy + 8y^2)m^2$

$= (72x^2 - 60xy + 8y^2)m^2$

तसर्थ, उक्त नर्सरीको क्षेत्रफल $(72x^2 - 6oxy + 8y^2)m^2$ हुन्छ ।

उदाहरण 4

एउटा आयतकार कक्षा कोठाको लम्बाइ $(5x + 2y - 5)$ र चौडाइ $(3x - y)$ छ भने त्यसको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ आयतको लम्बाइ $(l) = (5x + 2y - 5)$, चौडाइ $(b) = (3x - y)$ र क्षेत्रफल $(A) = ?$

सूत्रअनुसार, आयतको क्षेत्रफल (A) = ℓ x b

$$= (3x - y)(5x + 2y - 5)$$
$$= 3x(5x + 2y - 5) - y(5x + 2y - 5)$$
$$= 15x^2 + 6xy - 15x - 5xy - 2y^2 + 5y$$
$$= 15x^2 + 6xy - 5xy - 15x + 5y - 2y^2$$
$$= 15x^2 + xy - 15x + 5y - 2y^2$$

तसर्थ उक्त कक्षा कोठाको क्षेत्रफल ($15x^2 + xy - 15x + 5y - 2y^2$) वर्ग एकाइ हुन्छ ।

अभ्यास 22.2

1. **गुणन गर :**

(क) $a(3a - 2b)$ (ख) $\frac{2}{3}x(x^2 - y^2)$ (ग) $c(\frac{2}{3}a + \frac{1}{4}b)$ (घ) $(2m - 3n) \times 3p$

2. **सरल गर :**

(क) $5x^2(2x + 3) + 6x(2x - 3)$ (ख) $\frac{1}{2}m(m-3) + 2m(\frac{5}{3}m - 2)$

(ग) $6y - 3(5-y) + 7(3x - y)$ (घ) $p^2(q^2 - r^2) + q^2(r^2 - p^2) + r^2(p^2-q^2)$

3. **गुणन गर :**

(क) $(x+y)(x+y)$ (ख) $(p - q)(p-q)$ (ग) $(m+n)(m-n)$

(घ) $(3x + 5y)(3x - 5y)$ (ङ) $(a^2 + b^2)(2a - 3b)$ (च) $(3c - 5d)(5c - 3d)$

(छ) $\left(\frac{k}{3} + \frac{l}{2}\right)\left(\frac{k}{3} - \frac{l}{2}\right)$ (ज) $(2.5a^2 + 5.2b^2)(6.2a^2 + 2.6b^2)$

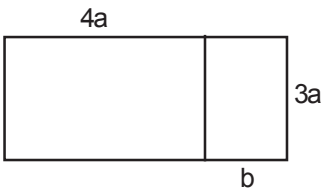
(झ) $(x+y)(x^2-xy + y^2)$ (ञ) $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

4. $(5p + 3)$ र $(3p - 2)$ को गुणन फल निकाल । यदि $p = 2$ भए उक्त गुणन फलको मान कति हुन्छ ?

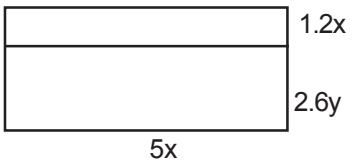
5. $(5a^2 - 4b^2)(2a + 5b)$ को गुणन फल निकाल । यदि $a = 2$ र $b = -3$ भए उक्त गुणन फलको वास्तविक मान कति होला ?

6. **तलका प्रत्येक चित्रका आधारमा आयतकार वस्तुको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ :**

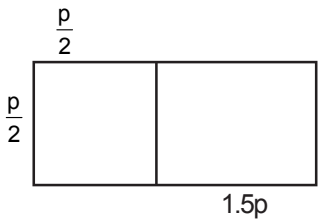
(क)



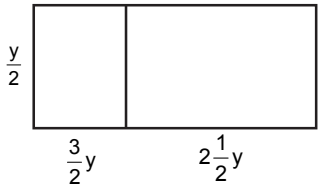
(ख)



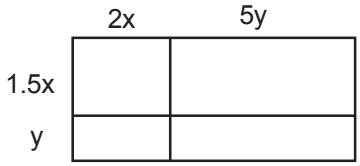
(ग)



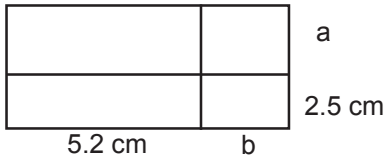
(घ)



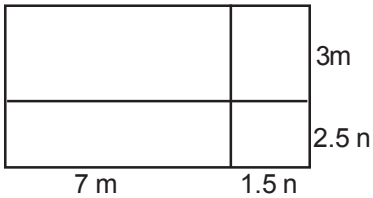
(ङ)



(च)



(छ)



(ज)

7. एउटा आयतकार कोठाको लम्बाइ (5a + 2b)m र चौडाइ (4a - b)m रहेछ भने

(क) त्यस कोठाको क्षेत्रफल निकाल ।

(ख) यदि a = 3m र b = 2m भए त्यस कोठाको वास्तविक क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

8. एउटा आयतकार करेसाबारीको लम्बाइ (12a - 3b)m र चोडाइ (6a - 2b - 2c)m छ भने,

(क) त्यस करेसाबारीको क्षेत्रफल निकाल ।

(ख) यदि a = 5, b = 2 र c = -1 भए त्यस करेसाबारीको वास्तविक क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

22.3 बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको भाग (Division of Algebraic Expression)

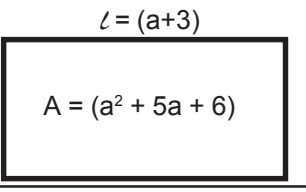
1. दुई पदीय अभिव्यञ्जकले बहुपदीय अभिव्यञ्जकलाई भाग गर्ने

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

एउटा आयतकार जग्गाको क्षेत्रफल ($a^2 + 5a + 6$) वर्ग एकाइ र लम्बाइ ($a+3$) एकाइ रहेछ भने चौडाइ पत्ता लगाउने कोसिस गरौँ ।

(क) माथिको समस्या जनाउने चित्र तयार गरी विचार गरौँ ।

यहाँ दिएअनुसार, क्षेत्रफल (A) = ($a^2 + 6a + 6$), लम्बाइ = ($a+3$) र b = ? छ ।

माथिको समस्यामा चौडाइ (b) पत्ता लगाउनु छ । आयतकार वस्तुको क्षेत्रफल $A = \ell \times b$ अथवा $b = \frac{A}{\ell}$ हुन्छ । त्यसैले यो समस्या भागसँग सम्बन्धित छ ।	

(ख) अब, सूत्रअनुसार चौडाइ $(b) = \frac{A}{\ell} = \frac{a^2 + 5a + 6}{a + 3}$ हुन्छ ।

अथवा b = ($a^2 + 5a + 6$) ÷ ($a+3$) हुन्छ ।

चौडाइ पत्ता लगाउन लम्बाइ ($a+3$) ले क्षेत्रफल ($a^2 + 5a + 6$) लाई भाग गर्नुपर्छ ।

(घ) अब चरणअनुसार भाग गर्दै जाऔँ,

$a+2$ $a+3)\ a^2 + 5a + 6$ $-\ a^2 + 3a$ $2a + 6$ $-\ 2a + 6$ 0	**चरणहरू** **चरण 1 :** a ले a^2 लाई कति पटक भाग जाला ? **चरण 2 :** ($a+3$) x a = ? **चरण 3 :** अब 2a लाई a ले कति पटक भाग जाला ? **चरण 4 :** ($a+3$) x 2 = ?

अत: उक्त जग्गाको चौडाइ = ($a+2$) एकाइ हुन्छ ।

(घ) अब जाँचेर हेरौँ :

($a+3$) ($a+2$) = $a(a+2) + 3(a+2) = a^2 + 2a + 3a + 6 = a^2 + 5a + 6$

दिइएको जग्गाको क्षेत्रफल आयो । त्यसैले हाम्रो भाग गरेको हिसाब मिल्यो ।

(ङ) यदि a = 15 मिटर भए उक्त जग्गाको लम्बाइ, चौडाइ र क्षेत्रफल निकाल्ने प्रयास गरौँ ।

लम्बाइ	चौडाइ	क्षेत्रफल
($a+3$) = (15+3)m = 18m	($a+2$) = (15+2)m = 17m	($a^2 + 5a + 6$) = ($15^2 + 5 \times 15 + 6$)m = (225 + 75 + 6)m = 306m

उदाहरण 1

$(m^2 - 7m + 12)$ लाई $(m-3)$ ले भाग गर र जाँचेर पनि हेर ।

समाधान

भाग गरेर हेर्दा,

$$
\begin{array}{r|l}
 & m - 4 \\
\hline
m - 3 & m^2 - 7m + 12 \\
 & \underset{-}{m^2} \underset{+}{-} 3m \\
\hline
 & -4m + 12 \\
 & \underset{+}{-4m} \underset{-}{+} 12 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

जाँचेर हेर्दा,

$(m-3)(m-4)$

$= m(m-4) - 3(m-4)$

$= m^2 - 4m - 3m + 12$

$= m^2 - 7m + 12$

जाँच्दा मिल्यो । त्यसैले भाग गरेको ठिक छ ।

तसर्थ $m^2 - 7m + 12$ लाई $m-3$ ले भाग गर्दा $(m- 4)$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

(क) $(4y^2 - 13y - 21)$ लाई $(y -8)$ ले भाग गर ।

(ख) भागफल र शेष छुट्याएर लेख ।

(ग) समाधानलाई जाँचेर पनि हेर ।

(घ) यदि $(y = 2cm)$ भए $4y^2 - 13y - 21$ को मान निकाल ।

समाधान

(क) भाग गर्दा

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4y + 19 \\
\hline
y - 8 & 4y^2 - 13y - 21 \\
 & \underset{-}{4y^2} \underset{+}{-} 32y \\
\hline
 & 0 + 19y - 21 \\
 & \underset{-}{19y} \underset{+}{-} 152 \\
\hline
 & 0 + 131
\end{array}
$$

(ख) जाँचेर हेर्दा

$(y - 8)(4y + 19) + 131$

$= y(4y + 19) - 8(4y + 19) + 131$

$= 4y^2 + 19y - 32y - 152 + 131$

$= 4y^2 - 13y - 21$

$4y^2 - 13y - 21$ प्रश्नमा दिइएको भाज्य हो ।

अत: भागफल $= (4y+19)$ र शेष $= 131$

अत: हाम्रो भाग गरेको हिसाब मिलेको छ ।

अब माथिको उदाहरणका आधारमा बीजीय अभिव्यञ्जकको भागमा भाज्य, भाजक, भागफल र शेषको सम्बन्ध पत्ता लगाऊ ।

भाज्य = (भाजक x भागफल) + शेष
जहाँ, शेषको डिग्री < भाजकको डिग्री हुन्छ ।

(घ) अब y = 2cm मानलाई $(4y^2 - 13y - 21)$ मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$4y^2 - 13y - 21 = (4 \times 2^2 - 13 \times 2 - 21)cm = (4 \times 4 - 26 - 21)cm = (16 - 47)cm = -31cm$

उदाहरण 3

यदि (m+8) जनालाई रु. $(2m^2 + 13m - 24)$ बराबर गरी बाँडियो भने,

(क) प्रत्येकले कति कति रकम पाउलान् ?

(ख) यदि m = Rs 10 भए प्रत्येकले जम्मा कतिका दरले रकम पाएछन् ?

(ग) जम्मा रकम कति रहेछ ?

समाधान

माथि दिइएको समस्या भागको समस्या हो ।

अब भाग गरी हेर्दा

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2m - 3 \\
\hline
m+8 & 2m^2 + 13m - 24 \\
 & \underline{2m^2 + 16m} \\
 & \quad - \qquad - \\
 & 0 - 3m - 24 \\
 & \quad \underline{- 3m - 24} \\
 & \quad + \qquad + \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

चरणहरू

1. $(m+8) \times 2m = 2m^2 + 16m$
2. $+13m - 16m = -3m$
3. $(m + 8)(-3) = -3m - 24$
4. $(-3m - 24) - (-3m - 24) = 0$

(क) त्यसैले प्रत्येकले रु. (2m - 3) रकम पाउँछन् ।

(ख) यदि m = रु. 10 भए प्रत्येकले पाउने रकम = रु. (2m - 3) = रु. (2 x 10 - 3) = रु. (20 - 3) = रु. 17 हुन्छ ।

(ग) जम्मा रकम = रु. $(2m^2 + 13m - 24)$ = रु. $(2 \times 10^2 + 13 \times 10 - 24)$

= रु. (2 x 100 + 130 - 24) = रु. (200 + 106)

= रु. 306

अभ्यास 22.3

1. **भाग गर :**

(क) $\frac{10a-15b+30}{5}$ (ख) $\frac{5m^6-3m^5+5m^3}{m^3}$

(ग) $(4x^2 + 12x) \div (2x + 6)$ (घ) $(m^2 + 4m + 4) \div (m+2)$

(ङ) $(a^2 + 7a + 12) \div (a+3)$ (च) $(3m^2 - 5m - 28) \div (3m+7)$

(छ) $(2y^2 + 13y + 15) \div (y + 5)$ (ज) $(16p^2 + 24pq + 9q2) \div (4p + 3q)$

(झ) $(2\ell^3 - 5\ell^2 - 24\ell - 18) \div (2\ell + 3)$

(ञ) माथि दिए जस्तै गरी एक पदीय, द्विपदीय र बहुपदीयले भाग गर्ने 2/2 ओटा समस्याहरू बनाई/खोजी समाधान गर । साथीसँग एक आपसमा साटेर समाधान गरी उत्तर जाँचेर हेर ।

2. एउटा सलाईको एउटा आयतकार सतह क्षेत्रफल $15x^2 + 12x$ वर्ग एकाइ छ । त्यसको एउटा भुजाको लम्बाइ 3x एकाइ भए,

(क) अर्को भुजाको चौडाइ कति होला ?

(ख) यदि x = 5cm भए उक्त सतहको क्षेत्रफल, लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

3. एउटा टेबलको माथिल्लो सतहको चौडाइ 4x - 3y र क्षेत्रफल $24x^2y - 18xy^2$ रहेछ भने,

(क) लम्बाइ पत्ता लगाऊ,

(ख) यदि x = 12cm र y = 6cm भए उक्त सतहको क्षेत्रफल, लम्बाइ र चौडाइको वास्तविक मान निकाल ।

4. यदि (x+2) जनालाई रु. $(x^2 + 6x + 8)$ बराबर गरी बाँडियो भने,

(क) प्रत्येकले कति कति रकम पाउलान् ?

(ख) यदि x = रु. 15 भए वास्तविक जम्मा रकम, मानिसको सङ्ख्या र प्रत्येकको भागमा परेको रकम पत्ता लगाऊ ।

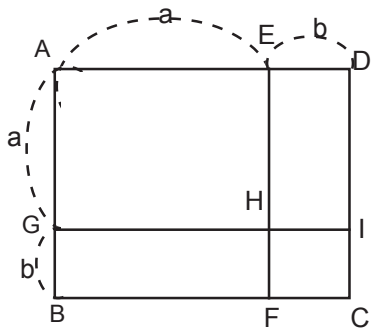
5. एउटा आयतकार घडेरीको लम्बाइ (5x + 10)m र क्षेत्रफल $(x^2 - 25x - 70)m^2$ रहेछ भने ।

(क) चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

(ख) यदि x = 10m भए उक्त घडेरीको वास्तविक लम्बाइ, चौडाइ र क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

22.4 $(a\pm b)^2$ को ज्यामितीय धारणा र प्रयोग
[Geometrical Concept and Application of $(a\pm b)^2$]

1. $(a+b)^2$ को ज्यामितीय धारणा



तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

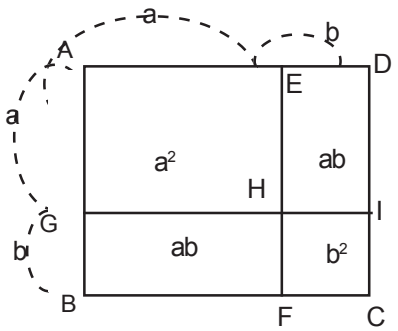
(क) कुनै एउटा वर्ग ABCD खिचौँ ।

(ख) वर्ग ABCD को लम्बाइ र चौडाइ कति कति होला ? पत्ता लगाऊ ।

(ग) अब प्रत्येक आयत र वर्गको क्षेत्रफल निकालेर चित्रमा भर ।

(घ) अब वर्ग ABCD को जम्मा क्षेत्रफल = (a+b) (a+b) = $(a+b)^2$ = ?

माथिको चित्रमा वर्ग ABCD का प्रत्येक भुजाको लम्बाइ (a+b) छ । अर्थात् लम्बाइ = (a+b) र चौडाइ = (a+b) नै छ । प्रत्येक भित्री वर्ग र आयतलाई तलको चित्रमा भरेर देखाइएको छ । अत: वर्ग ABCD को क्षेत्रफल



(A) = $(a+b)^2$ = $(a^2 + ab + ab + b^2)$ = $(a^2 + 2ab + b^2)$ हुन्छ ।

जाँचेर हेरौँ अत: सूत्र $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$= a(a+b) + b(a+b)$

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$ प्रमाणित भयो ।

2. $(a-b)^2$ को ज्यामितीय धारणा

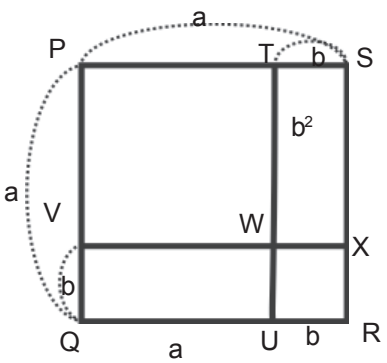
तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) एउटा भुजा a एकाइ भएको वर्ग PQRS खिच ।

(ख) भुजा PS = a मा TS = b तथा भुजा QR मा UR = b हुने गरी काट र अब T र U जोड ।

(ग) त्यस्तै अर्को भुजा PQ = a मा VQ = b हुने गरी काट । त्यस्तै भुजा XR = b हुने गरी काट । अब V र X जोड ।

(घ) TU र VX ले आपसमा काटिएको बिन्दुलाई W नाम देऊ ।



(ङ) अब तलका प्रत्येक ज्यामितीय चित्रको नाप पत्ता लगाई चित्रमा भर :

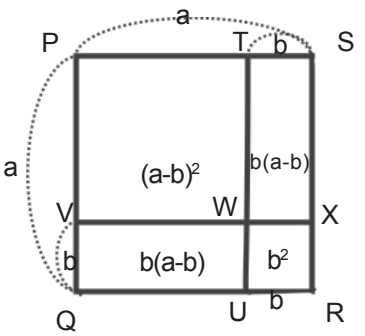
1. PV = ? 2. VW = ? 3. TW = ? 4. PT = ?
5. WU = ? 6. UR = ? 7. WX = ? 8. XR = ?
9. SX = ? 10. QV = ? 11. QU = ? 12. TS = ?
13. वर्ग PVWT = ? 14. आयत TWXS = ? 15. आयत VQUW = ?
16. वर्ग WURX = ? 17. वर्ग PQRS = ?

(च) अब $(a-b)^2$ लाई छाया पारेर देखाऊ ।

(छ) $(a-b)^2$ बराबर कति हुन्छ होला ? चित्रका आधारमा पत्ता लगाऊ ।

माथिको चित्रमा PV = VW = TW = PT = (a-b) हुन्छ । वर्ग PVWT को क्षेत्रफल (A) = $(a-b)^2$ वर्ग एकाइ हुन्छ । त्यसैले आयत TWXS को क्षेत्रफल = b(a-b) वर्ग एकाइ, आयत VQUW को क्षेत्रफल = b(a-b) वर्ग एकाइ र वर्ग WURX को क्षेत्रफल = b^2 वर्ग एकाइ हुन्छ । त्यस्तै वर्ग PQRS को क्षेत्रफल = a^2 वर्ग एकाइ हुन्छ ।

अब, ठुलो वर्ग PQRS = वर्ग PVWT + आयत VQUW + आयत TWXS + वर्ग WURX हुन्छ ।



अथवा $a^2 = (a-b)^2 + b(a-b) + b(a-b) + b^2$

अथवा, $a^2 = (a-b)^2 + ab - b^2 + ab - b^2 + b^2$

अथवा, $a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2$

अथवा, $-(a-b)^2 = -a^2 + 2ab - b^2$

अथवा, $(a-b)^2 = -(-a^2 + 2ab - b^2)$

अत: सूत्र : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

अब $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ लाई जाँचेर हेरौं :

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$ प्रमाणित भयो ।

केही महत्त्वपूर्ण सूत्रहरू

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a-b)^2 + 4ab$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 - 4ab$

उदाहरण 1

$(x + 3)$ को वर्ग निकाल :

(क) सूत्र प्रयोग गरेर

(ख) सूत्र प्रयोग नगरिकन

(ग) $(x+3)$ लाई ज्यामितीय चित्रमा देखाऊ ।

(घ) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ प्रमाणित गर ।

समाधान

(क) सूत्र प्रयोग गरेर

$x+ 3$ को वर्ग $= (x+3)^2$

$= x^2 + 2.\ x.3 + 3^2$ [किनकि $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$]

$= x^2 + 6x + 9$

(ख) सूत्र प्रयोग नगरिकन

$(x + 3)$ को वर्ग $= (x+3)\ (x+3)$

$= x(x+3) + 3(x+3)$

$= x^2 + 3x + 3x + 9$

$= x^2 + 6x + 9$

(ग) ज्यामितीय चित्रमा देखाउँदा

$(x+3)^2 = x^2 + x + x + x + x + x + x + 1 + 1$
$+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

अत: $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ प्रमाणित भयो ।

	x	1	1	1
	x^2	x	x	x
1	x			
1	x			
1	x			

उदाहरण 2

$(3x - 2y^2)$ को वर्ग निकाल :

समाधान

$(3x - 2y^2)$ को वर्ग $= (3x-2y^2)^2$ $= [(3x)^2 - 2 \times 3x \times 2y^2 + (2y^2)^2]$

$= 9x^2 - 12xy^2 + 4y^4$

उदाहरण 3

$(a+b+c)$ को वर्ग निकाल :

(क) सूत्र प्रयोग गरेर

(ख) सूत्र प्रयोग नगरिकन

समाधान

(क) $(a+b+c)$ को वर्ग $= (a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2$

$= [(a+b)^2 + 2(a+b) \times c + c^2]$

$= [a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2]$

$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)$

(ख) $(a+b+c)^2 = (a+b+c)\ (a+b+c)$

$= a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c)$

$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

उदाहरण 4

$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)$ को वर्ग निकाल :

समाधान : $x^2-\frac{1}{x}$ को वर्ग $=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2=\left[(x^2)^2-2\times x^2\times\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]=x^4-2x+\frac{1}{x^2}$

उदाहरण 5

यदि $p+\frac{1}{p}=4$ भए मान पत्ता लगाऊ (क) $\left(p+\frac{1}{p}\right)^2$ (ख) $p^2+\frac{1}{p^2}$

समाधान

(क) $\left(p+\frac{1}{p}\right)$ को वर्ग $=\left(p+\frac{1}{p}\right)^2=4^2=16$

(ख) $\left(p+\frac{1}{p}\right)^2=p^2+2\times p\times\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}$ $\left[\therefore (a+b)^2=a^2+2ab+b^2\right]$

अथवा, $4^2=\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)+2\times p\times\frac{1}{p}$

अथवा, $\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)+2=16$

अथवा, $p^2+\frac{1}{p^2}=16-2$

अथवा, $p^2+\frac{1}{p^2}=14$

अत : $p^2+\frac{1}{p^2}$ को मान 14 हुन्छ ।

उदाहरण 6

यदि $x-\frac{1}{x}=10$ भए मान पत्ता लगाऊ : (क) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (ख) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

समाधान

(क) यहाँ, $x-\frac{1}{x}=10$

अथवा, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=10^2$

अथवा, $x^2 - 2x.\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=100 + 2 = 102$

अथवा, $x^2+\frac{1}{x^2}=10^2$

(ख) यहाँ, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x.\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

$= x^2+\frac{1}{x^2}+2$

$= 102 + 2$

$= 104$

तसर्थ, $x^2+\frac{1}{x^2}=102$ र

$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=104$ हुन्छ ।

उदाहरण 7

$\left(x-\frac{1}{x}\right)=5$ भए, प्रमाणित गर : (क) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=27$ (ख) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 29$

समाधान

(क) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left[x^2-2\times x\times\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]$

अथवा, $5^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)$

अथवा, $x^2+\frac{1}{x^2}=25+2$

अथवा, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 27$ प्रमाणित भयो ।

(ख) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 \times x \times \frac{1}{x}$ $\left[\because (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab\right]$

अथवा, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (5)^2 + 4$

अथवा, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 25 + 4$

अथवा, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 29$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 8

सरल गर :

(क) $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

(ख) $(a-b)^2 - (a+b)^2$

समाधान

(क) $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$= a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$

$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3$

(ख) $(a-b)^2 - (a + b)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2)$

$= -4ab$

अभ्यास 22.4

1. सूत्र प्रयोग गरेर र नगरिकन दुवै तरिकाले वर्ग पत्ता लगाऊ । ज्यामितीय चित्र पनि बनाऊ :

(क) (a+1) (ख) (b + 2) (ग) (c-1) (घ) (c - 5)

(ङ) (2p+3q) (च) (6m-5n)

2. प्रश्न नं. 1 जस्तै गरी $(a+b)^2$ र $(a-b)^2$ रुपका दुई/दुई ओटा समस्या बनाई समाधान गर : साथीसँग आपसमा समाधान गरी उत्तर जाँचेर हेर ।

3. विस्तार गर :

(क) $(a^2 - 3y)^2$ (ख) $(xy + ab)^2$ (ग) $(p^2q + q^2r)^2$ (घ) $(-5p^4 - 6a)^2$

(ङ) $\left(m^2 - \frac{1}{m}\right)^2$ (च) $\left(3q^3 + \frac{1}{6q^3}\right)^2$

4. यदि $p + \frac{1}{p} = 7$ भए, मान निकाल :

(क) $p^2 + \frac{1}{P^2}$ (ख) $\left(P + \frac{1}{P}\right)^2$

5. यदि $\left(x - \frac{1}{x}\right) = 12$ भए मान निकाल :

(क) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (ख) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

6. सरल गर :

(क) $(3c + 2d)^2 + (5c - 6d)^2$ (ख) $17(k-5)^2 - 21(k - 5)(k + 6)$

7. गुणनफल निकाल :

(क) $(g+h)(g^2 - gh + h^2)$ (ख) $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$ (ग) $(\ell-m)(\ell^2 + \ell m + m^2)$

8. यदि $e + \frac{1}{e} = 11$ भए प्रमाणित गर :

(क) $e^2 + \frac{1}{e^2} = 119$ (ख) $\left(e - \frac{1}{e}\right)^2 = 117$

9. यदि $f - \frac{1}{f} = 15$ भए प्रमाणित गर :

(क) $f^2 + \frac{1}{f^2} = 227$ (ख) $\left(f + \frac{1}{f}\right)^2 = 229$

एकाइ 23

घाताङ्क (Indices)

23.1 घाताङ्कका नियमहरू (Laws of Indices)

1. घात र घाताङ्क

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

तल एउटै गुणनखण्डलाई लगातार गुणन गर्ने तरिका सम्बन्धी ढाँचा दिइएको छ, यसलाई पूरा गर ।

गुणन खण्ड	छोटकरी रूप	पढ्ने तरिका
2 x 2 = 4 (दुईओटा 2 को गुणनफल)	$2^2 = 4$	2 को घाताङ्क 2
2 x 2 x 2 (तीनओटा 2 को गुणनफल)	$2^3 = 8$	2 को घाताङ्क 3
2 x 2 x 2 x 2 (4 ओटा 2 को गुणनफल)	$2^4 = 16$	2 को घाताङ्क 4
.....(.....)	... = ...	.....
.....(.....)	... = ...	.....
2 x 2 x 2 .....(n ओटा 2 को गुणन फल)	$2^n = 2^n$	2 को घाताङ्क 2
a x a x a .....(n ओटा a को गुणन फल)	a^n	a को घाताङ्क n

यहाँ 2^3 मा 2 आधार हो भने 3 घाताङ्क हो ।

त्यस्तै a^n मा a आधार हो भने n घाताङ्क हो ।

यसलाई तल अझ स्पष्टका साथ देखाइएको छ :

2^3 → घाताङ्क → आधार	a^n → घाताङ्क → आधार

1. यसरी एउटै सङ्ख्या लगातार धेरै पटक गुणन गर्नुपर्ने क्रियालाई जनाउन घाताङ्क (exponents) को प्रयोग गरिन्छ ।
2. a^n मा a लाई आधार र n लाई घाताङ्क भनिन्छ । त्यस्तै गरी a^n लाई घात (power) भनिन्छ । यहाँ a धनात्मक वा भिन्नात्मक जे हुन पनि सक्छ ।

2. घाताङ्कका नियमहरू

नियम 1: एउटै आधार भएका घातहरूको गुणन : ($a^m \times a^n = a^{m+n}$)

तलको क्रियाकलापको ढाँचा अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तल एउटै आधार भएका घातहरूको गुणन गर्ने तरिकाको ढाँचा दिइएको छ, यसलाई पूरा गर ।

$2^1 \times 2^1 = 4 = 2^2 = 2^{1+1}$	$3^1 \times 3^1 = 9 = 3^2 = 3^{1+1}$
$2^1 \times 2^2 = 8 = 2^3 = 2^{1+2}$	$3^1 \times 3^2 = 27 = 3^{1+2}$
.....	.....
.....	.....
$2^1 \times 2^n = 2^{1+n} = 2^{n+1}$	$3^1 \times 3^n = 3^{1+n} = 3^{n+1}$
$a^1 \times a^n = a^{1+n}$	$b^1 \times b^n = b^{1+n} =$ .....
$a^m \times a^n =$	$b^m \times b^n =$ .....

(ख) अब माथिको तालिकाका आधारमा एउटै आधार भएका घातहरूको गुणन गर्दा बन्ने घाताङ्कको नियम पत्ता लगाऊ । आफ्नो नियमलाई साथीसँग छलफल गर र निष्कर्षलाई तलका नियमसँग दाँजेर हेर :

घाताङ्कको नियम 1 : $a^m \times a^n = a^{m+n}$ हुन्छ । जहाँ m र n पूर्ण सङ्ख्या हुन् ।

एउटै आधार भएका घातहरूको गुणन गर्दा आधार उही रहन्छ । तर घाताङ्कहरू भने जोडिन्छन् ।

नियम 2: एउटै आधार भएका घातहरूको भाग : ($a^m \div a^n = a^{m-n}$)

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तल एउटै आधार भएका घातहरूको भाग गर्ने तरिकाको ढाँचा दिइएको छ । यसलाई पूरा गर :

$2^2 \div 2^1 = \frac{2 \times 2}{2} = 2^1 = 2^{2-1}$	$3^2 \div 3^1 = \frac{3 \times 3}{3} = 3^1 = 3^{2-1}$
$2^3 \div 2^1 = \frac{2 \times 2 \times 2}{2} = 2^2 = 2^{3-2}$	$3^3 \div 3^1 = \frac{3 \times 3 \times 3}{3} = 3^2 = 3^{3-1}$
.....	.....
.....	.....
$2^n \div 2^1 =$	$3^n \div 3^1 =$ .....
$a^n \div a^1 =$	$b^n \div b^1 =$ .....
$a^m \div a^n =$	$b^m \div b^n =$ .....

अब माथिको तालिकाको आधारमा एउटै आधार भएका घातहरूको भाग गर्दा बन्ने घाताङ्कको नियम पत्ता लगाऊ ।

घाताङ्कको नियम 2 : $a^m \div a^n = a^{m-n}$ हुन्छ । जहाँ $a \neq 0$, $m > n$ **तथा** m र n दुवै धनात्मक सङ्ख्या हुन् । एउटै आधार भएका घातहरूको भाग गर्दा आधार उही रहन्छ तर अंशको घाताङ्कबाट हरको घाताङ्क घटाइन्छन् ।

नियम 3: शून्य घाताङ्क : ($a^0 = 1$)

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तल एउटै आधार र शून्य घाताङ्कको ढाँचा दिइएको छ । यसलाई पुरा गर :

$2 \div 2 = \frac{2}{2} = 1 = 2^{1-1} = 2^0$	$3 \div 3 = \frac{3}{3} = 1 = 3^{1-1} = 3^0$
$2^2 \div 2^2 = \frac{2 \times 2}{2 \times 2} = 1 = 2^{2-2} = 2^0$	$3^2 \div 3^2 = \frac{3 \times 3}{3 \times 3} = 1 = 3^{2-2} = 3^0$
$2^3 \div 2^3 =$	$3^3 \div 3^3 =$
.....	.....
.....	.....
$2^m \div 2^m =$	$3^n \div 3^n =$
$a^m \div a^m =$	$b^n \div b^n =$

(ख) अब माथिको तालिकाको आधारमा घाताङ्क शून्य भएका घातको घाताङ्कको नियम पत्ता लगाऊ ।

घाताङ्कको नियम 3 : $a^0 = 1$ हुन्छ । जहाँ $a \neq 0$ छ । शून्यबाहेक कुनै पनि सङ्ख्याको घाताङ्क शून्य छ भने त्यसको मान 1 हुन्छ ।

तलका उदाहरणहरू अध्ययन गरी आफूले पनि समाधान गर्ने प्रयास गर :

उदाहरण 1

तलका लगातार गुणन क्रियालाई घाताङ्कमा व्यक्त गर :

(क) (-4) x (-4) x (-4) x (-4)

(ख) (-5y) x (-5y)x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y)

समाधान

(क) (-4) x (-4) x (-4) x (-4) = $(-4)^4 = (4)^4$ [∵ - लाई चार पटक गुणन गर्नु भनेको '+' हो ।]

(ख) (-5y) x (-5y)x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) = $(-5y)^9 = -(5y)^3$

[- लाई तीन पटक गुणन गर्दा '-' नै हुन्छ ।]

उदाहरण 2

गुणनफल निकाल :

(क) $3^5 \times 5^2$ (ख) $(5a)^2 \times (2b)^3$

समाधान

(क) $3^5 \times 5^2 = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (5 \times 5) = 243 \times 25 = 6075$

(ख) $(5a)^2 \times (2b)^3 = (5a \times 5a) \times (2b \times 2b \times 2b) = 25a^2 \times 8b^3 = 200a^2b^3$

उदाहरण 3

9000 लाई 10 को घातको रूपमा व्यक्त गर :

समाधान

यहाँ $9000 = 9 \times 1000 = 9 \times (10)^3 = 9 \times 10^3$

उदाहरण 4

864 लाई रूढ खण्डीकरण गरी घातको रूपमा व्यक्त गर :

समाधान

यहाँ, 864 को रुढ गुणनखण्ड निकाल्दा :

2 | 864 2 | 432 2 | 216 2 | 108 2 | 54 3 | 27 3 | 9 3	यहाँ, $864 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ $= 2^5 \times 3^3$

उदाहरण 5

घाताङ्कको नियम प्रयोग गरी सरल गर :

(क) $5q^2 \times 15q^9$ (ख) $\frac{y^9 \times y^5}{y^8}$ (ग) $\frac{15b^2 \times 20b^{10}}{55b^{12}}$

समाधान

(क) $5q^2 \times 15q^9 = 75q^{2+9} = 75q^{11}$ $[\because a^m \times a^n = a^{m+n}]$

(ख) $\frac{y^9 \times y^5}{y^8} = \frac{y^{9+5}}{y^8}$ $[\because a^m \times a^n = a^{m+n}]$

$= \frac{y^{14}}{y^8} = y^{14-8}$ $[\because a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}]$

$= y^6$

(ग) $\frac{15b^2 \times 20b^{10}}{150b^{12}}$ $[\because a^m \times a^n = a^{m+n}]$

$= 2b^{12-12}$ $[\because a^m \div a^m = a^{m-n}]$

$= 2b^0$

$= 2 \times 1$ $[\because a^0 = 1]$

$= 2$

उदाहरण 6

मान पत्ता लगाऊ :

(क) यदि $z = 5$ भए $z^5 = ?$

(ख) यदि $a = 4$ र $b = 3$ भए $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$

(ग) यदि $x = 15$ र $y = 20$ भए $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$

समाधान

(क) यहाँ $z^5 = (5)^5 = 3125$

(ख) यहाँ $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{4^2 + 3^2}{4 + 3} = \frac{16 + 9}{7} = \frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$

(ग) यहाँ, $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} = \frac{(x - y)^2}{(x - y)}$

$= (x-y)^{2-1}$ $[\because a^m \div a^n = a^{m-n}]$

$= x - y$

$= 15 - 20$

$= -5$

अभ्यास 23.1

1. **तलका हिसाबलाई घाताङ्कका रूपमा व्यक्त गर :**

(क) 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 (ख) (-15) x (-15) x (-15) x (-15)

(ग) (3x) x (3x) x (3x) (3x) (घ) (-64) x (-64) x (-64) x (-64) x (-64) x (-64)

2. **तलका प्रत्येक घातलाई लगातार गुणन क्रियामा व्यक्त गर :**

(क) 6^3 (ख) 3^{15} (ग) $(-6)^8$ (घ) $(2x)^7$ (ङ) $(-2b)^9$

3. **तलका प्रत्येक सङ्ख्यालाई 10 को घातमा व्यक्त गर :**

(क) 100 (ख) 200 (ग) 5000 (घ) 3,50000 (ङ) 6,90,00,000

4. **मान पत्ता लगाऊ :**

(क) 2×10^2 (ख) 5×10^5 (ग) $15 \times (-10)^3$ (घ) $18 \times (2^6)$ (ङ) $5 \times (-5)^3$

(च) $2^3 \times 4^2$

5. **सानो र ठुलो छुट्याऊ :**

(क) 3^2 वा 2^3 (ख) 5^3 वा 3^5 (ग) 3^4 वा 4^3 (घ) 2^{10} वा 10^2 (ङ) 0^{100} वा 100^1

(च) 2^8 वा 10^3

6. **रूढ खण्डीकरण गरी घातको रूपमा व्यक्त गर :**

(क) 64 (ख) 500 (ग) 1256 (घ) 1728 (ङ) 864000

7. **घाताङ्कको नियमहरू प्रयोग गरी सरल गर र घाताङ्कमै उत्तर लेख :**

(क) $3^5 \times 3^2$ (ख $5^8 \times 5^4$ (ग) $x^3 \times x^5$ (घ) $a^2 \times a^{(-3)}$ (ङ) $(x)^3 \times (x)^6$

(च) $(-b)^3 \times (-b)^5$ (छ) $\frac{q^3 \times q^5}{q^3}$ (ज) $\frac{(5x)^6 \times (5x)^7}{(5x)^{11}}$

8. **तलका प्रत्येक अवस्थामा मान पत्ता लगाऊ :**

(क) 2^0 (ख) 2×100^0 (ग) $(-5)^0$ (घ) x^0 (ङ) $105y^0$ (च) $\frac{2m^{17} \times m^3}{m^{20}}$

9. **मान पत्ता लगाऊ :**

(क) यदि y = 3 भए $y^3 = ?$ (ख) यदि $x = 5$ भए $17x^2 = ?$

(ग) यदि a = 10, b = 2 भए $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a - b} = ?$

(घ) यदि x = 5 र y = 3 $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} = ?$ (ङ) यदि $\ell = 5$ भए $\frac{l^2 \times l^{10} \times l^7}{l^{19}} = ?$

एकाइ 24

समीकरण, असमानता र लेखाचित्र

(Equation, Inequality and Line Graph)

24.1 एक चलयुक्त रेखीय समीकरणका समस्या (Problems of linear Equation on in One Variables)

1. एक चलयुक्त रेखीय समीकरणको परिचय

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) $y + 5 = 7$ मा कतिओटा चल राशि छन् ? कतिओटा अचल राशि छन् ?

(ख) के $y + 5 = 7$ गणितीय खुला वाक्य हो ? कसरी ?

(ग) y को मान कति हुँदा खुला वाक्य $y + 5 = 7$ साँचो वाक्य हुन्छ ?

यहाँ, $y + 5 = 7$ मा एउटा मात्र चल राशि y छ । (+5) र (+7) अचल राशि हुन् । $y + 5 = 7$ गणितीय खुला वाक्य हो । यसमा y को घाताङ्क 1 छ । $y + 5 = 7$ एउटा समीकरण पनि हो । यस्तो समीकरणलाई एक चलयुक्त रेखीय समीकरण भनिन्छ ।

(घ) माथिको छलफलका आधारमा एक चलयुक्त रेखीय समीकरणको परिभाषा लेख्न सक्छौ ? लेखेर साथीसँग छलफल गर । निष्कर्षलाई तलको परिभाषासँग दाँजेर हेर :

बराबर चिह्न '=' समावेश भएको, घाताङ्क 1 भएको तथा एउटा मात्र चल राशि भएको समीकरणलाई एक चलयुक्त रेखीय समीकरण भनिन्छ ।

(ङ) $y + 5 = 7$ जस्तै अन्य 5 ओटा एक चलयुक्त रेखीय समीकरण लेखेर देखाऊ ।

2. एक चलयुक्त रेखीय समीकरणको समाधान

कुनै एउटा एक चलयुक्त समीकरण $y + 5 = 7$ लेऊ ।

(क) y को मान कति हुँदा $y + 5 = 7$ हुन्छ ?

(ख) अब $y + 5 = 7$ बाट y को मान निकाल्ने छोटो तरिका कुन होला ?

यहाँ $y + 5 = 7$ छ ।

अथवा, $(y + 5) - 5 = 7 - 5$ [दुवैतिर 5 घटाउँदा]

अथवा, $y + 5 - 5 = 2$

अथवा, $y + 0 = 2$

अथवा, $y = 2$

जाँचेर हेर्दा,

y को मान 1, 2, 3, 4, 5 राख्दै जाऔं ।

$y + 5 = 7$

$1 + 5 = 7$ मान्य भएन ।

$\boxed{2 + 5 = 7 \quad \text{मान्य भयो ।}}$

$3 + 5 = 7$ मान्य भएन ।

जाँचेर हेर्दा,

$y + 5 = 7$

अथवा $2 + 5 = 7$

अथवा $7 = 7$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 1

हल गर र उत्तर जाँचेर हेर : $17x - 5 = 15$

समाधान

हल गर्दा	जाँचेर हेर्दा
$17x - 5 = 19$ अथवा $(17x - 5) + 5 = 19 + 5$ [दुवै तिर 5 जोड्दा] अथवा, $17x - 5 + 5 = 34$ अथवा $17x = 34$ अथवा $\frac{17x}{17} = \frac{34}{17}$ [दुवैतिर 17 ले भाग गर्दा] अथवा $x = 2$	$17x - 5 = 29$ अथवा, $17 \times 2 - 5 = 29$ अथवा, $34 - 5 = 29$ अथवा, $29 = 29$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 2

तलको समस्या हल गर र उत्तर जाँचेर हेर :

$$17k - \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$$

समाधान

हल गर्दा	जाँचेर हेर्दा
$17k - \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$ अथवा, $17 - \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{3} + \frac{3}{5}$ [दुवैतिर $\frac{3}{5}$ जोड्दा] अथवा, $17k = \frac{25+9}{15}$ अथवा, $\frac{17k}{17} = \frac{34}{15 \times 17}$ [दुवैतिर 17 ले भाग गर्दा] $k = \frac{2}{15}$	$17k - \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$ अथवा, $17 \times \frac{2}{15} - \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$ अथवा, $\frac{34-9}{15} = \frac{5}{3}$ अथवा, अथवा, $\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 3 **हल गर र जाँचेर हेर :** $10n-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}n+\frac{2}{3}$

हल गर्दा	जाँचेर हेर्दा
समाधान : $10n-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}n+\frac{2}{3}$	$10n-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}$
अथवा, $10n-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}n+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ [दुवैतिर $\frac{1}{4}$ जोड्दा]	अथवा, $10\times\frac{11}{114}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{11}{114}+\frac{2}{3}$
अथवा, $10n=\frac{n}{2}+\frac{8+3}{12}$	अथवा, $\frac{220-57}{228}=\frac{11+152}{228}$
अथवा, $\frac{10n}{1}-\frac{n}{2}=(\frac{n}{2}+\frac{11}{12})-\frac{n}{2}$ [दुवैतिर $\frac{n}{2}$ घटाउँदा]	अथवा, $\frac{163}{228}=\frac{163}{228}$
अथवा, $\frac{20n-n}{2}=\frac{11}{12}$	**प्रमाणित भयो ।**
अथवा, $\frac{19n}{2}\times\frac{2}{19}=\frac{11}{12}\times\frac{2}{19}$	
अथवा, $n=\frac{11}{6x19}=\frac{11}{114}$	

उदाहरण 4

एउटा विद्यालयको कक्षा 7 मा जम्मा 27 विद्यार्थी रहेछन् । यदि छात्राको सङ्ख्या छात्रको भन्दा 3 ले बढी रहेछ भने,

(क) विद्यार्थी सङ्ख्या जनाउने एउटा समीकरण लेख ।

(ख) छात्र र छात्राको वास्तविक सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, मानौँ छात्रको सङ्ख्या = x छ ।

त्यसैले छात्राको सङ्ख्या = x + 3

(क) अब, छात्र + छात्रा = जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या

अथवा x + (x+3) = 27

अथवा x + x + 3 = 27

अथवा, 2x + 3 = 27 दिइएको समीकरण हो ।

(ख) $2x + 3 = 27$ लाई हल गर्दा,

अथवा, $2x + 3 - 3 = 27 - 3$ [दुवैतिर 3 घटाउँदा]

अथवा, $2x = 24$

अथवा, $\frac{2x}{2} = \frac{24}{2}$ [दुवैतिर 2 ले भाग गर्दा]

अथवा, $x = 12$

त्यसैले छात्र सङ्ख्या = 12 जना

छात्राको सङ्ख्या $= x + 3 = 12 + 3 = 15$ जना

उदाहरण 5

एउटा आयतको चौडाइ लम्बाइभन्दा 5 cm ले कम छ । यदि परिमिति 30cm भए,

(क) सो आयतको लम्बाइ र चौडाइ जनाउने समीकरण लेख ।

(ख) सो आयतको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

(ग) सो आयतको क्षेत्रफल कति होला ?

समाधान

(क) यहाँ आयतको लम्वाइ (ℓ) =x cm (मानौँ)

त्यसैले चौडाइ $(b) = x - 5$ हुन्छ ।

परिमिति $(p) = 30$ cm छ ।

अब सूत्र $p = 2(\ell + b)$ अनुसार

अथवा $2\{x + (x - 5)\} = 30$

अथवा $2(x + x - 5) = 30$ अथवा, $2(2x - 5) = 30$

अथवा, $4x - 10 = 30$

अथवा, $2x - 5 = 30$ चाहिएको समीकरण हो ।

(ख) $4x - 10 = 30$ लाई हल गर्दा,

अथवा $4x - 10 = 30$

अथवा, $4x - 10 + 10 = 30 + 10$ [दुवैतिर 10 जोड्दा]

अथवा, $4x = 40$

अथवा $\frac{4x}{4} = \frac{40}{4}$ [दुवैतिर 4 ले भाग गर्दा]

अथवा, $x = 10$cm

त्यसैले लम्बाइ $(\ell) = x = 10$ cm

अब चौडाइ $(b) = (x - 5) = (10 - 5)$ cm = 5 cm

(ग) क्षेत्रफल (A) = ?

सूत्रअनुसार, आयतनको क्षेत्रफल (A) = ℓ x b

= (10 cm) x (5 cm) = 50 cm^2

उदाहरण 6

दुई ओटा क्रमैसँग आउने पूर्ण सङ्ख्याहरूको योगफल 21 छ भने ती दुई सङ्ख्याहरू कुन कुन रहेछन् ? पत्ता लगाऊ ।

समाधान

मानौँ, एउटा सङ्ख्या = x भए अर्को सङ्ख्या = $x + 1$ हुन्छ ।

दिएअनुसार $x + (x+1) = 21$

अथवा $2x + 1 = 21$

अथवा $2x = 21 - 1$

अथवा $x = \frac{20}{2}$

अथवा $x = 10$

अब, एउटा सङ्ख्या, $x = 10$

अर्को सङ्ख्या = $x+1 = 10+1 = 11$

तसर्थ ती दुई सङ्ख्याहरू 10 र 11 हुन् ।

उदाहरण 7

आइतमान तामाङ उसको बाबुभन्दा 22 वर्षले कान्छो छ । 5 वर्ष पहिले बाबुको उमेर उसको उमेरभन्दा दोब्बर थियो । अब उसको हालको उमेर पत्ता लगाऊ ।

समाधान

मानौँ, आइतमानको हालको उमेर = x वर्ष छ ।

त्यसैले बाबुको उमेर = $x + 22$ वर्ष हुन्छ ।

5 वर्ष पहिले आइतमानको उमेर = $(x - 5)$ वर्ष

5 वर्ष पहिले बाबुको उमेर = $x +22- 5= x + 17$ वर्ष

अत: $2 (x-5) = 1(x+17)$

अथवा, $2x - 10 = x + 17$

अथवा, $x = 27$ वर्ष

तसर्थ, आइतमानको हालको उमेर = 27 वर्ष

बाबुको उमेर = $x + 22 = 27+22 = 49$ वर्ष

अभ्यास 24.1

1. तलका समीकरणहरू बराबरी तथ्य प्रयोग गरी हल गर । उत्तर पनि जाँचेर देखाऊ :

(क) $a + 3 = 15$ (ख) $x - 7 = 78$ (ग) $7m = 8m + 6$

(घ) $-8x = 2x - 4$ (ङ) $\frac{3}{5}y = 6 + 7y$ (च) $1.2 + 6\ell = -2.1\ell - 1.2$

(छ) $5.4x - 1 = \frac{x}{3} + 7.5$

2. हल गर र उत्तर पनि जाँचेर देखाऊ :

(क) $5(p - 10) = 10 + 7p$ (ख) $(10 - k)6 = -8k - 10$

(ग) $4.3 - 3(4r - 3) = 0.7(6r - 10)$

(घ) $\frac{2}{3}(3 - 5t) = \frac{6}{2}(-2 - t)$

3. तलका भनाइहरू सत्य वा असत्य के हुन्, छुट्याऊ :

(क) $x + 5 = 4$ मा x चल राशि हो ।

(ख) $x - 2 = 5$ मा 5 र 2 चल राशिहरू हुन् ।

(ग) $y + 10 = 0$ दुई चलयुक्त समीकरण हो ।

(घ) $-2 + p = 3$ एक चलयुक्त खुला वाक्य हो ।

4. तलका प्रश्नहरूको जवाफ लेख :

(क) बराबर चिह्न प्रयोग भएको र एउटा मात्र चल राशि भएको समीकरणलाई के भनिन्छ ?

(ख) एक चलयुक्त समीकरणको अर्थ उदाहरणसहित लेख ।

(ग) $a + 2 = 10$ मा a को घाताङ्क कति हुन्छ ?

(घ) $b + 5 = 9$ साँचो वाक्य हुनका लागि b बराबर कति हुनुपर्ला ?

5. एउटा कक्षामा 28 जना विद्यार्थी रहेछन् । छात्राको सङ्ख्या छात्रको भन्दा 4 ले बढी रहेछ भने,

(क) सबै विद्यार्थीलाई जनाउने एउटा समीकरण लेख ।

(ख) समीकरण हल गरी छात्र छात्राको सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

6. एउटा विद्यालयमा जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या 555 जना छन् । यदि छात्रको सङ्ख्या छात्राको भन्दा 55 ले बढी भए छात्र र छात्राको वास्तविक सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

7. एउटा घरको आयताकार आँगनको लम्बाइ, चौडाइभन्दा 2m ले बढी छ । यदि पूरा परिमिति 132m भए,

(क) सो आँगनको चल राशि प्रयोग गरी नमुना चित्र बनाऊ ।

(ख) परिमिति जनाउने समीकरण लेख ।

(ग) सो आँगनको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

(घ) सोही आँगनको क्षेत्रफल पनि पत्ता लगाऊ ।

8. एउटा क्षेत्रफल $200m^2$ भएको पार्टी प्यालेसको लम्बाइ चौडाइको दोब्बर रहेछ भने,

(क) लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

(ख) परिमिति जनाउने चल राशि प्रयोग भएको नमूना चित्र बनाऊ ।

(ग) परिमिति जनाउने समीकरण लेख ।

(घ) परिमिति निकाल ।

9. एउटा विद्यालयमा अनुसन्धानको क्रममा एक दिनको हाजिरी अभिलेख हेरिएछ, जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्याको दुई तिहाई विद्यार्थी मात्र उपस्थित हुँदा 6 जना मात्र गयल भएका रहेछन् भने,

(क) जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या जनाउने समीकरण लेख ।

(ख) उपस्थित भएका विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

10. दुई ओटा क्रमैसँग आउने पूर्ण सङ्ख्याहरुको योगफल 51 छ भने,

(क) ती सङ्ख्या जनाउने समीकरण लेख ।

(ख) ती सङ्ख्याहरू कति कति होलान् ?

11. पेम्बाले आफ्नो जन्म दिनमा साथीलाई बाँड्न दुई प्याकेट चकलेट किनेछन् । एउटा प्याकेटमा जति चकलेट छन्, त्यसको तेब्बर अर्को प्याकेटमा छन् । दुवै प्याकेटका चकलेट एकै ठाउमा जम्मा पार्दा 120 चकलेट भएछन् भने,

(क) जम्मा चकलेट जनाउने समीकरण बनाऊ ।

(ख) प्रत्येक प्याकेटमा कति कति चकलेट रहेछन् ।

12. एउटा सङ्ख्या अर्को सङ्ख्याको तेब्बर छ । यदि दुवैको योगफल 48 भए,

(क) दुवै सङ्ख्याको योगफल जनाउने समीकरण लेख ।

(ख) ती दुई सङ्ख्या कति कति होलान् ?

13. एउटा आयतकार रुमालको चौडाइ, लम्बाइभन्दा 10cm कम रहेछ । यदि परिमिति 110cm भए,

(क) परिमिति जनाउने समीकरण लेख ।

(ख) लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

14. माथि प्रश्न नं. 1 देखि 7 सम्म दिइए जस्तै एउटा/एउटा समस्या बनाऊ । साथीहरूसँग छलफल गरी समाधान गर ।

24.2 असमानतालाई सङ्ख्या रेखामा देखाउने
(Representation of Inequality in Number)

तलको क्रियाकलाप हेर र छलफल गर :

(क) यदि a र b दुई ओटा पूर्णाङ्क हुन् भने a र b बिचमा के के गणितीय सम्बन्ध हुन सक्छ ?

कि त a र b बराबर हुन्छ कि त a र b बराबर हुँदैन । a र b बराबर हुँदैन भने कि त a > b हुन्छ कि a < b हुन्छ । कुनै पूर्णाङ्क 3 लिऔँ, अब भन त 3 भन्दा ठुला कति सङ्ख्या हुन सक्छन् ?

4 > 3, 5> 3

6> 3, 10 > 3

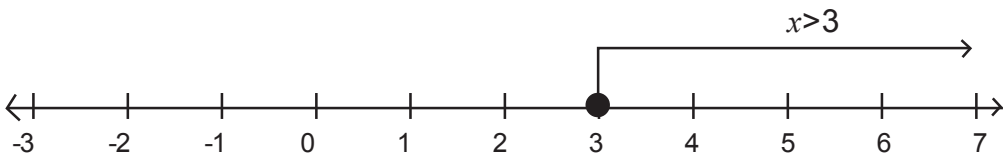
$x > 3$

(ख) $x > 3$ लाई सङ्ख्या रेखामा देखाऊ :

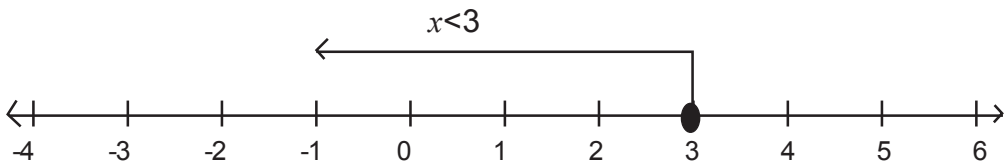
3 भन्दा ठुला सङ्ख्यालाई x ले किन जनाइए होला ? x चल राशि भएको र 3 भन्दा ठुला धेरै सङ्ख्या भएकाले $x > 3$ लेखिएको हो । यहाँ $x > 3$ मा 3 भन्दा ठुला सङ्ख्याहरू मात्र पर्ने भएकाले 3 मा थोप्लो (O) मात्र लगाइएको छ ।

(ग) $x \geq 3$ र $x \leq 3$ लाई सङ्ख्या रेखामा देखाऊ ।

यहाँ x > 3 भनेको x चल राशि 3 वा 3 भन्दा ठुलो छ भन्ने बुझाउँछ । त्यस्तै, $x < 3$ भनेको x चल राशी 3 वा 3 भन्दा सानो भन्ने बुझाउँछ । तलको सङ्ख्या रेखामा हेरौँ ।



$x > 3$ मा 3 पनि पर्ने भएकाले सङ्ख्या रेखाको 3 लाई गोलो थोप्ला लगाई रङ्गाइएको हो ।



$x < 3$ मा 3 पनि पर्ने भएकाले सङ्ख्या रेखामा 3 लाई गोलो थोप्ला लगाई रङ्गाइएको हो ।

महत्त्वपूर्ण तथ्यहरू

(क) यदि a र b दुई ओटा पूर्णाङ्क हुन् र जसमा a > b र c अर्को पूर्णाङ्क हो भने -

जोड तथ्य : $(a + c) > (b + c)$

घटाउ तथ्य : $(a - c) > (b - c)$

गुणन तथ्य : $ac > bc$ जहाँ c धनात्मक छ ।

भाग तथ्य : $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}, \quad c \neq 0$ जहाँ c धनात्मक छ ।

$ac < bc$ जहाँ c ऋणात्मक छ ।

$\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad c \neq 0$ जहाँ c ऋणात्मक छ ।

(ट्रिकोटोमी (trichotomy)को < वा > चिह्न समावेश भएको गणितीय वाक्यको दुवैतिर ऋणात्मक पूर्णाङ्कले गुणन वा भाग गर्दा वाक्यमा भएका चिह्नहरू (< वा >) बदलिन्छन् ।)

(ख) यदि दुईओटा पूर्णाङ्क a र b मा a = b छ र अर्को कुनै पूर्णाङ्क c छ भने -

$(a + c) = (b + c)$ (बराबरी योग तथ्य)

$(a - c) = (b - c)$ (बराबरी घटाउ तथ्य)

$ac = bc$ (बराबरी गुणन तथ्य)

$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ जहाँ $c \neq 0$ (बराबरी भाग तथ्य)

उदाहरण 1

$x + 1 > 3$ लाई हल गरी सङ्ख्या रेखामा देखाऊ :

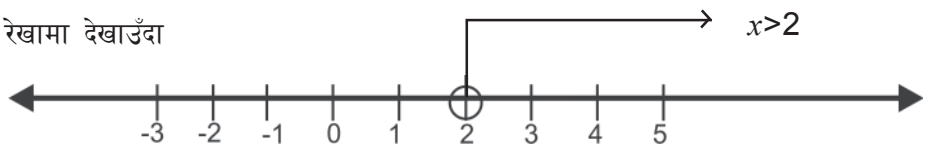
समाधान

यहाँ $x + 1 > 3$ छ। अब दुवैतिर 1 लाई घटाउँदा,

$x+1 -1>3 - 1$

or, $x > 2$

सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा



उदाहरण 2

$2x - 3 < - 7$ लाई हल गर र सङ्ख्या रेखामा देखाऊ :

समाधान

यहाँ, $2x - 3 < - 7$ छ । (दुवैतिर +3 जोड्दा)

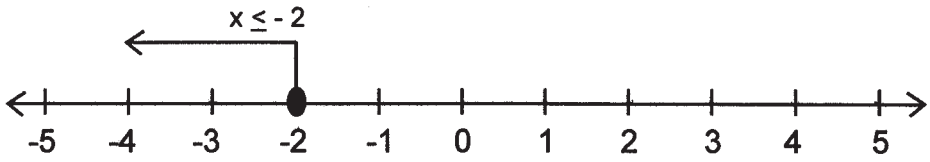
अथवा, $2x\ 3 + 3 \leq -7 + 3$

अथाव, $2x \leq 4$

अथवा, $-\frac{2}{2}x \leq -\frac{4}{2}$

अथवा, $x \leq -2$

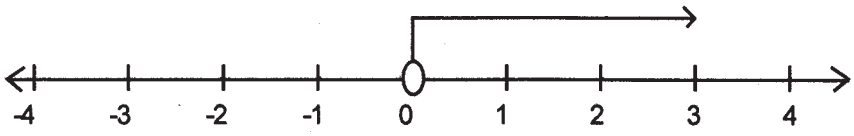
अब, सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा



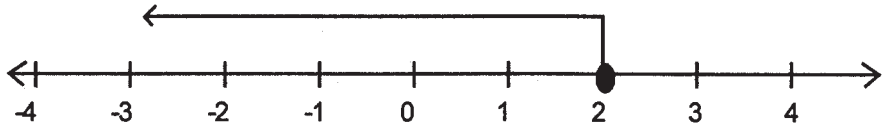
उदाहरण 3

तल दिइएको सङ्ख्या रेखाका आधारमा असमानता लेख :

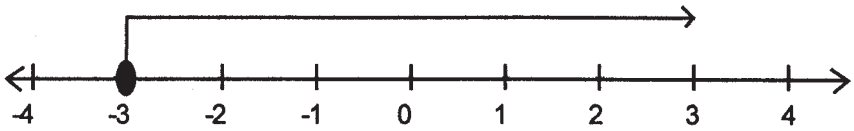
(क)



(ख)



(ग)



समाधान

यहाँ (क) मा 0 मा मात्र गोलो लगाइएको छ तर गोलो नरङ्गाइएकाले 0 त्यस असमानतामा पर्दैन । अब यस सङ्ख्या रेखामा 0 भन्दा दायाँतिर Arrow दिइएकाले 0 भन्दा ठुला सङ्ख्या पर्दछन् । त्यसैले यसलाई असमानता चिह्न प्रयोग गर्दा $x>0$ लेखिन्छ ।

यहाँ (ख) मा 2 मा गोलो लगाई रङ्गाइकाले 2 पनि असमानतामा पर्छ । 2 भन्दा बायाँतिर Arrow लगाइएकाले 2 र 2 भन्दा साना सङ्ख्याहरू त्यस असमानतामा पर्दछन् ।

त्यसैले $x \leq 2$ हुन्छ ।

त्यस्तै (ग) मा -3 मा गोलो लगाई रङ्गाइकाले -3 र -3 भन्दा ठुला सङ्ख्याहरू त्यस असमानतामा पर्दछन् ।

त्यसैले $x \geq -3$ हुन्छ ।

अभ्यास 24.2

1. तलका प्रत्येक असमानतालाई छुट्टाछुट्टै सङ्ख्या रेखा बनाई सङ्ख्या रेखामा रङ लगाई देखाऊ :

(क) $x>1$ (ख) $x<-2$ (ग) $x \geq 5$ (घ) $x \leq -4$ (ङ) $x + 5 > -1$

(च) $x - 3 < 6$ (छ) $2x + 5 \geq -1$ (ज) $5x + 3 \leq 18$ (झ) $3x + 2 \geq x + 6$

(ञ) $2x-5 \geq - x + 10$

2. तल दिइएका ट्रिकोटोमी (trichotomy) का नियमअनुसार तलका भनाइहरू ठिक वा बेठिक के हुन्, छुट्याऊ :

2, 3 र -4 पूर्णाङ्कहरू हुन् भने,

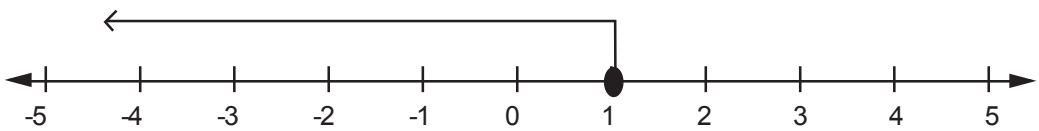
(क) $2 + (-4) = 3 + (-4)$ (ख) $2x (-4) = 3x (-4)$ (ग) $2 + (-4) > 3 + (-4)$

(घ) $2 + (-4) <3 + (-4)$ (ङ) $2-(-4)>3-(-4)$ (च) $2x(-4) > 3x(-4)$

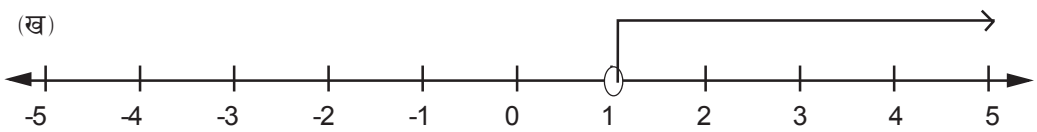
(छ) $2x(-4) < 3x(-4)$ (ज) $2\div(-4) > 3\div (-4)$

3. तल दिइएका सङ्ख्या रेखाका आधारमा असमानता लेख :

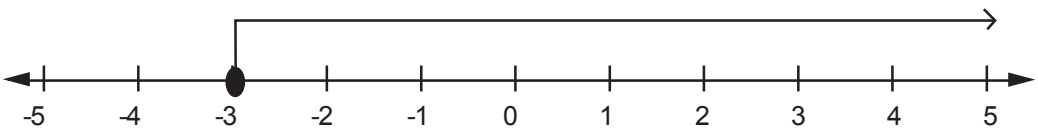
(क)



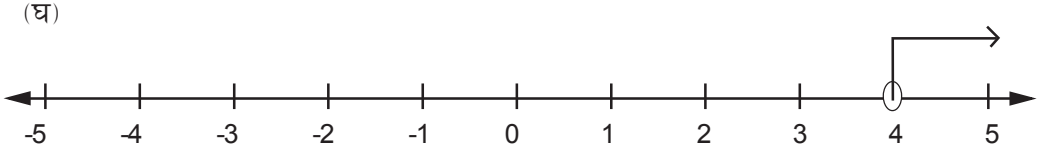
(ख)



(ग)



(घ)

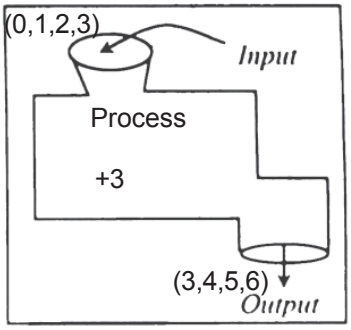


24.3 फलन यन्त्रबाट दुई चलयुक्त रेखीय समीकरणमा चल राशिको सम्बन्ध

(Relation of Simultaneous Equaiton in Two Variables from Function Machine)

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तल दिइएको मेसिनमा 0 राख्दा मेसिनले +3 बनाएर निकाल्यो । त्यस्तै 1, 2, 3 राख्दा क्रमश: 4, 5, 6



निकाल्यो । यहाँ Input = {0.1, 2, 3} र Output = {3, 4, 5, 6} हुन्छ ।

यहाँ के प्रक्रियाले गर्दा मेसिनले Inputs (0, 1, 2, 3) लाई Outputs (3, 4, 5, 6) बनाए होला ?

यहाँ, मेसिनले गरेको कार्य हेरौँ :

0+3 = 3

1+3 = 4

2+3 = 5

3+3 = 6

सबै Input मा 3 जोड्दा output आउँछ । यही जोड्ने क्रियालाई मेसिनको प्रक्रिया भनिन्छ । मेसिनमा राखेको अङ्कलाई लगानी (input) भनिन्छ । मेसिनले दिइएको अङ्कलाई उत्पादन (output) भनिन्छ ।

माथिको क्रियाकलापमा (input) लाई x ले जनाउने हो भने उत्पादन (output) लाई y ले जनाऔँ ।

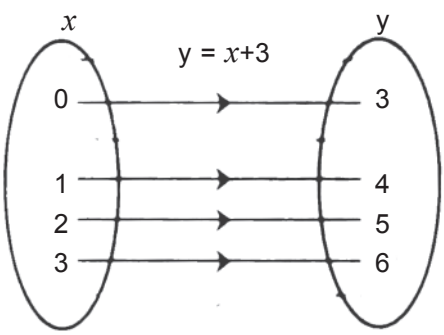
अब दुई चलयुक्त समीकरण

अब, y = x + 3 हुन्छ, जहाँ x र y दुवै चल राशी हुन् ।

माथिको क्रियाकलापलाई तालिका बनाएर पनि देखाउन सकिन्छ । जस्तै :

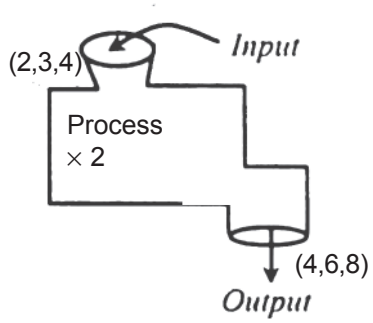
x	0	1	2	3
y	3	4	5	6

त्यस्तै माथिको क्रियाकलापलाई Arrow चिह्न दिएर दुई समूह input लाई x र output लाई y बनाएर पनि देखाउन सकिन्छ । जस्तै :



उदाहरण 1

चित्रमा देखाइएको फलन यन्त्रमा output के हुन्छ ?



समाधान

यहाँ, Input मा 2, 3, 4 छन् ।

मेसिनले 2 गुणा वा x 2 बनाएर output दिन्छ ।

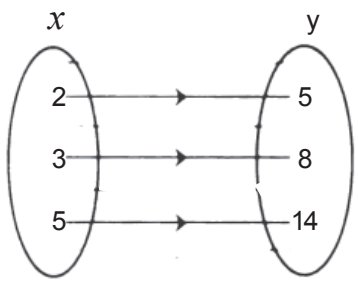
2 लाई 2 ले गुणा गर्दा 4 हुन्छ । त्यसैले 2 को output 4 हुन्छ ।

4 को output 4x2 = 8 हुन्छ । अत: output हरू 4, 6, 8 हुन् ।

उदाहरण 2

तल दिइएको Arrow चित्रबाट फलन यन्त्रको प्रक्रियालाई x र y को सम्बन्धको रूपमा लेख ।

समाधान : यहाँ, Input 2 दिँदा output 5 बन्यो ।



त्यस्तै Input 3 गर्दा output 8 बन्यो

यिनीहरूबिचको सम्बन्ध हेरौँ,

5 = 2 x 3 - 1

8 = 3 x 3 -1

14 = 5 x 3 - 1

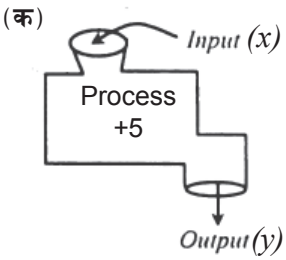
सबै Input हरूलाई 3 ले गुणन गरेर 1 घटाइएको छ ।

त्यसैले, y =3x - 1 हुन्छ ।

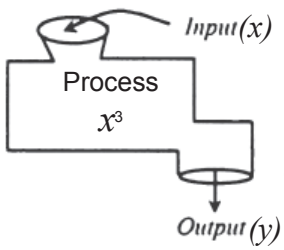
अभ्यास 24.3

1. **तलका प्रत्येक फलन यन्त्रमा 1 देखि 5 सम्मका सङ्ख्याहरू राख्दा आउने प्रतिफल (output) लाई तालिका बनाई व्यक्त गर :**

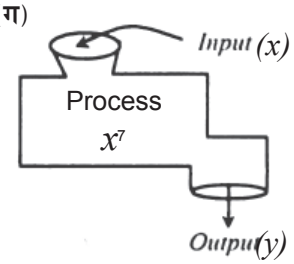
(क)



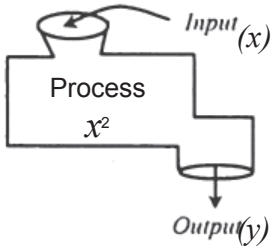
(ख)



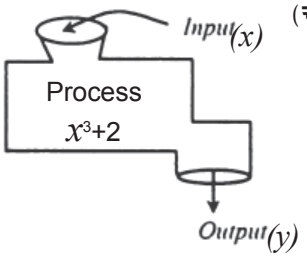
(ग)



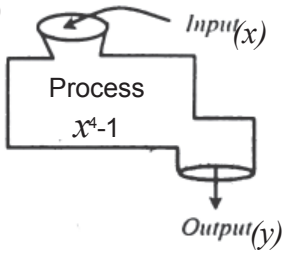
(घ)



(ङ)



(च)



2. प्रश्न नं. 1 मा Input गरेको सङ्ख्यालाई x र प्रतिफल (output) लाई y मानेर x र y बिचको सम्बन्ध गणितीय भाषामा लेखेर देखाऊ ।

3. प्रश्न नं. 1 को सम्बन्धलाई Arrow चित्र खिचेर देखाऊ ।

4. **Input र output को आधारमा खाली ठाउँमा मिल्ने सङ्ख्या राख :**

(क)

Inputs	1	2	3	4	5	8	10	15
Outputs	3	4	5	6	?	?	12	?

(ख)

Inputs	2	3	4	6	9	12
Outputs	0	1	2	?	?	10

(ग)

Inputs	4	5	6	1	2	3	9	10
Outputs	8	10	12	?	?	?	18	?

(घ)

Inputs	2	3	4	6	5	7
Outputs	7	10	13	?	?	?

(ङ)

Inputs	1	2	3	?	5	?	7	8
Outputs	4	8	12	16	20	24	28	?

5. **दिइएको सम्बन्धमा 1 देखि 5 सम्मका सङ्ख्या Input (x) गरी आउने output (y) पत्ता लगाऊ :**

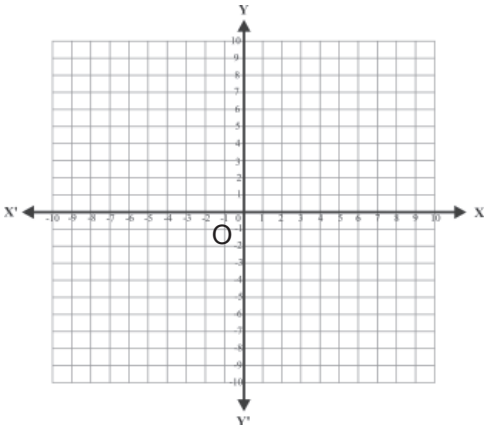
(क) $y = x + 1$ (ख) $y = x + 4$ (ग) $y = x + 7$ (घ) $y = 3x$ (ङ) $y = 4x$

(च) $y = 2x + 3$ (छ) $y = 4x + 1$ (ज) $y = 5x - 2$

24.4 दुई चलयुक्त रेखीय समीकरणको लेखाचित्र
(Graph of Simultaneous Equation in Two Variables.)

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

1. चतुर्थांशहरू (Qudrants)



दिइएको चित्रमा XOX' र YOY' आपसमा लम्ब हुने गरी O बिन्दुमा काटिएका छन् ।

XOX' लाई X- अक्ष भनिन्छ भने YOY' लाई Y- अक्ष भनिन्छ । XOX' र YOY' काटिएको बिन्दु O लाई उद्‌गम बिन्दु भनिन्छ ।
XX' र YY' ले आपसमा बाँड्दा चारओटा चतुर्थांशहरू बन्छ ।

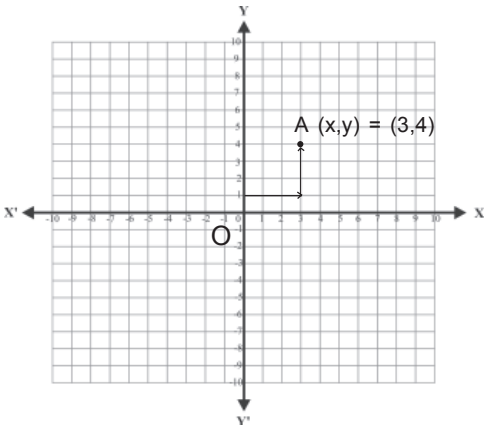
XOY लाई पहिलो चतुर्थांश भनिन्छ ।

X'OY लाई दोस्रो चतुर्थांश भनिन्छ ।

X'OY' लाई तेस्रो चतुर्थांश भनिन्छ ।

Y'OX लाई चौथो चतुर्थांश भनिन्छ ।

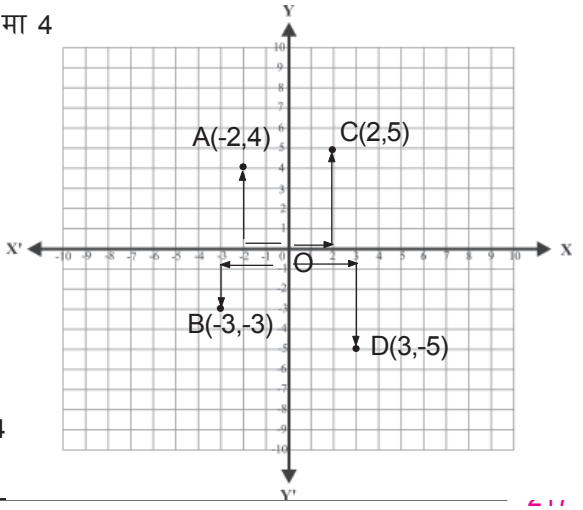
2. क्रमजोडा (Orderd of Pairs)



बिन्दु (3,4) लाई लेखाचित्रमा देखाउँदा,

उद्‌गम बिन्दुबाट X- अक्षतिर तेस्रो दुरी र Y- अक्षतिर ठाडो दुरी जनाउने कुनै बिन्दु A को जोडीलाई A(x,y) को रूपमा देखिन्छ । A(x,y) लाई क्रमजोडा भनिन्छ । जस्तै : बिन्दु A उद्‌गम बिन्दुबाट X- अक्षको दायाँ (+3) एकाइ र Y- अक्षको ठाडो रेखामा (+4) एकाइ दुरीमा पर्छन् भने यसलाई A(3,4) लेखिन्छ ।

OX मा 3 एकाइ उद्‌गम बिन्दुबाट दायाँ र OX मा 4 एकाइ ठाडो लम्ब हुने रेखा OY को बिन्दु नै हामीलाई चाहिएको बिन्दु हो ।



उदाहरण 1

बिन्दुहरू (2,5), (-2, 4), (-3,-3) र (3,-5) लाई लेखाचित्रमा देखाऊ :

माथिको लेखाचित्रमा,

(क) (-2, 4) लाई लेखाचित्रमा देखाउँदा
OX' -2 एकाइ बायाँमा जाऊ र त्यहींबाट 4

एकाइ ठाडो OY सँग समानान्तर बनाई जाऊ । त्यस बिन्दुलाई A नाम देऊ ।

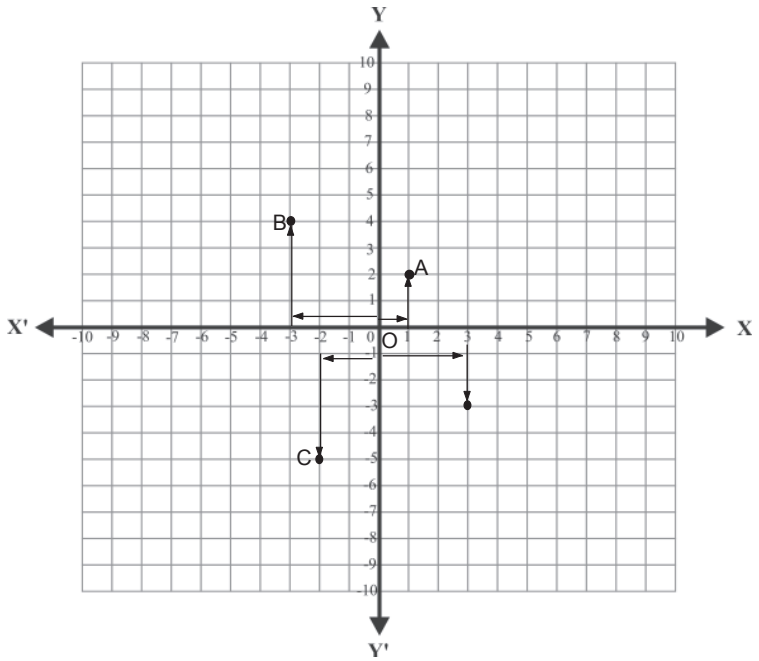
(ख) (-3, -3) मा पनि -3 एकाइ बायाँ OX' मा जाऊ । त्यसपछि -3 एकाइ तल जाऊ । त्यस बिन्दुलाई B नाम देऊ ।

(ग) बिन्दु (2,5) मा पनि 2 एकाइ उद्‌गम बिन्दुबाट दायाँ OX तिर जाऊ । 5 एकाइ ठाडो जाऊ र त्यस बिन्दुलाई C नाम देऊ ।

(घ) बिन्दु (3, -5) मा पनि 3 एकाइ उद्‌गम बिन्दुबाट दायाँ OX तिर जाऊ । -5 एकाइ तल OY' तिर जाऊ र त्यस बिन्दुलाई D नाम देऊ ।

उदाहरण 2

लेखाचित्रमा दिइएको बिन्दुहरू A, B, C र D को निर्देशाङ्क पत्ता लगाऊ :



(क) उद्‌गम बिन्दु O बाट XX' को दायाँ बिन्दु A सम्मको दुरी 1 एकाइ र उद्‌गम बिन्दुबाट बिन्दु A को YY' को ठाडो रेखासम्मको दुरी 2 एकाइ छ । त्यसैले बिन्दु A को निर्देशाङ्क A(x,y) = A(1,2) हुन्छ ।

(ख) 'क' मा जस्तै गरी बिन्दु B को निर्देशाङ्क B(x,y) = B(-3, 4) हुन्छ ।

(ग) त्यसै गरी C बिन्दुको निर्देशाङ्क C(x,y) = C(-2,-5) हुन्छ ।

(घ) त्यसै गरी बिन्दु D को निर्देशाङ्क D(x,y) = D(3,-3) हुन्छ ।

3. दुई चलयुक्त रेखीय समीकरणको लेखाचित्र

(Graph of Simultaneous Equation in Two Variables)

तलको क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

मानौँ कुनै दुई चलयुक्त समीकरण y = x + 1 छ ।

(क) यसबाट x र y का मानहरूको तालिका बनाऊ :

x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5

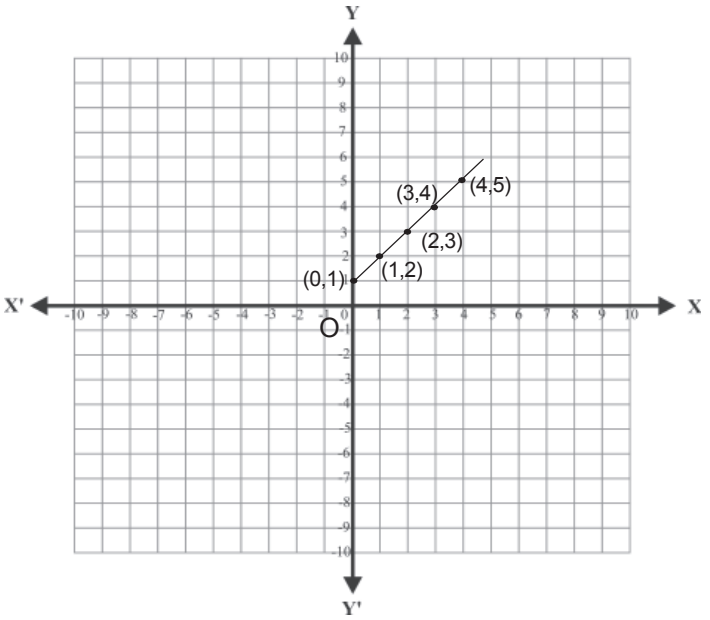
यहाँ x को सदस्यमा 1 जोड्दा y को सदस्य आउँछ ।

समूह x मा जुनसुकै अङ्क राख्न सकिन्छ तर x को समूह नै दिइएको छ भने त्यही समूहका सदस्य मात्र राख्नुपर्छ । त्यसैले समूह y का सदस्य समूह x मा भएका सदस्यमा निर्भर गर्दछन् ।

अत: समुह X का सदस्यलाई स्वतन्त्र चल राशि (independent variables) र समूह Y का सदस्यलाई पराधीन चल राशि (dependent variables) भनिन्छ ।

अब, y = x + 1 सम्बन्धमा, x को मान 0 राख्दा y को मान 1 हुन्छ ।

यहाँ, y को मान 1 हुन पहिला x को मान 0 हुनुपर्छ । अन्यथा y को मान 1 हुन सक्दैनन् ।



माथिको तालिकाबाट बनेका क्रमजोडाहरू क्रमश: लेख : (0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5) हुन् ।

(ख) माथिका क्रमजोडालाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरेर देखाऊ ।

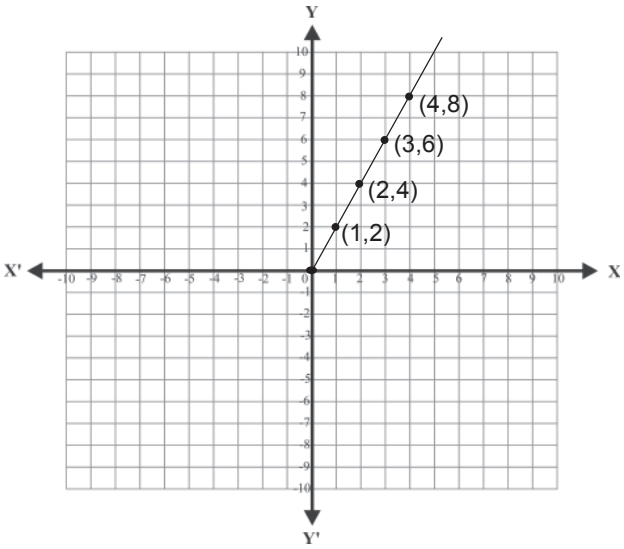
उदाहरण 3

y = 2x सम्बन्धलाई input (x) 0 देखि 4 सम्म राखी output (y) निकाल्दा बन्ने क्रमजोडालाई लेखाचित्रमा देखाऊ ।

समाधान यहाँ y= 2x लाई तालिका बनाऊ :

x	0	1	2	3	4
y	0	2	4	6	8

उक्त तालिकालाई लेखाचित्रमा देखाउँदा,



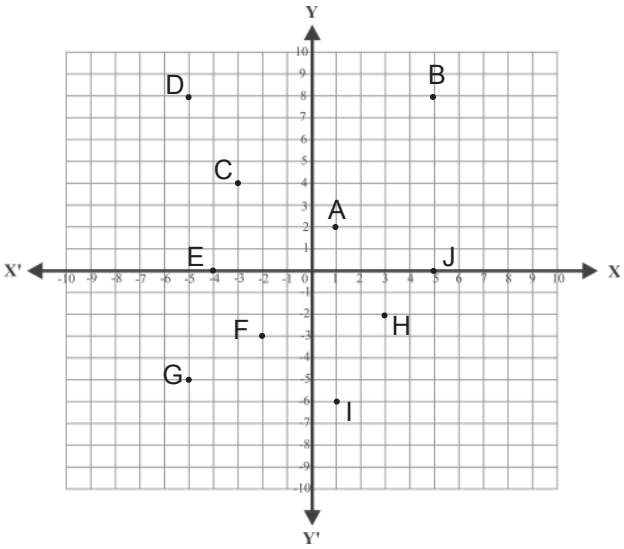
अभ्यास 24.4

1. तलका बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा देखाऊ :

(क) A(3,2) (ख) B(-2,3) (ग) C(-5,2) (घ) D(-3,-4) (ङ) E(-6,-1)

(च) F(0,6) (छ) G(-5,0) (ज) H(5,-2) (झ) I(4,1) (ञ) J(6,-6)

2. तल लेखाचित्रमा दिइएका बिन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाऊ :



3. तलका सम्बन्धमा input (x) 0 देखि 5 सम्म राखी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर :

(क) $y = x + 3$ (ख) $y = x - 2$ (ग) $y = 2x$ (घ) $y = 3x$

(ङ) $y = 2x + 1$ (च) $y = 3x - 1$ (छ) $y = 2x - 3$ (ज) $y = 2x + 3$

(झ) $y = x + 8$ (ञ) $y = 4x - 1$

उत्तरमाला

अभ्यास 1.1

सबै उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 1.2

सबै उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 1.3

सबै उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 1.4

1. (क) $a = 120^0$, $x = 60^0$, $y = 120^0$ (ख) $x = 45^0$, $y = 30^0$ (ग) $x = 20^0$,
   (घ) $x = 45^0$, $a = 45^0$, $z = 45^0$, $y = 135^0$
2. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 2.1

उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 2.2

1. (क) हुन्छन् (ख) हुँदैनन् (ग) हुँदैनन् (घ) मिल्दैनन्
2. (क) सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् । (ख) विकर्णहरू आपसमा समद्विभाजित हुन्छन् ।
3. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।4. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ । 5. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 2.3

उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 2. 4

1. (क) 60^0 (ख) 90^0 (ग) 108^0 (घ) 120^0 (ङ) 135^0 (च) 140^0 (छ) 144^0 (ज) 150^0
2. (क) 120^0 (ख) 90^0 (ग) 72^0 (घ) 60^0 (ङ) 45^0 (च) 40^0 (छ) 36^0 (ज) 30^0
3. (क) 50^0 (ख) 113^0 (ग) 85^0 (घ) 235^0 (ङ) 72^0 (च) 110^0 (छ) 110^0 (ज) 98^0
   (झ) 60^0
4. (क) 180^0 (ख) 120^0 (ग) 120^0 (घ) 60^0 (ङ) 60^0 (च) छ
   (छ) बाहिरी कोण = भित्री अनासन्न कोणको योग (ज) Y + Z (झ) QYZ सँग

अभ्यास 3.1

(क) 1. समरूप छ 2. समरूप छ 3. छैनन् 4. छन् 5. छैनन् 6. छन् 7. छैनन्

(ख) 1. छन् 2. छैनन् 3. छन् 4. छैनन् 5. छन् 6. छैनन् 7. छन् 8. छन्

(ग) उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ । (घ) उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ । (ङ) उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

(च) 1. हुँदैनन् 2. हुन्छन् 3. हुन्छन् 4. हुँदैनन् 5. हुँदैनन् 6. हँदैनन्

(छ) शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 4.1

1. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

2. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

3. वृत्तको केन्द्र बिन्दुदेखि परिधिसम्मको दुरीलाई अर्धव्यास भनिन्छ । चित्र शिक्षकलाई देखाऊ ।

4. वृत्तको अर्धव्यास भनेको केन्द्रबिन्दुदेखि परिधिसम्मको दुरी वा लम्बाइ हो भने व्यास भनेको केन्द्रबिन्दु भएर जाने जीवा हो । चित्र शिक्षकलाई देखाऊ । वृत्तको व्यास सधैँ अर्धव्यासको दोब्बर हुन्छ ।

5. जीवा परिधिका कुनै दुई बिन्दुहरू जोड्ने रेखा हो तर अर्धव्यास वृत्तको केन्द्रबिन्दुदेखि परिधिसम्मको दुरी हो । चित्र शिक्षकलाई देखाऊ ।

6. सबै जीवा व्यास हुन सक्दैनन् । वृत्तको केन्द्रबिन्दु भएर जाने जीवा मात्र व्यास हुन्छ ।

7. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ । प्रयोगात्मक कार्य शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 5.1

उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 6.1

1. A(-5, 8) , B(-5, -5) , C(7, -5), D(-2 , 0) , E(4, 0), F(-5,-8)

2. त्रिभुज : A(3, 4) , B(-1, -2) , C(4, -2),

   आयत : D(-3, -6) , E(-3, -9) F(4, -9), G(4, -6)

   वर्ग : P(-9, 4), Q(-9, -3), R(-3,-3), S(-3,-4)\

3. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

4. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 6.2

1. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ । 2. E र P, A र S, G र H तथा Q र B 3. Q र G, F र H, R र E, B र S

4. लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाऊ । (क) त्रिभुज (ख) आयत (ग) नेपालको राष्ट्रिय झन्डा

5. (क) R (2,0) (ख) PQ = 10 एकाइ

6. (क) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाऊ (ख) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाऊ, बिन्दु J को निर्देशाङ्क J(5, 5) हुन्छ ।

अभ्यास 7.1

1. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

2. (क) 52cm (ख) 72cm (ग) 258cm (घ) 16m

3. (क) 28m (ख) 224cm 4. 56.25cm 5. 286cm 6. 120m

7. (क) 20m (ख) 160m

8. (क) 88m (ख) 352m

9. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 7.2

1. (क) $103cm^2$ (ख) $661.5cm^2$ (ग) $20cm^2$ (घ) $9cm^2$

2. (क) $102cm^2$ (ख) $170.12cm^2$

3. (क) $216cm^2$ (ख) $73.5cm^2$ (ग) $864cm^2$

4. (क) ℓ = 12cm (ख) h= 6.73cm

5. (क) 10cm (ख) 30cm

6. (क) 0.5m (ख) 0.75m^2

7. (क) 50650cm^2 (ख) 10625cm^2

8. (क) उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ । (ख) 1032cm^2 (ग) 180cm^2 (घ) 852cm

9. (क) 10cm (ख) 412cm^2

अभ्यास 8.1

उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 8.2

1. (क) 360° (ख) 180° (ग) 90° (घ) 120° (ङ) 270°

2. (क) 15 मिनेट घटी (ख) 30 मिनेट बढी (ग) 1 घण्टा घटी (घ) 3 घण्टा बढी (ङ) 45 सेकेन्ड घटी

3. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

4. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 8.3

उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 9.1

1. (क) श्रेणी 2 (ख) श्रेणी 3 (ग) सममिति नहुने (घ) श्रेणी 4 (ङ) श्रेणी 6
   (च) श्रेणी 2 (छ) श्रेणी 4 (ज) श्रेणी 2 (झ) श्रेणी 3 (ञ) श्रेणी 6

2. परिक्रमणहरू शिक्षकलाई देखाऊ । (क) श्रेणी 1 (ख) श्रेणी 1 (ग) श्रेणी 1 (घ) श्रेणी 2 (ङ) श्रेणी 2 (च) श्रेणी 2

3. रेखीय सममिति शिक्षकलाई देखाऊ । (क) श्रेणी 1 (ख) श्रेणी 2 (ग) श्रेणी 2 (घ) श्रेणी 2

अभ्यास 9.2

1. बहुभुजका ढाँचाहरू शिक्षकलाई देखाऊ ।

2. (क) त्रिभुज (ख) त्रिभुज र समानान्तर चतुर्भुज (ग) त्रिभुज, वर्ग र षट्भुज (घ) त्रिभुज, षट्भुज, समलम्ब चतर्भुज (ङ) त्रिभुज, वर्ग र षट्भुज

3. शिक्षकलाई देखाऊ । 4. शिक्षकलाई देखाऊ । 5. शिक्षकलाई देखाऊ । 6. 3 प्रकारका । परिभाषा र उदाहरण शिक्षकलाई देखाऊ । 7. शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 10.1

1. (क) पश्चिम (ख) दक्षिण पश्चिम (ग) मिल्दैन । (घ) उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

2. (क) उत्तर पश्चिम (ख) पूर्व दक्षिण (ग) दक्षिण पश्चिम (घ) उत्तर पूर्व (ङ) उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

3. (क) उत्तर (ख) पूर्व दक्षिण (ग) पश्चिम (घ) उत्तर पूर्व

4. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 10.2

1. चित्र शिक्षकलाई देखाऊ । 2. चित्र शिक्षकलाई देखाऊ ।

3. 180 m 4. 52.5 m 5. 3.75 m

6. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 11.1

1. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।
2. U = {30 सम्मका पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह}
3. U = {12 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह}

अभ्यास 11.2

1. (क) देखि (घ) सम्म उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ । (ङ) 64 ओटा
2. देखि 6. सम्म उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ । 7. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

   उपसमूहको सङ्ख्या = 2^n

अभ्यास 11.3

1. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।
2. भेन चित्र शिक्षकलाई देखाऊ ।
3. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 11.4

1. (क) A र B अलग्गिएका समूहहरू (ख) A र C अलग्गिएका समूहहरू

   (ग) B र C खप्टिएका समूहहरू (घ) A र D खप्टिएका समूहहरू

   (ङ) A र E खप्टिएका समूहहरू (च) B र D खप्टिएका समूहहरू

   (छ) B र E खप्टिएका समूहहरू (ज) C र D खप्टिएका समूहहरू

   (झ) C र E खप्टिएका समूहहरू
2. (क) B = [1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8, 9, 10, 11]

   (ख) C = [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 }

   (ग) D = { 1, 3, 5, 7, 9 } (घ) E = { 1, 2, 5, 10 }

   (ङ) (अ) खप्टिएका = B र C, B र D, B र E, C र E (आ) अलग्गिएका = C र D
3. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 11.5

1. भेन चित्र शिक्षकलाई देखाऊ ।
2. (क) U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, A = {2, 4, 6, 8,10,12}, B = {1, 3, 5, 7, 9, 11}

   (ख) (अ) A U B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

   (अ) B U A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

   (इ) B U B = {1, 3, 5, 7, 9, 11}

   (ई) A U A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}

   (ग) प्रमाणित गरेर शिक्षकलाई देखाऊ ।
3. (क) भेन चित्र शिक्षकलाई देखाऊ ।

   (ख) प्रमाणित गरेर शिक्षकलाई देखाऊ ।
4. (क) M = {1, 2, 4, 8} (ख) भेन चित्र शिक्षकलाई देखाऊ । (ग) M U N = {1, 2, 4, 8 }

   (घ) सकिन्छ । प्रमाणित गरेर शिक्षकलाई देखाऊ ।

5. (क) भेन चित्र शिक्षकलाई देखाऊ ।

(ख) सकिन्छ । प्रमाणित गरेर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 11.6

1. (क) $A \cap B = \{ d, e, f, \}$ (ख) $B \cap A = \{ d, e, f, \}$ (ग) $A \cap A = \{ a, b, c, d, e, f \}$

(घ) $U \cap A = \{ a, b, c, d, e, f \}$ (ङ) $U \cap B = \{ d, e, f, g, h , i \}$

2. (क) $A \cap B = \{ 1, 2, 3 \}$ भेन चित्र शिक्षकलाई देखाऊ ।

3. (क) $A \cap B = \{ 3, 9 \}$ (ख) $B \cap C = \{ 6 \}$ (ग) $A \cap C = \{ \}$ भेन चित्र शिक्षकलाई देखाऊ ।

4. $P \cap Q = \{ a, b, c \}$ भेन चित्र शिक्षकलाई देखाऊ ।

5. (क) भेन चित्र शिक्षकलाई देखाऊ । (ख) $M \cap N = \{ 2, 4, 8 \}$ (ग) सकिन्छ । प्रमाणित गरेर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 12.1

(क) 1. 8 2. 14 3. 18 4. 20 5. 35 6. 54

7. 75 8. 108 9. 143 10. 196 11. 168 12. 125

(ख) 1. 64 2. 144 3. 225 4. 361 5. 625 6. 5929 7. 9025 8. 10000

9. 42025 10. 250000

(ग) 1. 13 2. 25 3. 48 4. 94 5. 99 6. 105 7. 309 8. 408 9. 804 10. 1012

(घ) 1. $\frac{12}{13}$ 2. $\frac{25}{32}$ 3. $\frac{35}{54}$ 4. $\frac{46}{45}$ 5. $\frac{80}{27}$

(ङ) 1. $400m^2$ 2. 25m

अभ्यास 12.2

1. (क) 216 (ख) 1331 (ग) 2197 (घ) 3375 (ङ) 5832

(च) 13824 (छ) 27000 (ज) 91,125 (झ) 5,12,000 (ञ) 10,00,000

2. (क) 2 (ख) 5 (ग) 7 (घ) 10 (ङ) 15

3. $1728m^3$ 4. $91,125m^3$ 5. $15,625m^3$ 6. 16m 7. 40m

अभ्यास 12.3

1. (क) 3 (ख) 2 (ग) 3 (घ) 3 (ङ) 6 (च) 9 (छ) 7 (ज) 4 (झ) 5 (ञ) 2

2. (क) 6 (ख) 6 (ग) 10 (घ) 5 (ङ) 16 (च) 12 (छ) 18 (ज) 3 (झ) 5

3. 9 4. 25 जना विद्यार्थी, 5 ओटा सुन्तला, 6 ओटा मौसम र 9 ओटा अम्बा 5. 10 जना, 8 ओटा कम्बल, 9 स्वीटर र 12 प्याकेट 6. 12

अभ्यास 12.4

1. (क) 144 (ख) 60 (ग) 144 (घ) 245 (ङ) 300 (च) 600

(छ) 168 (ज) 216 (झ) 44520 (ञ) 1200 2. 720 3. 7560 cm 4. 75

5. 185 6. शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 12.5

1. (क) 1011_2 (ख) 11001_2 (ग) 1001111_2 (घ) 1101000_2 (ङ) 11111010_2
(च) 101101110_2

2. (क) 3 (ख) 5 (ग) 7 (घ) 21 (ङ) 25 (च) 31 (छ) 51 (ज) 32 (झ) 67 (ञ) 121

3. (क) 41_5 (ख) 210_5 (ग) 422_5 (घ) 10100_5 (ङ) 14003_5 (च) 104100_5

4. (क) 11 (ख) 19 (ग) 38 (घ) 98 (ङ) 283 (च) 194

अभ्यास 13.1

1. सङ्ख्या रेखा शिक्षकलाई देखाऊ ।

1. (क) (+7) (ख) (+3) (ग) (-3) (घ) (-7) (ङ) (-8) (च) (+4) (छ) (+8) (ज) (+2) (झ) (+2) (ञ) -2

2. (क) (+5), (-15) (ख) (+7, -13) (ग) (+10), (-10) (घ) (+14), (-6) (ङ) (+17), (-3)
(च) (20), 0

3. (क) (-4) (ख) (-1) (ग) (+3) (घ) (+5) (ङ) 0 (च) (-7)

4. (क) 6 (ख) 4 (ग) 10 (घ) 3 (ङ) 5 (च) 7

5. (क) 13 (ख) 7 (ग) -6 (घ) 4 (ङ) 8 (च) 0 (छ) -11 (ज) -30

6. (क) (+49) (ख) 0 (ग) (+30) (घ) (+41) (ङ) (-32)

7. (-50) 8. (-15) 9. नाफा रु. 71 10. 266km. 11. -296 12. (क) +47 (ख) +108

13. (क) (-7) (ख) (+7) 14. (क) -27 (ख) -40

अभ्यास 13.2

1. (क) (+25) (ख) (-40) (ग) (-56) (घ) (+72) (ङ) (+120)
(च) (-336) (छ) (-192) (ज) (-140) (झ) (+144) (ञ) (-480)

2. (क. (+210) (ख) (+105) (ग) (-27) (घ) (-120) (ङ) (-336)

3. (क. (+72) (ख) (-150) (ग) (-126) (घ) (+180) (ङ) (+288)

4. (क) (+5) (ख) (-5) (ग) (-8) (घ) (-5) (ङ) (+5) (च) (+6)

5. (+7) 6. (+12) 7. (-16) 8. (+8) 9. (-15) 10. (+4)

अभ्यास 13.3

1. (क) 29 (ख) -360 (ग) 78 (घ) 424 (ङ) 5

2. 37 3. 83 4. 15 5. 18

अभ्यास 14.1

1. (क) हुन् (ख) हुन् (ग) हुन् (घ) हो (ङ) होइनन्

2. (क) अन्त्य (ख) अन्त्य (ग) पुनरावृत (घ) अन्त्य (ङ) पुनरावृत
(च) अन्त्य (छ) अन्त्य (ज) अन्त्यहित (झ) पुनराकृत (ञ) अन्त्य

3. (क) $\frac{-2}{5}, \frac{5}{2}$ (ख) $\frac{5}{7}, \frac{-7}{5}$ (ग) $\frac{-22}{7}, \frac{7}{22}$ (घ) $\frac{-12}{7}, \frac{7}{12}$ (ङ) $\frac{11}{8}, \frac{-8}{11}$

4. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 15.1

1. (क) अनुपातिक (ख) अनानुपातिक (ग) अनानुपातिक (घ) अनुपातिक
   (ङ) अनुपातिक (च) अनुपातिक (छ) अनुपातिक (ज) अनुपातिक (झ) अनुपातिक
2. होइनन् । 3. होइनन् । 4. हुन् ।

अभ्यास 16.1

1. $\frac{2}{3}$ भाग 2. 4 भाग केटा 3 भाग केटी 3. $\frac{1}{10}$ भाग र रु. 900 4. खानामा 5. 150
6. रु. 562.50 7. रु. 3,00,000 8. 3500 लीटर 9. 100 दिन

अभ्यास 16.2

1. (क) 14.5168 (ख) 7.4 (ग) 4.431 (घ) 16.982 (ङ) 1.6975
   (च) 41.54 (छ) 1.735 (ज) 10 (झ) 51.6375 (ञ) 66.73
2. 388.18125 cm^2 3. 76.5m 4. 276m 5. 60.5 m 6. 3. 2.m
7. 75 ओटा

अभ्यास 17.1

1. (क) 2 (ख) 14.85 (ग) 448kg (घ) 525८ (ङ) 1170 जना
2. (क) 33.33% (ख) 50% (ग) 60% (घ) 20% (ङ) 5%
3. 60%, 40% 4. 64%, 36% 5. 675 अङ्क 6. रु. 10,200 7. 25%
8. रु. 6,642 9. रु. 20,000

अभ्यास 17.2

1. (क) $\frac{1}{20}$ (ख) रु. $\frac{3}{4}$ (ग) $\frac{27}{100}$ (घ) $\frac{1}{6}$ (ङ) $\frac{1}{4}$
2. 1: 5 3. रु. 100 र रु. 150
4. 108 5. रु. 10,000 6. (क) 12 (ख) 3 (ग) 27 (घ) 5 (ङ) 60 7. 16 जना
8. रु. 3000 9. 240 km 10. 60 दिन

अभ्यास 18.1

1. (क) नाफा 10% (ख) नोक्सान 10% (ग) नाफा 30% (घ) नोक्सान 25% (ङ) नाफा 25%
2. रु. 4345 3. 25% 4. रु. 1105 5. 4% नोक्सान 6. रु 18400
7. 23.2% 8. रु. 1200 9. रु. 1750, रु. 1837.5 10. रु. 6000

अभ्यास 19.1

1. (क) प्रत्यक्ष परिवर्तन (ख) प्रत्यक्ष परिवर्तन (ग) अप्रत्यक्ष परिवर्तन (घ) अप्रत्यक्ष परिवर्तन (ङ) प्रत्यक्ष परिवर्तन
2. रु 200 3. रु. 60 4. रु. 24,000 5. 3 लिटर 6. 75 kg. 7. 4 दिन 8. 30 दिन
9. 12 घण्टा 10. 37.5 दिन 11. 28 दिन

अभ्यास 20

1. (क) रु. 45 (ख) रु. 270 (ग) रु.360 (घ) रु.233.33

2. (क) 3% (ख) 5% (ग) 22.22%

3. (क) 2 वर्ष 6 महिना (ख) 2 वर्ष (ग) 3 वर्ष

4. (क) रु. 400 (ख) रु.1,000 (ग) रु. 6,000

5. रु.700, रु. 2450 6. 10% 7. 2 वर्ष 6 महिना 8. नाफा, रु. 240

अभ्यास 21.1

सञ्चित बारम्बारता तालिका शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 21.2

1. शिक्षकलाई देखाऊ ।

2. (क) स्याउ 50 ओटा, नासपाती 45 ओटा (ख) स्याउ 30 ओटा, नासपाती 55 ओटा

(ग) बुधबार सबभन्दा बढी 50 ओटा र मङ्गलबार सबभन्दा कम 27 ओटा स्याउ

(घ) शिक्षकलाई देखाऊ ।

3. शिक्षकलाई देखाऊ । 4. शिक्षकलाई देखाऊ । 5. शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 21.3

उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 21.4

1. (क) 6 (ख) 11.2 (ग) 6.33 (घ) 20 (ङ) 65

2. (क) 5 (ख) 14.32 (ग) 30 (घ) 31.5 (ङ) 93.33

3. (क) 11.73 (ख) 17.5 (ग) 32.5 (घ) 129.25 (ङ) 92.39

4. 94

अभ्यास 22.1

1. (क) त्रिपदीय (ख) एक पदीय (ग) दुई पदीय (घ) त्रिपदीय (ङ) त्रिपदीय (च) एक पदीय

2. (क) डिग्री 3 (ख) डिग्री 5 (ग) डिग्री 7 (घ) डिग्री 12 (ङ) शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 22.2

1. (क) $3a^2 - 2ab$ (ख) $\frac{2}{3}(x^3 - xy^2)$ (ग) $\frac{-2}{3}ac + \frac{1}{4}bc$ (घ) $6mp - 9np$

2. (क) $10x^3 + 27x^2 - 18x$ (ख) $\frac{23}{6}m^2 - \frac{11}{2}m$ (ग) $2y + 21x - 15$ (घ) 0

3. (क) $x^2 + 2xy + y^2$ (ख) $p^2 - 2pq + q^2$ (ग) $m^2 - n^2$ (घ) $9x^2 - 25y^2$

(ङ) $2a^3 - 3a^2b + 2ab^2 - 3b^3$ (च) $15c^2 - 34cd + 15d^2$ (छ) $k^2/9 - 1/4$

(ज) $15.5a^4 + 38.74a^2b^2 + 13.52b^4$

4. $(15p^2 - p - 6)$, 22 5. $(10a^2 + 25a^2b - 8ab^2 - 20b^3)$, 176

6. (क) $12a^2 + 3ab$ (ख) $6x^2 + 13xy$ (ग) p^2 (घ) $2y^2$ (ङ) $3x^2 + 9.5xy + 5y^2$

(च) $5.2a + 2.5b + ab + 13$ (छ) $21m^2 + 20.75mn + 3.75n^2$

(ज) $1.5x^2 + 5.5xy + 4yz + 2zx + 5y^2$

7. (क) $(20a^2 + 3ab - 2b^2)\ m^2$ (ख) $190m^2$

8. (क) $(72a^2 – 42ab – 24ac + 6bc + 6b^2)m^2$ (ख) $1512m^2$

अभ्यास 22.3

1. (क) 2a - 3b + 6 (ख) $5m^3 - 3m^2 + 5$ (ग) 2x (घ) (m+2) (ङ) (a + 4)

   (च) (m-4) (छ) (2y+3) (ज) (4p + 3q) (झ) $\ell^2 - 4\ell – 6$ (ञ) उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

2. (क) 5x + 4, (ख) $A = 335cm^2$, $\ell = 15cm$ b = 29cm

3. (क) $\ell = 6xy$, $A = 12960cm^2$ $\ell = 432cm$ b = 30cm

4. (क) रु. (x+4) (ख) वास्तविक रकम = रु. 323, मानिसको सङ्ख्या = 17 जना, प्रत्येकको भागमा परेको रकम = रु. 19,

5. (क) (x- 7) (ख) $\ell = 28m$, b = 3m / $A = 84m^2$

अभ्यास 22.4

1. (क) $(a^2 +2a + 1)$ (ख) $b^2 + 4b + 4$ (ग) $c^2 – 2c + 1$ (घ) $c^2 - 10c + 25$ (ङ) $4p^2 + 12pq + 9q^2$

   (च) $36m^2 -60mn + 25n^2$ 2. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

3. (क) $a^4 – 6a^2y + 9y^2$ (ख) $x^2y^2 + 2abxy + a^2b^2$ (ग) $p^4q^2 + 2p^2q^3r + q^4r^2$

   (घ) $25p^8 + 60p^4a + 36a^2$ (ङ) $m^4 – 2m + 1/m^2$ (च) $9q^6 + 1 + \frac{1}{36q^6}$

4. (क) 47 (ख) 49

5. (क) 146 (ख) 148

6. (क) $34c^2 – 48cd + 40d^2$ (ख) $(15k^2 – 172k + 485)$

7. (क) $g^3 + h^3$ (ख) $x^3 + y^3$ (ग) $\ell^3 – m^3$

8 र 9. प्रमाणित गरेर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 23.1

1. (क) 5^7 (ख) $(-15)^4$ (ग) $(3x)^4$ (घ) $(-64)^6$

2. (क) 6 x 6 x 6 (ख) 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3

   (ग) (-6) x (-6) x (-6) x (-6) x (-6) x (-6) x (-6) x (-6) (घ) (2x) x (2x) x (2x) x (2x) x (2x) x (2x) x (2x)

   (ङ) (-2b) x (-2b) x (-2b) x (-2b) x (-2b) x (-2b) x (-2b) x (-2b) x (-2b)

3. (क) 10^2 (ख) 2×10^2 (ग) 5×10^3 (घ) 35×10^4 (ङ) 69×10^6

4. (क) 200 (ख) 5,00,000 (ग) -15,000 (घ) 1152 (ङ) -625 (च) 128

5. (क) 2^2 सानो र 3^2 ठुलो (ख) 5^3 सानो र 3^5 ठुलो (ग) 4^2 सानो र 3^4 ठुलो (घ) 10^2 सानो र 2^{10} ठुलो
   (ङ) 0^{100} सानो र 100^1 ठुलो (च) 2^8 सानो र 10^3 ठुलो

6. (क) 2^6 (ख) $2^2 \times 5^3$ (ग) 157×2^3 (घ) $2^6 \times 3^3$ (ङ) $2^8 \times 3^3 \times 5^3$

7. (क) 3^7 (ख) 5^{12} (ग) x^8 (घ) a^{-1} (ङ) x^9 (च) $(-b)^8$ (छ) q^5 (ज) $(5x)^2$

8. (क) 1 (ख) 2 (ग) 1 (घ) 1 (ङ) 105 (च) 2

9. (क) 27 (ख) 425 (ग) 18 (घ) 2 (ङ) 1

अभ्यास 24.1

1. (क) 12 (ख) 85 (ग) -6 (घ) $\frac{2}{5}$ (ङ) $\frac{-15}{6}$ (च) $\frac{-8}{27}$ (छ) $\frac{255}{152}$

2. (क) p = -30 (ख) k = -35 (ग) r = 1.25 (घ) t = 24

3. (क) सत्य (ख) असत्य (ग) असत्य (घ) सत्य

4. (क) एक चलयुक्त समीकरण (ख) उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ । (ग) 1 (घ) 4

5. 2x + 4 = 28, छात्र = 12 जना र छात्रा = 16 जना

6. छात्र = 305 जना र छात्रा = 250 जना

7. (क) नमुना चित्र शिक्षकलाई देखाऊ । (ख) 4x + 4 = 132 (ग) लम्बाइ = 34m चौडाइ = 32m
   (घ) क्षेत्रफल = 1088m²

8. (क) लम्बाइ = 20m चौडाइ = 10m (ख) नमुना चित्र शिक्षकलाई देखाऊ । (ग) 6x + p = 0
   (घ) परिमिति = 60m

9. (क) x - 18 = 0 (ख) 12 जना 10. (क) 2x +1 = 51 (ख) 25 र 26

11. (क) 4x - 120 = 0 (ख) 30 ओटा र 90 ओटा 12. (क) 4x - 48 = 0 (ख) 12 र 36

13. (क) 4x - 20 = 110 (ख) लम्बाइ = 32.5m चौडाइ = 22.5m

अभ्यास 24.2

1. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

2. (क) बेठिक (ख) बेठिक (ग) बेठिक (घ) ठिक (ङ) बेठिक (च) ठिक (छ) बेठिक (ज) ठिक

3. (क) $x \leq 1$ (ख) $x > -1$ (ग) $x \geq -3$ (घ) $x > 4$

अभ्यास 24.3

1-5 उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।

अभ्यास 24.4

1. शिक्षकलाई देखाऊ ।

2. A (1,2), B (5,8) , C (-3,4), D(-5,8), E (-4,0), F (-2,-3), G (-5,-5), H(3,-2), I (1,-6), J(5,0)

3. उत्तर शिक्षकलाई देखाऊ ।